

Subject :

Year. Month. Date. ()

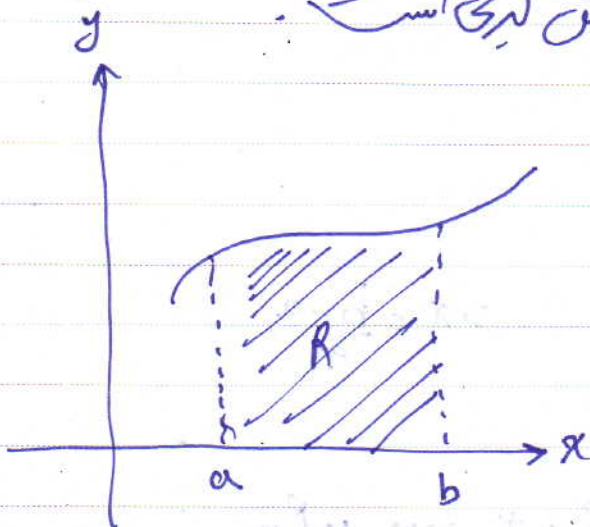
فصل :
انتقال و پذیرش کارمندان

Subject :

Year. Month. Date. ()

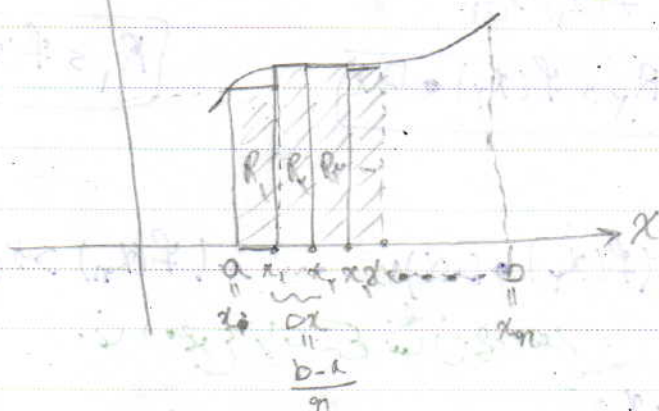
10/10/2020

فصل (۴) انتگرال و چند کاربرد آن
 I انتگرال معین
 II انتگرال نامعین
 در واقع انتگرال عملی عمل مشتق برعکس است.



هدف بسیار این قسمت سطح زیر نموداری باشد.

به طور کلی فرض می‌کنیم
 $y = f(x)$
 در بازه $[a, b]$ پیوسته و متناهی باشد.



و بازه $[a, b]$ را به n زیر

بازه تقسیم می‌کنیم

طول بازه را $b - a$

و طول هر زیر بازه $\frac{b-a}{n}$

و آن را $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ در هم از نقطه انتهایی a تا b را

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

نشان دهیم آن‌ها را Δx داریم

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i \Delta x$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$x_1 = a + \Delta x$$

$$x_2 = a + 2\Delta x$$

$$x_3 = a + 3\Delta x$$

⋮

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

~~R~~

~~R~~

$$R_2 = y_2 \Delta x$$

$$f(x) = y$$

$$f(x_1) = y_1$$

$$R_2 = f(x_2) \Delta x$$

$$R_1 = y_1 \Delta x$$

$$f(x) = y$$

$$f(x_1) = y_1$$

$$R_1 = f(x_1) \Delta x$$

$$R = (f(x_1) \Delta x) + (f(x_2) \Delta x) + \dots + (f(x_n) \Delta x)$$

$$R = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

یہ مجموعہ، اس کے تحت کی ہے۔

این مجموعہ تقریبی (اگر بے صحت) کی ہے۔

و این مجموعہ، مجموعہ کی ہے۔

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right)$$

این فرمول معیار انتگرال را می‌دهد. از آنجا که R به صورت یک عدد حقیقی در می‌آید، این فرمول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (1)$$

$$\text{اگر } a_i = c \text{ (ثابت)} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \underbrace{c + c + c + \dots + c}_{n \text{ بار}} = nc$$

$$\text{(3) زنی ندارد از 1 شروع شود، مثلاً}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\text{و به اشتباهی نباید نوشت} \quad (4)$$

$$i) \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$ii) \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

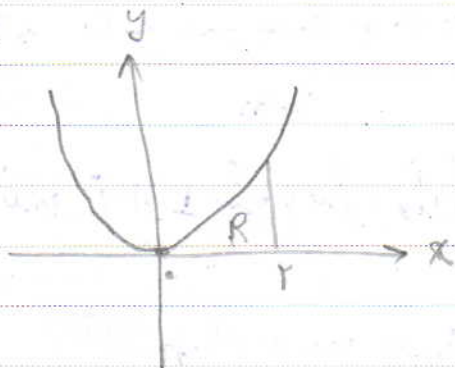
$$iii) \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

مثال: $y = x^2$ در $c, 0$ با استهلاک از a به b (یعنی بیست و دو)



$$(1) y = x^2 \Rightarrow f(x) = x^2$$

$$(2) \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$b = 2, a = 0, n = 4$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(3) R = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$(4) x_i = a + i \Delta x \quad a = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x_1 = \Delta x = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{2}, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = \frac{4}{2}, x_5 = \frac{5}{2}$$

در

Subject:

Year. Month. Date. ()

یاجرزکذاری در (دارم)

$$R = \sum_{i=1}^4 f(x_i) \Delta x = \sum_{i=1}^4 (x_i)^2 \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 (x_i)^2$$

$$= \frac{1}{3} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + (2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1 + \frac{16}{9} + \frac{25}{9} + 4 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1+4+9+16+25+36}{9} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{91}{9} \right] = \frac{91}{27}$$

برای (a, b)

تعریف انتگرال

لیم انتگرال یعنی سطح زیر نمودار و برابر است ب

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right)$$

مقدار این حد را $\int_a^b f(x) dx$ می‌گویند و a و b را انتگرال معین می‌گویند.

