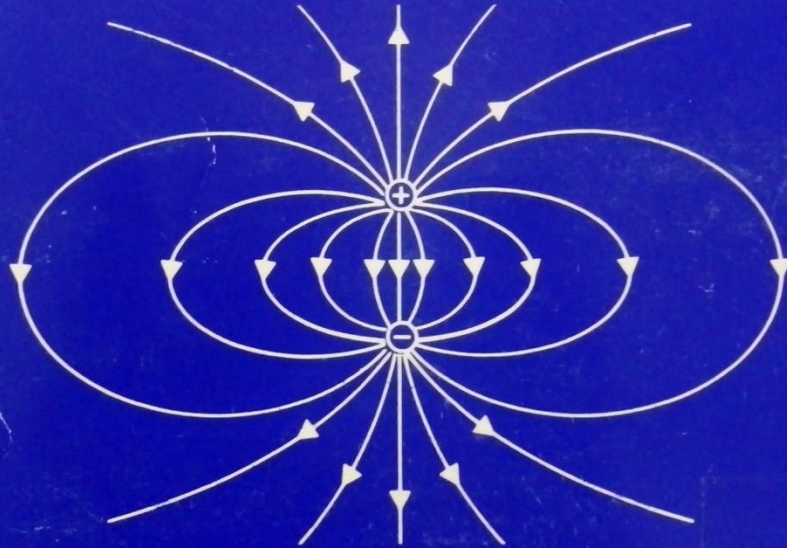


چاپ چہارم

مبانی الکترومغناطیس



دکتر احمد صفایی

فهرست مطالب

فصل اول : آنالیز برداری

۲	۱-۱) قواعد ساده برداری
۲	■ تساوی بردارها
۲	■ جمع بردارها
۲	■ ضرب بردار در اسکالر
۳	■ ضرب داخلی دو بردار
۳	■ ضرب خارجی دو بردار
۴	■ بردار واحد
۴	۲-۱) دستگاههای مختصات
۶	■ دستگاه مختصات مستطیلی
۶	■ دستگاه مختصات استوانه‌ای
۷	■ دستگاه مختصات کروی
۸	۳-۱) مؤلفه‌های بردار
۸	■ بردارهای واحد
۱۲	■ بردار مکان
۱۳	■ تبدیل بردارها در دستگاههای مختصات مختلف

۱۷	انتگرالهای خط ، سطح و حجم
۱۷	■ عناصر طول ، سطح و حجم
۲۰	■ انتگرال خط
۲۳	■ انتگرال سطح
۲۸	■ انتگرال حجم
۲۹	۵-۱ مشتقات میدانهای اسکالر و برداری
۲۹	■ گرادیان
۳۳	■ دیورژانس
۳۹	■ کرل
۴۷	■ لاپلاسین
۴۸	■ قضیه هلمولتز
۵۱	خلاصه فصل
۵۲	مسائل

فصل دوم : میدان الکتریکی ساکن در خلاء

۵۹	۱-۲ قانون کولمب
۵۹	۲-۲ شدت میدان الکتریکی
۶۱	■ شدت میدان الکتریکی چندین بار نقطه‌ای
۶۲	■ دوقطبی الکتریکی
۶۴	■ میدان الکتریکی توزیعهای پیوسته خطی
۶۸	■ میدان الکتریکی توزیعهای پیوسته سطحی
۷۱	■ میدان الکتریکی توزیعهای پیوسته حجمی
۷۴	۳-۲ خطوط میدان
۷۶	۴-۲ قانون گوس
۸۵	■ شکل نقطه‌ای قانون گوس
۸۷	۵-۲ پتانسیل الکتریکی
۸۸	■ پتانسیل بار نقطه‌ای
۹۰	■ پتانسیل چندین بار نقطه‌ای
۹۰	■ پتانسیل برای توزیعهای پیوسته
۹۶	۶-۲ معادله کرل ماکسول برای میدان الکتریکی ساکن