① وہی ہی انٹرل ریلوے بہترین درجہ بندی میں ہے۔
قواعد

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (2)$$

$$\text{اگر } a < c < b \quad (3)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (4)$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (5)$$

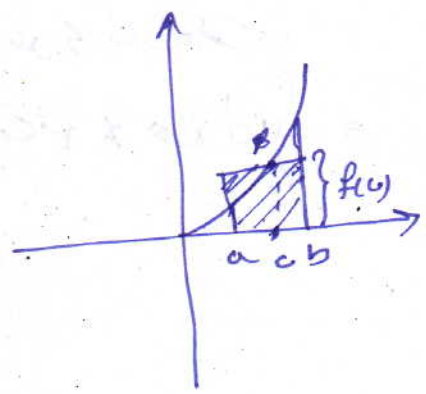
✓

⑥ قوسه مقدار میانگین برای انتگرال

① اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد و f در (a, b) وجود داشته باشد و f در $[a, b]$ محدود باشد

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

در اینجا مقدار میانگین از خود را برای انتگرال می‌گیریم
مقدار $f(c)$ و $b-a$



$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

⑦ مقدار میانگین $f(x)$ در $[a, b]$ $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

⑧ انتگرال عکس
بین کریم که انتگرال عکس می‌باشد است به این

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

که $F(x)$ ، آنتی‌توان (یا مشتق) $f(x)$ است و $F'(x) = f(x)$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

⑥ قاعده انتگرال مستقیم و معکوس

معکوس انتگرال
یعنی مشتق
می‌گیرد

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

بنابراین هدف از انتگرال خاصین بدست آوردن تابع اولیه می‌باشد.

⑦ روش‌های انتگرال‌گیری (بدست آوردن توابع اولیه)

(اعدادی است)

$$\textcircled{1} \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad , \quad \int dx = x + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\textcircled{3} \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\textcircled{4} \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\textcircled{5} \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\textcircled{6} \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

ad

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\textcircled{v} \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$$

$$\textcircled{A} \int e^x dx = e^x + c$$

تذکر: خواص زیر سه برای انتگرال معین نیز برای انتگرال نامعین برقرار است.

خواص از روی جدول نوشته شد
① و ② ص ۴

مثال ①

$$\int (3x^2 - 5x + 2) dx$$

$$\cancel{\int 3x^2 + 2} \quad \int 3x^2 dx - \int 5x dx + \int 2 dx$$

$$= 3 \int x^2 dx - 5 \int x dx + 2 \int dx$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2+1} x^{2+1} \right) - 5 \left(\frac{1}{1+1} x^{1+1} \right) + 2(x) + c$$

$$= 3 \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - 5 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) + 2x + c$$

$$= x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 2x + c$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

②) $\int \frac{x^r + cx - d}{x^r} dx$

$$\int \frac{x^r + cx - d}{x^r} dx$$

$$= \int \frac{x^r}{x^r} dx + \int \frac{cx}{x^r} dx - \int \frac{d}{x^r} dx$$

$$= \int x^0 dx + \int \frac{c}{x^{r-1}} dx - d \int \frac{1}{x^r} dx$$

$$= \left(\frac{1}{r} x^r + c(\ln|x|) - d \int x^{-r} dx \right)$$

$$= \frac{1}{r} x^r + c(\ln|x|) - d \left(\frac{1}{-r+1} x^{-r+1} \right)$$

$$= \frac{1}{r} x^r + c(\ln|x|) - d \left(-\frac{1}{r} x^{-r} \right) = \frac{1}{r} x^r + c(\ln|x|) + \frac{d}{x}$$

③) $\int \frac{1}{x} dx$

$f(x) = \sqrt[n]{\frac{1}{x}}$ $f(x)$ $\Rightarrow f(x) = x^{-n}$ $\Rightarrow f(x) = x^{-n}$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x^{-n} dx$$

$$= x^{-n+1} + \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} - Vx + C$$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$ $\Rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$

PAPCO $f(1) = 1 + \frac{1}{-1} - V + C \Rightarrow C = \frac{19}{1}$

$$f(x) = x^{-n+1} + \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} - Vx + \frac{19}{1}$$

۱۱

Subject:

Year: Month: Date:

* قضیه اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال
فرض کنید f یک تابع پیوسته باشد.

$$\int_1^x x^2 + 2 dx = F(x) - F(1)$$

$$F(x) = \int_1^x x^2 + 2 dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{3}(x)^3 + 2x = \frac{1}{3} + 2 = \frac{1+6}{3} = \frac{7}{3}$$

$$F(1) = \frac{1}{3} + 2 = \frac{1+6}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^x x^2 + 2 dx = F(x) - F(1) = \frac{7}{3} - \frac{7}{3} = \frac{7-7}{3} = \frac{0}{3}$$

* نتیجه

① نتیجه ① در صورتی که $a < b$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$a < b$

$$= \left[\frac{1}{3} (x^3 - 1) \right]_1^x = \left[\frac{1}{3} (x^3 - 1) \right]_1^x$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (x^3 - 1) = \frac{1}{3} (x-1)(x^2+x+1) = \frac{1}{3} (x-1)(x^2+x+1)$$

Subject:

Year.

Month.

Date.

()

no-ny p'di d'w (v) d'w (v)

$$\Rightarrow \int_r^a x^r dx = \left[\frac{1}{r+1} x^{r+1} \right]_r^a = \frac{1}{r+1} a^{r+1} - \frac{1}{r+1} r^{r+1}$$

$$= \frac{1}{r+1} a^{r+1} - \frac{r}{r+1} r^r = \frac{a^{r+1}}{r+1} - r$$

$$\int_1^e |x-r| dx$$

$$\frac{a^r}{r} - a \Rightarrow$$

$$\frac{r}{r+1} = a \Rightarrow a^r \geq r \Rightarrow a \geq \sqrt[r]{r}$$

$$a \geq r$$

no-ny d'w (v) d'w (v)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_c^b f(x) dx = - \int_b^c f(x) dx = -N$$

$$I = \int_a^c f(x) dx + N$$

$$\int_a^c f(x) dx = I + N = 1$$

روش انتگرال گیری

① روش تغییر متغیر (روش زنجیری)

به فرماده زنجیری مشتق داریم

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x)$$

$$F'(x) = f(x) \quad \text{چون}$$

به این ترتیب (از دوطرف به انتگرال می گیریم)

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

و برای راحتی کار، قرار می دهیم $u = g(x)$

$$du = g'(x) dx$$

آنجا که $f(g(x)) g'(x) dx$ داریم

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

و بدین

$$\int (x^3 + 1)^n x^2 dx$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$u = x^r + 1$$

$$du = r x^{r-1} dx$$

$$\frac{1}{r} du = x^{r-1} dx$$

$$\int u^n \left(\frac{1}{r} du \right) = \frac{1}{r} \int u^n du = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} u^r + c \right] = \frac{1}{r^2} u^r + \frac{1}{r} \underbrace{c}_D$$

$$= \frac{1}{r^2} (x^r + 1)^r + D$$

$$\int x \sqrt{x^r + r} dx$$

$$u = x^r + r$$

$$du = r x^{r-1} dx$$

$$= r \int \sqrt{x^r + r} x dx = r \int \sqrt{u} du$$

$$= r \int u^{\frac{1}{2}} du = r \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} u^{\frac{1}{2} + 1} + c \right]$$

$$= r \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c \right]$$

$$= \frac{2r}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{rc}{3} = \frac{2r}{3} (x^r + r)^{\frac{3}{2}} + D$$

Subject: Math

Year: _____ Month: _____ Date: _____

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$$

$$u = 2x^2 + 1$$

$$du = 4x dx$$

$$\frac{1}{4} du = x dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4} du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{4} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-\frac{1}{2}+1} + C \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[2 u^{\frac{1}{2}} + C \right] = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} C$$

$$= \frac{1}{2} (2x^2+1)^{\frac{1}{2}} + D$$

(2) انتگرال گیری به روش جانشینی

~~$$d(uv) = u dv + v du$$~~

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$d(uv) = v du + u dv$$

$$u dv = d(uv) - v du$$

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

این دستور انتقال برای روش جزوه به جزوه کنیم این فصول $u dv$ را بر حسب
انتقال دیگر یعنی $\int v du$ بیان می کنند.

در روش جزوه انتقاب درست است و $u dv$ می توان مع سب $\int u dv$ را به
انتقال مع ده ری تبدیل کرد.

روش انتقاب $u dv$ و $v du$ در انتقال برای به روش جزوه به جزوه.

① dv / امده به پیچیده ترین عاملی انتقاب می کنیم نه قبل انتقال برای به طور
مستقیم به u .

② u / به بدنه ای انتقاب می کنیم نه مستقیم به مع ده ری به dv .

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{u}{dv} dx$$

$$u = x \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = dx \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$uv - \int v du$$

$$= x \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C \right) - \frac{1}{2} \int (e^{2x} + C) dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} + Cx - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - C \int dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} + Cx - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - Cx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + D$$

$$\int e^{2x} dx$$

$$n = 2x \quad dn = 2 dx$$

$$\frac{dn}{2} = dx$$

$$\int e^n \frac{1}{2} \frac{dn}{2} = \frac{1}{4} \int e^n dn$$

$$= \frac{1}{4} e^n + C$$

$$= \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$= e^{2x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + D$$

مثال ۱۷:
 مسئله ۱۷: در این مسئله، $u = x$ و $dv = \ln x dx$ را در نظر بگیرید. این دو را در فرمول انتگرال قرار دهید و نتیجه را به دست آورید.

مثال ۱۸:

$$\int x \ln x dx \quad u = x \quad dv = \ln x dx$$

$$du = dx \quad v = \int \ln x dx$$

معادله بالا را برای u و dv در فرمول انتگرال قرار دهید و نتیجه را به دست آورید.

$$u = \ln x \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

$$= uv - \int v du = (\ln x) \left(\frac{1}{2} x^2 \right) - \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \left(\frac{1}{x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

Ans

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$\int \frac{\ln x}{u} \frac{dx}{dv} \quad \cancel{\int \ln x}$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & \leftarrow v &= x \end{aligned}$$

$$= uv - \int v du = (\ln x)(x) - \int x \left(\frac{1}{x} dx \right)$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$= x (\ln x - 1) + c$$

$$\int \frac{e^x}{u} \frac{\sin x dx}{dv}$$

$$\begin{aligned} u &= e^x & dv &= \sin x dx \\ du &= e^x dx & \leftarrow v &= \int \sin x dx \\ & & &= -\cos x \end{aligned}$$

$$= uv - \int v du = e^x (-\cos x) - \int (-\cos x) e^x dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \quad \textcircled{1}$$

$$\int \frac{e^x}{u} \frac{\cos x dx}{dv}$$

$$\begin{aligned} u &= e^x & dv &= \cos x dx \\ du &= e^x dx & v &= \int \cos x dx \\ & & &= \sin x \end{aligned}$$

Subject: Calculus

Year: _____ Month: _____ Date: _____

$$= u_1 v_1 - \int v_1 du_1 = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx \quad \text{①}$$

u₁ ①, v₁ ②, du₁ ③, dv₁ ④

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x e^x dx$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (-e^x \cos x + e^x \sin x)$$

$$= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

idco

$$\int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_u \underbrace{\sin x}_{dv} dx$$

$$u = \sin x \quad dv = \sin x dx$$

$$du = \cos x dx \quad v = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$= uv - \int v du = (\sin x)(-\cos x) - \int (-\cos x) \cos x dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos x}_u \underbrace{\cos x}_{dv} dx \quad \text{①}$$

~~$$u_1 = \cos x \quad dv_1 = \cos x dx$$~~

~~$$du_1 = -\sin x dx \quad v_1 = \int \cos x dx = \sin x$$~~

~~$$\int \cos x \cos x dx = \cos x \sin x - \int \cos x \sin x dx$$~~
~~$$= \cos x \sin x + \int \sin x dx$$~~