۹۷	پتانسیل و شدت میدان الکتریکی
۱۰۰	خلاصه فصل
۱۰۱	مسائل

فصل سوم : میدان الکتریکی ساکن در اجسام و انرژی الکتریکی

۱۱۰	۱-۳ هدایت الکتریکی در ماده و دسته‌بندی اجسام
۱۱۳	۲-۳ جریان الکتریکی و قانون اهم
۱۱۷	۳-۳ مقاومت الکتریکی
۱۲۰	۴-۳ اصل بقای بار و معادله پیوستگی
۱۲۱	۵-۳ بار آزاد در اجسام هادی و نحوه توزیع آن
۱۲۳	۶-۳ میدان الکتریکی در حضور اجسام هادی و شرایط مرزی
۱۲۸	۷-۳ اجسام عایق در میدان الکتریکی ساکن
۱۴۰	۸-۳ جریان پلاریزاسیون
۱۴۱	۹-۳ شرایط مرزی در سطح مشترک دو عایق
۱۴۳	۱۰-۳ ظرفیت
۱۴۷	۱۱-۳ میدان الکتریکی در اجسام نیمه هادی
۱۴۷	۱۲-۳ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی
۱۵۳	۱۳-۳ نیرو و گشتاور در سیستمهای الکتریکی ساکن
۱۵۶	خلاصه فصل
۱۵۷	مسائل

فصل چهارم : معادلات پواسون و لاپلاس و روشهای حل آنها

۱۶۸	۱-۴ معادلات پواسون و لاپلاس
۱۶۹	۲-۴ قضیه یگانگی جواب
۱۷۰	۳-۴ معادله لاپلاس و حل آن در دستگاههای مختلف مختصات
۱۷۰	■ حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات مستطیلی
۱۷۹	■ حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای

۱۸۷	■ حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کروی
۱۹۳	۴-۴) محاسبه مقاومت به کمک حل معادله لاپلاس
۱۹۳	■ مقاومت یک میله مستقیم
۱۹۶	■ مقاومت یک میله خمیده
۱۹۷	۵-۴) حل معادله لاپلاس به روش عددی
۲۰۰	۶-۴) معادله پواسون
۲۰۲	۷-۴) روش تصویر
۲۰۲	■ بار نقطه‌ای در مقابل صفحه هادی بینهایت
۲۰۴	■ بار نقطه‌ای در مقابل کره هادی
۲۰۶	خلاصه فصل
۲۰۷	مسائل

فصل پنجم: میدان مغناطیسی ساکن در خلاء

۲۱۶	۱-۵) نیروی مغناطیسی بین دو مدار جریان
۲۱۸	۲-۵) قانون بیو-ساوار
۲۲۱	۳-۵) نیروی اعمال شده بر بار الکتریکی متحرک در میدان مغناطیسی
۲۳۱	۴-۵) قانون مداری آمپر
۲۴۲	۵-۵) شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر
۲۴۴	۶-۵) پتانسیل مغناطیسی برداری
۲۵۲	۷-۵) معادله دیورژانس ماکسول برای میدان مغناطیسی ساکن
۲۵۵	خلاصه فصل
۲۵۷	مسائل

فصل ششم: میدان مغناطیسی ساکن در اجسام و انرژی مغناطیسی

۲۶۶	۱-۶) خواص مغناطیسی اجسام و دسته‌بندی آنها
۲۶۷	■ دیامغناطیس
۲۶۸	■ پارامغناطیس
۲۶۹	■ فرومغناطیس

۲۷۱	ضدفرومغناطیس و فری مغناطیس
۲۷۲	۲-۶) میدان مغناطیسی در حضور اجسام
۲۸۲	۳-۶) شرایط مرزی
۲۸۵	۴-۶) ضرایب خودالقایی و القای متقابل
۲۹۶	۵-۶) مدارهای مغناطیسی
۳-۲	۶-۶) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی
۳۱۵	۷-۶) هیستریزیس
۳۱۳	۸-۶) محاسبه میدان مغناطیسی به کمک پتانسیل اسکالر
۳۱۷	۹-۶) نیرو و گشتاور مغناطیسی
۳۱۸	■ نیرو و گشتاور بر حسب انرژی مغناطیسی ذخیره شده
۳۲۲	۱۰-۶) خلاصه ای از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن
۳۲۵	خلاصه فصل
۳۲۷	مسائل