~~$$\sin x = -\sin x \cos x + \int \cos x dx$$~~

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\int \sin^2 x = \int (1 - \sin x \cos x) + \int \cos^2 x dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int 1 dx - \int \sin^2 x dx$$

$$\int \sin^2 x dx + \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int 1 dx$$

$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \frac{1}{2} x$$

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} (\sin x \cos x) + \frac{1}{4} x + C$$

$$= -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{4} x + C$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Subject: _____
Year: _____ Month: _____ Date: _____

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = w(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$$

(۳) انتقال پیری به دوش تجزیه سرهای جزئی. (انتقال پیری از توان n به $n-1$)

به طوری که به صورت $\frac{P(x)}{q(x)}$ معین می باشد

$$P(x) = w(x)q(x) + R(x)$$

حالت اول: اگر درجه ضربه ای $P(x)$ بسته تر از درجه ضربه ای $q(x)$ باشد، ابتدا $R(x)$ را از $P(x)$ کم می کنیم. سپس انتقال را تکرار می کنیم.

حالت دوم: اگر درجه ضربه ای $P(x)$ بزرگتر از درجه ضربه ای $q(x)$ باشد، آن را n بار تجزیه می کنیم. به این ترتیب آن را به مجموع ضربه های جزئی تبدیل کرد و سپس از مجموع انتقال پیری می کنیم.

تجزیه: سرهای به صورت

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \frac{A}{(x-a)^n} \quad (1)$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n} \quad (2)$$

که در آن a, b, A, B اعداد حقیقی و m, n اعداد طبیعی هستند و $x \in \mathbb{R}$

توجه: n نیز می تواند صفر باشد. (در این صورت سرهای جزئی n صفر می باشد)

تجزیه تابع گویا به حاصل جمع سرهای جزئی.

(۴) حالت اول: اگر $q(x)$ را می توان به شکل $ax+b$ نوشت. آن را مستخرج این

عبارت می کنیم. در تجزیه کسر وجود دارد که در آن A عدد حقیقی و a, b اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است.

$$\frac{A}{ax+b}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

مسئله:

$$\int \frac{(x-1) dx}{x^2 - x - 2}$$

حل: ابتدا مخرج کسره را فاکتور می کنیم داریم

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$Ax - 2A + Bx + B = x - 1$$

$$(A+B)x + (B-2A) = x - 1$$

$$\textcircled{1} A+B=1 \rightarrow A=1-B$$

$$\textcircled{2} B-2A=-1$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow A=1-B$$

در (2) جایگزین می کنیم

$$B-2(1-B)=-1 \rightarrow B-2+2B=-1$$

$$\Rightarrow 3B=-1+2 \Rightarrow 1$$

$$\boxed{B=\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{A=\frac{2}{3}}$$

$$\frac{x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx$$

پس این دو انداز را بدست می آوریم (روش تغییر متغیر)

* حالت دوم: اگر $q(x)$ دارای عامل خطی تکراری $(ax+b)^n$ باشد
مستخرج این عامل مربع سه های فرعی

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

از تجربه سه خواص است که $A_1, A_2, \dots, A_n$ اعداد حقیقی اند و نه
بدست آوریم.

$$\int \frac{x^2-3x-4}{x^2-2x+1} dx$$

مثال

$$\frac{x^2-3x-4}{x^2-2x+1} = 1 - \frac{x+4}{x^2-2x+1}$$

$$\begin{array}{l} A \overline{) B} \\ \underline{c} \\ D \end{array} \quad \frac{A}{B} = c + \frac{D}{B}$$

$$\int \frac{x^2-3x-4}{x^2-2x+1} = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x+4}{(x-1)^2}$$

موضوع

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

بجانب جوابه اشتغال در رابطه آورده.

$$\int \frac{x+8}{x^2-2x+1}$$

$$\frac{x+8}{x^2-2x+1} = \frac{x+8}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$$

$$Ax-A+B = x+8$$

$$\boxed{A=1}$$

$$-A+B=8 \Rightarrow -1+B=8$$

$$B=8+1$$

$$\boxed{B=9}$$

$$\frac{x+8}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{9}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{x+8}{x^2-2x+1} = \int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{(1)} dx + 9 \int \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{(2)} dx$$

اشغال ① و ② را در می بینیم و تغییر متغیر

* نکته سوم: اگر $q(x)$ دارای درجه دوم متغیر x^2+ax+b باشد، می‌توانیم آن را به صورت $\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$ بنویسیم. این متغیر را می‌توانیم به دو روش مختلف به دو صورت $\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$ و $\frac{Cx+D}{x^2+ax+b}$ بنویسیم. در این روش، A و B اعداد حقیقی اند و C و D اعداد حقیقی اند.

$$\int \frac{(x^3-x)dx}{x^4+x^2+2}$$

$$\frac{x^3-x}{(x^4+x^2+2)} = \frac{x^3-x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

$$Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D = x^3 - x$$

$$(C+A)x^3 + (B+D)x^2 + (A+2C)x + B+2D = x^3 - x$$

$$\begin{cases} C+A=1 \\ B+D=0 \\ A+2C=-1 \\ B+2D=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A=1 \\ B=0 \\ C=-1 \\ D=0 \end{matrix}$$

$$\int \frac{x^r - x}{x^r + rx^{r+1}} = \int \frac{rx}{x^{r+1}} dx + \int \frac{-rx}{x^{r+1}} dx$$

(*) حالت دوم: $q(x)$ دارای یک درجه دوم نرای $(x^2+ax+b)^m$

$$\frac{A_1x + B_1}{x^r + ax + b} + \frac{A_2x + B_2}{(x^r + ax + b)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(x^r + ax + b)^m}$$

داریم که A_i و B_i عدد حقیقی است که μ آن را بدست آوریم.

: Jē

$$\int \frac{dx}{x(x^r+1)^r}$$

$$\frac{1}{x(x^r+1)^r} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^r+1} + \frac{Dx+E}{(x^r+1)^r}$$

$$A(x^r+1)^r + (Bx+C)x(x^r+1) + (Dx+E)x = 1$$

OK 4A

$$Ax'' + \gamma Ax' + A \leq Bx' + Bx'' + Cx'' + Cx + Dx + Ex = 1$$

$$(A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=0 \\ A=1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \\ D=-1 \\ E=0 \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x}{x^2+1} dx + \int \frac{-x}{(x^2+1)^2} dx$$

① ② ③

استدلال های ①، ②، ③، از طریق تغییر متغیر

نکته ①
آرۀ تفکرات استدلال اول تکراری است (از این نوع) از متغیر x به u می توان به تغییر متغیر
 $x = u^2$ سه دره کرد که در آن u کوچکترین مقرب مثبت x موجود که (بی) مبرور در
استدلال می باشد.

مثال.

$$\int \frac{u^2 dx}{1 + \sqrt{x^3}} = \int \frac{(x^{\frac{1}{2}}) dx}{1 + x^{\frac{3}{2}}}$$

$$u = x$$

$$x = z^4$$

$$dx = 4z^3 dz$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{4}} dx}{1+x^{\frac{5}{4}}} = \int \frac{(z^4)^{\frac{1}{4}} 4z^3 dz}{1+(z^4)^{\frac{5}{4}}} = \int \frac{z^4 4z^3 dz}{1+z^5}$$

$$= 4 \int \frac{z^7 dz}{z^5 + 1} = 4 \int \left(z^2 - \frac{z^2}{z^5 + 1} \right) dz$$

$$= 4 \int z^2 dz - 4 \int \frac{z^2}{z^5 + 1} dz$$

①

②

که انتگرال ① و ② را به دست می آوریم. انتگرال ① به دستر انتگرال گیری و انتگرال ② به تغییر متغیر و به جای z مقدار $x^{\frac{1}{4}}$ را قرار می دهیم.

نکته ②
از جمع انتگرال سه بد توان می گیری از عبارت $(ax+b)$ به سه توان
به تغییر متغیر $ax+b = z^n$ که در آن n که جمله x به توان n است
مخرج توان است.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}} = \int \frac{x dx}{(2x+1)^{\frac{3}{4}}}$$

$$y^{2x+1} = z^2 \quad n=2$$

$$y^2 dz = y dx \Rightarrow dx = z dz$$

$$y^{2x+1} = z^2 \Rightarrow x = \frac{z^2 - 1}{2}$$

$$\int \frac{x dx}{(y^{2x+1})^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\frac{z^2 - 1}{2} z dz}{(y(\frac{z^2 - 1}{2}) + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{A}{B} = C + \frac{D}{B}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(z^2 - 1) z dz}{z^3} = \frac{1}{2} \int \frac{(z^2 - 1) dz}{z^2} = \frac{1}{2} \left[\int (1 - \frac{1}{z^2}) dz \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int dz - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2z} + C$$

و در نهایت $z = (y^{2x+1})^{\frac{1}{2}}$ را به دست می آوریم

انتگرال های بی متناهی:

انتگرال تابع های مثلثی، از این به بعد بدون استفاده از روش فریب به فریب به حساب می آید.

$$\textcircled{1} \text{ محاسبه } \int \cos^n x dx \text{ و } \int \sin^n x dx$$

روش اول: اگر n فرد باشد، داریم $(\int \sin^n x dx)$

$$\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$$

و سپس با استفاده از این تغییر متغیر $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^{n-1} x$$

$\cos x$ و $\sin x$ را به روش تغییر متغیر $u = \cos x$ و $du = -\sin x dx$ تبدیل می کنیم

$$\cos^n x, \cos^{n-1} x \cdot \cos x$$

وہ اس سے کہ ان سے

we) $1; \cos^{n-1} x \cdot \sin^r x + \cos^r x = 1$

$\sin x$ ج نوسم وانبدال رابروس تغییر متغیر $u = \sin x$ $\int du \cos x dx$

فی لیم

حالت دوم: اگر تعدادی زوج به سه در این صورت از مقدار هفتی بر است ده می بینیم

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \& \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

∴ D.E

$$\int \sin^8 x \, dx = \int \sin^6 x \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x + \cos^4 x) \sin x dx$$

$$\frac{d}{dx} (\sin^r x) = r \sin^{r-1} x \cos x$$

$$\Rightarrow \int (1 - 4u' + u'') du = - \left[u - \frac{4}{2}u' + \frac{1}{2}u'' \right] + C \quad u = \cos x$$

$$du = -\sin x dx$$

$$= -u + \frac{r}{r} u^r - \frac{1}{0} u^0 + c$$

$$= -\cos x + \frac{1}{\mu} \cos^{\mu} x - \frac{1}{\delta} \cos^{\delta} x + C$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \int \cos 2x dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \cos 2x dx$$

u = 2x

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{1}{2} \int \cos u du$$

$$= \frac{1}{2} \sin u$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int \cos^2 x dx$$

$$= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{2}{4} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{4} \int dx = \frac{1}{4} x$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\textcircled{1} \frac{1}{r} \int \cos rx \, dx =$$

$$u = rx \\ du = r \, dx$$

$$\frac{1}{r} \int \cos u \frac{du}{r} = \frac{1}{r} \int \cos u$$

$$\frac{du}{r} = dx$$

$$= \frac{1}{r} \sin u = \frac{1}{r} \sin rx$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{r} \int \cos^2 rx \, dx = \frac{1}{r} \int \frac{1 + \cos 2rx}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{r} \int 1 + \cos 2rx \, dx = \frac{1}{r} \int 1 \, dx + \frac{1}{r} \int \cos 2rx \, dx$$

$$= \frac{1}{r} x + \left(\frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{2} \sin 2rx\right)$$

$$= \frac{1}{r} x + \frac{1}{2r} \sin 2rx$$

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$$

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx \text{ when } \textcircled{2}$$

if n is odd, we can take one $\cos x$ and convert the rest to $\sin$ using $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