فصل هفتم: میدانهای متغیر با زمان

۳۳۶	۱-۷) قانون فاراده
۳۴۰	۲-۷) نیروهای محرکه ترانسفورماتوری و حرکتی
۳۴۶	۳-۷) معادلات ماکسول
۳۵۰	■ شکل انتگرالی معادلات ماکسول
۳۵۲	۴-۷) شرایط مرزی
۳۵۷	۵-۷) توابع پتانسیل و پاسخ آنها
۳۶۱	۶-۷) میدانهای شبه ساکن
۳۶۲	۷-۷) میدانهای متغیر با زمان سینوسی
۳۶۶	خلاصه فصل
۳۶۸	مسائل
۳۷۵	پاسخ برخی مسائل
۳۸۵	مراجع

آنالیز برداری

در مطالعه پدیده‌های فیزیکی با دو نوع کمیت سر و کار داریم. یکی کمیت‌های اسکالر^۱ که فقط با اندازه مشخص می‌شوند مانند جرم، انرژی، بار الکتریکی و اختلاف پتانسیل. دیگر کمیت‌های برداری که مشخص کردن آنها مستلزم اندازه و جهت هر دو می‌باشد از قبیل نیرو، شتاب، شدت میدان الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی. یک بردار با پاره خطی که طول آن معرف اندازه کمیت بوده و در انتهای آن علامت پیکان بکار رفته باشد نمایش داده می‌شود. به منظور متمایز نمودن کمیت‌های برداری از کمیت‌های اسکالر، از خط تیره در بالای حروف استفاده می‌کنیم. بعنوان مثال بردار نیرو را با \vec{F} و بردار شدت میدان الکتریکی را با \vec{E} نشان داده، در حالی که اگر فقط اندازه‌های بردارهای نیرو و شدت میدان الکتریکی مورد نظر باشند می‌توان علامت F و E را به تنهایی بکار برد. اندازه بردار را ممکن است با استفاده از علامت قدر مطلق نیز نشان داد، مثلاً $|\vec{F}|$ یا F می‌باشد.

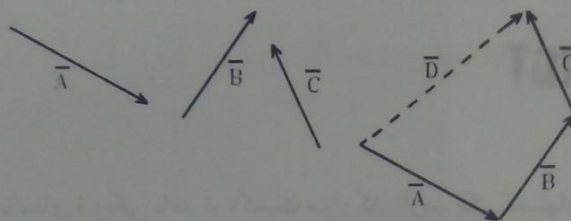
۱-۱) قواعد ساده برداری

■ تساوی بردارها

دو بردار را وقتی مساوی گویند که اندازه و جهشان یکی باشد. اگر $\vec{A} = -\vec{B}$ باشد، اندازه دو بردار \vec{A} و \vec{B} یکی بوده ولی مختلف‌الجهت هستند.

■ جمع بردارها

جمع چند بردار را می‌توان با استفاده از روش چند ضلعی انجام داد. در این روش از انتهای بردار اول برداری مساوی بردار دوم و از انتهای بردار دوم برداری مساوی بردار سوم و ... رسم می‌کنیم (بردارها را می‌توان به دلخواه شماره‌گذاری کرد). بردار حاصل جمع از وصل ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار بدست می‌آید. شکل (۱-۱) نحوه جمع بردارها را نشان می‌دهد. در این شکل $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ است.



شکل (۱-۱) جمع بردارها به روش چندضلعی

می‌توان به سادگی نشان داد که در جمع بردارها قوانین جابجایی پذیری^۱ و شرکت پذیری^۲ صادق هستند. روابط زیر به ترتیب قوانین مذکور را نشان می‌دهند:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (1-1)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \quad (2-1)$$

■ ضرب بردار در اسکالر

اگر بردار \vec{A} را در مقدار اسکالر m ضرب کنیم، اندازه بردار \vec{A} ، m برابر شده و بر حسب اینکه m

مثبت یا منفی باشد جهت بردار حاصل ($m\vec{A}$) همانند یا عکس جهت بردار \vec{A} خواهد بود.