توابع زوج و فرد: $\sin^n x$ و $\cos^n x$

$$\sin^n x \cos^n x = \sin^n x \cos^{n-1} x \cos x$$

مربع استعاره: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

در نوسان: $\sin x$ و $\cos x$ را به $\sin x$ و $\cos x$ تبدیل کنید

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{4} \int 1 dx = \frac{1}{4} x$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int 1 dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4x \right] =$$

$$= \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$\begin{aligned} \int \cos 4x dx \\ u = 4x \\ du = 4 dx \\ \frac{du}{4} = dx \end{aligned}$$

$$\int \cos u \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$$

۲۴

Subject: _____

Year _____ Month _____ Date _____ ()

فعل ۵

فعل ۷ ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵

فعل ۱۱ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵

فعل ۱۱ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵

اینکه در هر یک
از این موارد
فعل ۵

۷ و ۸ و ۹ و ۱۰
۱۱ و ۱۲

۲۵۰

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$\int \sin^6 x \cos^5 x dx = \int \sin^6 x \cos^4 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$$= \int \sin^6 x \cos x dx - \int \sin^8 x \cos x dx = \int (\sin^6 x - \sin^8 x) \cos x dx$$

$$= \int (u^3 - u^4) du = \int u^3 du - \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

استفاده از فرمول انتگرال گیری

$$\textcircled{1} \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\textcircled{2} \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sec x = \frac{1}{\cos x} \\ \csc x = \frac{1}{\sin x} \end{array} \right.$$

$$\int \tan^n x \sec^m x dx \text{ و } \sec^n x \text{ و } \csc^n x$$

استفاده از فرمول انتگرال گیری

$$\text{برای } \sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

استفاده از فرمول انتگرال گیری و فرمول $\sec^{n-2} x$ و $\tan x$

$$\int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx \text{ و } u = \tan x$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

صفت دوم: اگر m فرد و n زوج داریم

$$\tan^n x \sec^m x = \tan^{n-1} x \sec^{m-1} x \sec x \tan x$$

فصلنامه از رابطه $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ صفت $\tan^{n+1}$ را به

$\sec x$ و $\tan x$ تبدیل می‌کنیم و $\sec x$ را به $\tan x$ تبدیل می‌کنیم

انتقال را به $\tan x$ می‌کنیم

صفت سوم: اگر m فرد و n زوج و $\sec x$ را به $\tan x$ تبدیل می‌کنیم

$$\int \tan^3 x \sec^4 x dx$$

حل

$$\int \tan^3 x \sec^4 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x dx$$

صفت اول:

$$= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx$$

$$u = \tan x \\ du = \sec^2 x dx$$

$$= \int (u^2 + u^0) du = \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{1} u + C$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{1} \tan x + C$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{1} \tan x + C$$

✓✓✓

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\int \tan^r x \sec^e x dx = \int \tan^r x \sec^r x dx (\tan x \sec x) \quad \text{مات دوم}$$

$$= \int (\sec^r x - 1) \sec^r x (\tan x \sec x dx)$$

$$= \int \sec^r x - \sec^r x (\tan x \sec x dx)$$

$$= \int (u^0 - u^r) du = \frac{1}{1} u^1 - \frac{1}{r+1} u^{r+1} + C = \frac{1}{1} \sec^1 x + \frac{1}{r+1} \sec^{r+1} x$$

این جواب به جواب قبلی نیست ؟ است

④ محاسبه $\int \sin mx \cos nx dx$ ، به روشی آن

رای محاسبه این انتگرال از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم

$$① \sin u \cos v = \frac{1}{2} (\sin(u+v) + \sin(u-v))$$

$$② \cos u \sin v = \frac{1}{2} (\sin(u+v) - \sin(u-v))$$

$$③ \cos u \cos v = \frac{1}{2} (\cos(u+v) + \cos(u-v))$$

$$④ \sin u \sin v = \frac{1}{2} (\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

$$\int \cos \frac{\Delta x}{u} \cos \frac{r x}{v} = \frac{1}{2} \int (\cos nx + \cos rx) dx$$

جدید

$$= \frac{1}{2} \int \cos nx dx + \frac{1}{2} \int \cos rx dx$$

①

②



Subject:

Year.

Month.

Date.

()

$$① \frac{1}{r} \int \cos nx \, dx$$

$$u = rx$$

$$du = r \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \int \cos u \frac{du}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \int \cos u \, du$$

$$\frac{du}{r} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \sin u \Rightarrow \frac{1}{r^2} \sin rx$$

$$② \frac{1}{r} \int \cos rx \, dx$$

$$u = rx$$

$$du = r \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \int \cos u \frac{du}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{r} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \int \cos u \Rightarrow \frac{1}{r} \sin rx$$

$$\int \cos x \cos rx \, dx = \frac{1}{r^2} \sin rx + \frac{1}{r} \sin rx + C$$

③ جدول قس

② هم

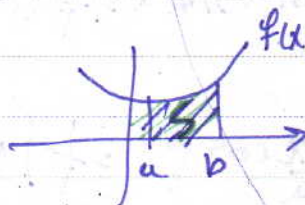
کاربردی است

① هم

① هم

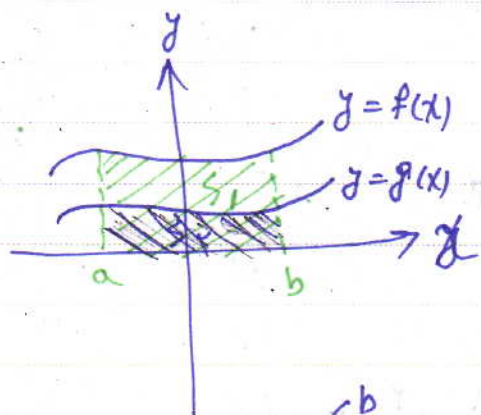
استدلال منطقی نیست و منطقی نیست زیرا مقدار است

$$S = \int_a^b f(x) \, dx$$



برای بدست آوردن مساحت ناحیه محدود به نمودار $y = f(x)$ و $y = g(x)$

که هر دو شکل زیر است



$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

به نظر می آید برای بدست آوردن مساحت بین دو نمودار $y = f(x)$ و $y = g(x)$ اگر دانسته باشیم به ازای هر x که $a < x < b$ باشد $f(x) \geq g(x)$ باشد مساحت S مساحت بین دو نمودار در این محدوده $[a, b]$ برابر است با

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

مثال ۱: مساحت ناحیه محدود به نمودارهای

$$f(x) = y = (\pi/4) + x^2 = f(x), \quad y = 1 - x^2 = g(x) = g(x)$$

دارد از $[-1, 1]$ بدست آوریم

$$x = 0 \quad -1 < 0 < 1$$

$$f(0) = \pi/4$$

$$g(0) = 1$$

$$f(0) < g(0)$$

Ex 1

Subject:

Year.

Month.

Date.

()

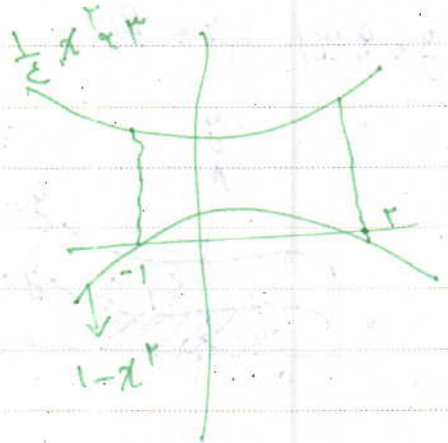
$$S = \int_{-1}^r [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_{-1}^r \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + 3 \right) - (1 - x^2) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^r \left(\frac{1}{2}x^2 + x^2 + 2 \right) dx = \int_{-1}^r \left(\frac{3}{2}x^2 + 2 \right) dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_{-1}^r x^2 dx + \int_{-1}^r 2 dx = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}x^3 \right) \right]_{-1}^r + [2x]_{-1}^r$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}(r^3) - \frac{1}{3}(-1)^3 \right) + [2(r - (-1))] = \frac{11r}{2} + 2$$



المساحة المطلوبة هي المساحة الواقعة بين المنحنيين $f(x)$ و $g(x)$ من $x = -1$ إلى $x = r$.
 حيث $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ و $g(x) = 1 - x^2$ و $x = -1$ و $x = r$ هما نقطتا التقاطع.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

المساحة المطلوبة هي المساحة الواقعة بين المنحنيين $f(x)$ و $g(x)$ من $x = -2$ إلى $x = 1$.

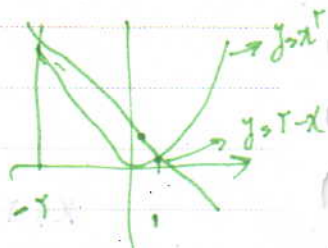
$$x \leq 1 \Rightarrow y \leq 1 \quad , \quad x \geq -2 \Rightarrow y \leq 4$$

(1, 1) (-2, 4)

$$x > 0 \quad -r < x < 1$$

$$f(x) = 0 \quad g(x) = r \quad g(x) > f(x)$$

$$\int_{-r}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-r}^1 (r - x) - x^r dx$$



$$= \left[rx - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{r+1}x^{r+1} \right]_{-r}^1 = \frac{9}{r}$$

③ $\frac{9}{r}$

• $\frac{9}{r}$ is the area between the curves $y = (x-r)^r$ and $y = x^r$ for $x \in [0, 1]$.

$$\begin{cases} y - x^r = 0 \\ y - x^r - \epsilon(x - \epsilon) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x^r = 0 \\ y - x^r + \epsilon x - \epsilon = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon x - \epsilon = 0$$

$$\epsilon x = \epsilon$$

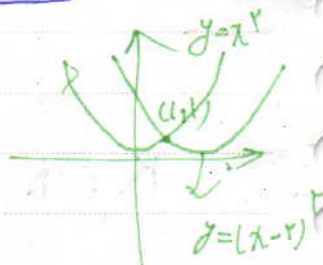
$$\boxed{x \leq 1}$$

$$\boxed{y \leq 1}$$

• $\frac{9}{r}$ is the area between the curves $y = (x-r)^r$ and $y = x^r$ for $x \in [0, 1]$.

$$[0, 1], [1, 3]$$

• $\frac{9}{r}$ is the area between the curves $y = (x-r)^r$ and $y = x^r$ for $x \in [0, 1]$.



$$x > \frac{1}{r} \quad 0 < \frac{1}{r} < 1$$

$$f\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r} - r\right)^r = \left(-\frac{r-1}{r}\right)^r = \frac{9}{r}$$

$$\frac{9}{r} > \frac{1}{r}$$

$$g\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)^r = \frac{1}{r}$$

$$f(x) > g(x)$$

Ex 2

Subject:

Year.

Month.

Date.

()

$$R_1 = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 ((x-r)^2 - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2rx + r^2 - x^2) dx = \int_0^1 (-2rx + r^2) dx = [-rx^2 + r^2x]_0^1$$

$$= r$$

$r \in [1, 3]$

$0, 0, 0$

$x < r$

$1 < r < 3$

$f(r) = 0$

$g(r) = c$

$c > 0$

$g(r) > f(r)$

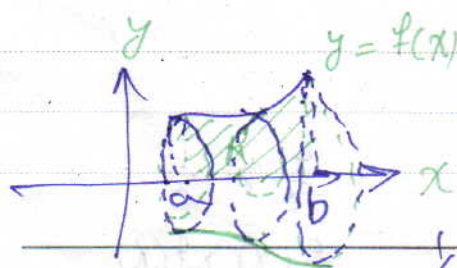
$g(x) > f(x)$

$$R_2 = \int_1^r x^2 - (x^2 - r)^2 dx = \int_1^r x^2 - (x^2 - 2rx + r^2) dx$$

$$= \int_1^r (x^2 - x^2 + 2rx - r^2) dx = \int_1^r (2rx - r^2) dx = [rx^2 - r^2x]_1^r$$

$$= \left(r \cdot \frac{r^2}{2} - r^2 \cdot r \right) - \left(r \cdot \frac{1^2}{2} - r^2 \cdot 1 \right) = r$$