■ ضرب داخلی دو بردار

نتیجه ضرب داخلی یا ضرب اسکالر دو بردار \vec{A} و \vec{B} یک کمیت اسکالر است که اندازه آن برابر حاصل ضرب اندازه‌های \vec{A} و \vec{B} و کسینوس زاویه بین آنها می‌باشد. اگر θ زاویه کوچک‌تر بین دو بردار \vec{A} و \vec{B} باشد، ضرب داخلی آنها عبارت است از:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = AB \cos \theta \quad (3-1)$$

در ضرب داخلی بردارها قوانین جابجایی پذیری و توزیع پذیری^۱ صادق بوده ولی قانون شرکت پذیری صادق نمی‌باشد. یعنی:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (4-1)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (5-1)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) \neq (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (6-1)$$

■ ضرب خارجی دو بردار

نتیجه ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار \vec{A} و \vec{B} بردار دیگری مانند \vec{C} است که اندازه آن مساوی حاصل ضرب اندازه‌های \vec{A} و \vec{B} و سینوس زاویه بین آنها می‌باشد.

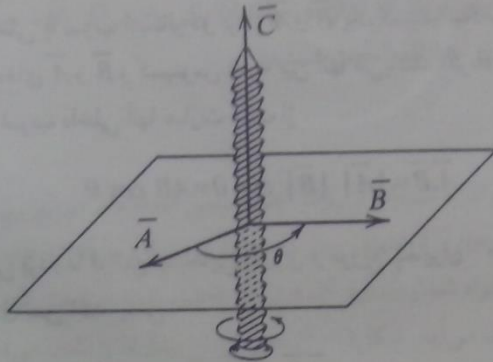
$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta = AB \sin \theta \quad (7-1)$$

جهت بردار \vec{C} در جهت پیشروی بیچ راست‌گردی است که در امتداد عمود بر صفحه حاوی بردارهای \vec{A} و \vec{B} و در جهت چرخش بردار \vec{A} به سمت بردار \vec{B} از طریق زاویه کوچک‌تر بین دو بردار چرخانیده شود. شکل (۳-۱) ضرب خارجی دو بردار را نشان می‌دهد. ضرب خارجی دو بردار با علامت « \times » مشخص می‌گردد، در حالی که ضرب داخلی دو بردار با علامت « \cdot » بیان می‌شود. در ضرب خارجی بردارها قوانین جابجایی پذیری و شرکت پذیری صادق نیستند ولی قانون توزیع پذیری صادق می‌باشد.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{B} \times \vec{A} \quad (8-1)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \quad (9-1)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \quad (10-1)$$



شکل (۲-۱) بردار \vec{C} عمود بر صفحه حاوی بردارهای \vec{A} و \vec{B}

■ بردار واحد

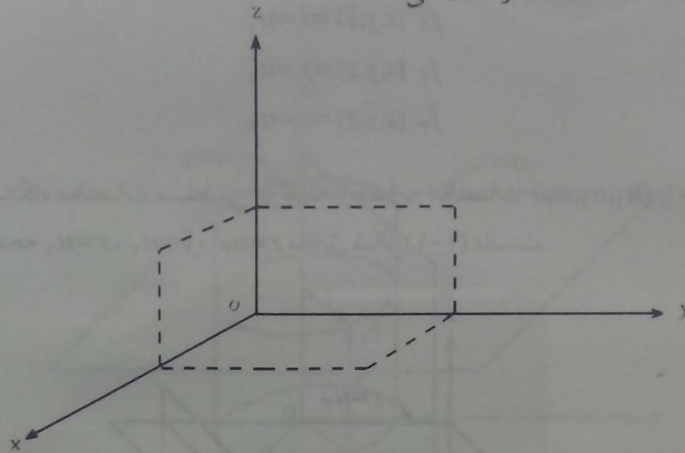
اگر بردار \vec{A} را بر اندازه آن $|\vec{A}|$ تقسیم کنیم، یا به عبارت دیگر بردار \vec{A} را در مقدار اسکالر $1/|\vec{A}|$ ضرب نماییم، برداری حاصل می‌شود که اندازه آن برابر واحد بوده و جهت آن با جهت بردار \vec{A} یکی است. چنین برداری را بردار واحد نامیده و به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad (11-1)$$