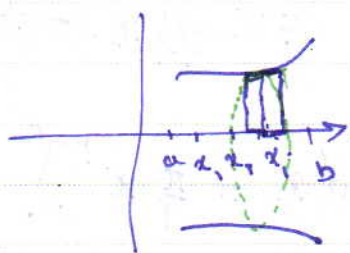
$$R = R_1 + R_2 = r + r = 2r$$



مساحت دو ناحیه (2)

مساحت دو ناحیه، $y = f(x)$ و $y = g(x)$

جسم دوار کو ٹیم و هدف بدست آوردن حجم این جسم می باشد.



مساحت مستطیل Δx را قبول می‌کنیم و عرض آن را $f(x_i)$ می‌گیریم.

آنچه که حاصل می‌شود استوانه است که حجم آن برابر است با

$$(\pi R^2) h$$

$$\pi [f(x_i)]^2 \Delta x$$

پس برای این حجم جسم دوار برابر است با مجموع حجم این استوانه‌های حاصل از مستطیل‌ها پس داریم

$$\sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x$$

بنابراین می‌توانیم حجم جسم دوار را برابر است با

$$V_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x$$

پس با تعریف انتگرال می‌توانیم بنویسیم

$$V_s = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

حجم جسم دوار

حجم بدست آمده از دایره

تابع $f(x)$ هدف محور x

نقطه $f(x)$ در دایره y و x در محور x

حجم بدست آمده از دایره $f(x)$ و x در محور x

مسئله

Subject:

Year. Month. Date. ()

مثال: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه زیر نمودار $y = \sqrt{x}$ از $x=0$ تا $x=4$ حول محور x را بیابید.

$$V = \int_0^4 \pi [\sqrt{x}]^2 dx = \int_0^4 \pi x dx = \left[\frac{\pi}{2} x^2 \right]_0^4 = \frac{\pi}{2} (16) = 8\pi$$

مثال: محاسبه حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین $x^2 - 4$ و $x^2 + 4$ در بازه $[-1, 1]$ حول محور x را بیابید.

$$V = \int_{-1}^1 \pi (x^2 + 4)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 + 8x^2 + 16) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{8}{3} x^3 + 16x \right]_{-1}^1 = \frac{128}{3} \pi$$

نکته: اگر نمودار $y = f(x)$ را حول محور y در بازه $[c, d]$ بچرخانیم، آنگاه برای محاسبه حجم جسم حاصل از دوران، باید از فرمول زیر استفاده کنیم.

$$V = \int_c^d \pi [g(y)]^2 dy$$

مسئله: یک مخروط به مقدار $y = x^3$ و $y = 1$ و $y = n$ اصل مخروط دوران

دارد این حجم جسم (دارای مثلث را بنویسید)

$$y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y} = g(y)$$

$$V = \int \pi (g(y))^2 dy = \int \pi (\sqrt[3]{y})^2 dy$$

$$= \int \pi (y^{\frac{2}{3}}) dy = \pi \int y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{\pi}{\frac{5}{3}} y^{\frac{5}{3}} \Big|_1^n = \frac{4\pi}{5}$$

روش دیگری

از رابطه $f(x) \leq g(x)$ است که در مخروط بین $f(x)$ و $g(x)$ دارد

فصل $[a, b]$ مثل مخروط (دارای مثلث) حجم جسم (دارای مثلث) ب

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \int_a^b (g(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

این روش با روش دیگری نوشته

مسئله: یک مخروط به مقدار $y = x^3$ و $y = 1$ و $y = n$ اصل مخروط

$[a, b]$ فصل مخروط (دارای مثلث) حجم جسم (دارای مثلث) ب

ع 4

Subject:

Year.

Month.

Date.

()

$$\begin{cases} y = x^r \\ y = \delta x \end{cases} \Rightarrow x^r = \delta x \Rightarrow x^r = \delta x s.$$

$$f(x) = 1$$

$$g(x) = \delta$$

$$x(x-\delta)s.$$

$$\begin{matrix} \boxed{x s.} \\ \boxed{x = \delta} \end{matrix}$$

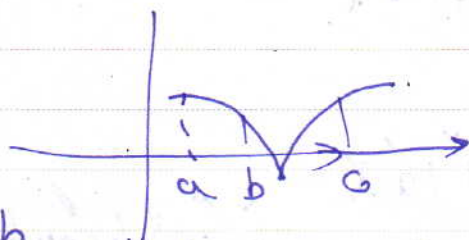
ابتداءً از s
در $x = \delta$

$$V = \pi \int_0^r ((g(x))^r - (f(x))^r) dx$$

$$= \pi \int_0^r ((\delta x)^r - x^r) dx$$

$$= \pi \int_0^r (\delta^r x^r - x^r) dx = \pi \left[\frac{\delta^r}{r+1} x^{r+1} - \frac{1}{r+1} x^{r+1} \right]_0^r = \frac{\pi}{r+1} (\delta^{r+1} - 1)$$

نقشه‌های زیر را در نظر بگیرید. $f(x)$ و $g(x)$ در $[a, b]$ تعریف شده‌اند. $f(x)$ و $g(x)$ در $[a, b]$ هم‌پایه هستند. $f(x)$ و $g(x)$ در $[a, b]$ هم‌پایه هستند.



نقشه‌های زیر را در نظر بگیرید. $f(x)$ و $g(x)$ در $[a, b]$ تعریف شده‌اند. $f(x)$ و $g(x)$ در $[a, b]$ هم‌پایه هستند. $f(x)$ و $g(x)$ در $[a, b]$ هم‌پایه هستند.

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$