(۲-۱) دستگاههای مختصات

کمیت‌هایی که با آنها سر و کار داریم عموماً توابعی از زمان و مکان هستند. بعنوان مثال شدت میدان الکتریکی، که یک کمیت برداری است، وقتی از نقطه‌ای از فضا به نقطه دیگر برویم تغییر اندازه و جهت می‌دهد. لذا برای بیان تغییرات کمیت‌های فیزیکی نسبت به مکان باید به شیوه مناسبی نقاط فضا را مشخص کنیم. ابتدا مبنای مقایسه‌ای که نقاط فضا را بتوان نسبت به آن مشخص نمود تعیین می‌کنیم. برای این منظور سه صفحه دو به دو عمود بر هم را بعنوان صفحات مختصات در نظر می‌گیریم. این سه صفحه نقطه تلاقی مشترکی دارند که آن را مبدأ یا مرکز مختصات می‌نامیم. از تقاطع دو به دو صفحات سه خط مستقیم که همگی از مبدأ مختصات می‌گذرند ایجاد می‌شوند.

این خطوط را که دو به دو بر یکدیگر عمودند محورهای مختصات نامیده و با حروف x ، y و z مشخص می‌کنیم. جهت مثبت محورهای x و y را به دلخواه انتخاب نموده ولی جهت مثبت محور z را طوری در نظر می‌گیریم که مطابق پیشروی پیچ راستگردی باشد که در امتداد عمود بر صفحه حاوی محورهای x و y در جهت چرخش محور x به طرف محور y بچرخد. شکل (۳-۱) مبدأ، محورها و صفحات مختصات را نشان می‌دهد.



شکل (۳-۱) مبدأ، محورها و صفحات مختصات

حال نقطه دلخواهی را در فضا در نظر گرفته و فاصله آن را از صفحات yz ، xz و xy به ترتیب x ، y و z می‌نامیم. بطوریکه بعداً خواهیم دید x ، y و z همان مختصات مستطیلی^۱ نقطه مورد نظر هستند. مجموعه نقاطی که مختصاتشان در رابطه $f(x,y,z)=u$ صدق نماید تشکیل یک سطح را می‌دهند. حال سه سطح به معادلات

$$f_1(x,y,z)=u_1 \quad (12-1)$$

$$f_2(x,y,z)=u_2 \quad (13-1)$$

$$f_3(x,y,z)=u_3 \quad (14-1)$$

را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که دو به دو بر یکدیگر عمود باشند. آنگاه یک نقطه دلخواه از فضا را می‌توان محل تلاقی سه سطح مزبور به ازای مقادیر معین u_1 ، u_2 و u_3 دانست. پارامترهای u_1 ، u_2 و u_3 را مختصات منحنی الخط نقطه می‌نامند. بر حسب اینکه سطوح متعامد f_1 ، f_2 و f_3 را چگونه انتخاب کنیم دستگاههای مختصات مختلفی را می‌توان بوجود آورد. در اینجا فقط به مطالعه

دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی اکتفا می‌کنیم.

■ دستگاه مختصات مستطیلی

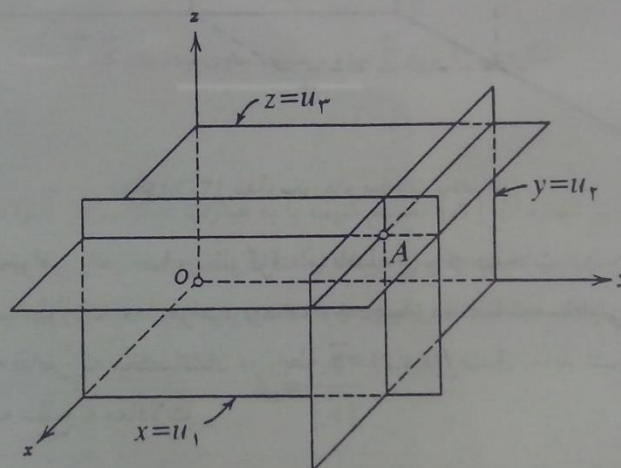
در دستگاه مختصات مستطیلی سطوح متعامد شامل سه صفحه به معادلات زیر می‌باشند:

$$f_1(x, y, z) = x = u_1 \quad (15-1)$$

$$f_2(x, y, z) = y = u_2 \quad (16-1)$$

$$f_3(x, y, z) = z = u_3 \quad (17-1)$$

بنابراین در دستگاه مختصات مستطیلی هر نقطه از فضا به مختصات (u_1, u_2, u_3) را می‌توان محل تلاقی سه صفحه $x = u_1$ ، $y = u_2$ و $z = u_3$ مطابق شکل (۴-۱) دانست.



شکل (۴-۱) سطوح متعامد در دستگاه مختصات مستطیلی

■ دستگاه مختصات استوانه‌ای

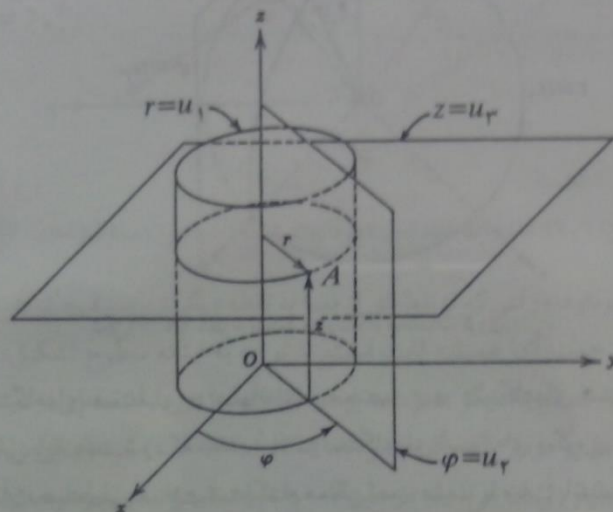
در دستگاه مختصات استوانه‌ای سه سطح عمود بر هم عبارتند از: ۱- یک سطح استوانه‌ای که محور آن بر محور z منطبق بوده و شعاع آن برابر r باشد. ۲- یک نیم‌صفحه که یال آن محور z بوده و با صفحه $y = 0$ (صفحه xz) زاویه φ بسازد. ۳- صفحه‌ای که روی آن z مقدار ثابتی باشد. بدیهی است که این صفحه بر محور z عمود می‌باشد. شکل (۵-۱) این سطوح را نشان می‌دهد. اگر نقطه A به مختصات $r = u_1$ ، $\varphi = u_2$ و $z = u_3$ را در نظر بگیریم، این نقطه از محل تلاقی سه سطح مذکور که

دارای معادلات زیر می‌باشند بدست خواهد آمد :

$$f_1(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{1/2} = r = u_1 \quad (18-1)$$

$$f_2(x,y,z) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \varphi = u_2 \quad (19-1)$$

$$f_3(x,y,z) = z = u_3 \quad (20-1)$$



شکل (5-1) سطوح متعامد در دستگاه مختصات استوانه‌ای

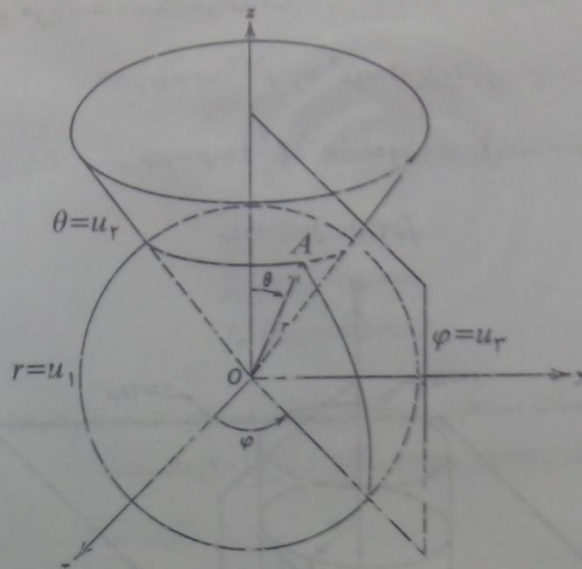
■ دستگاه مختصات کروی

در دستگاه مختصات کروی هر نقطه از فضا محل تلاقی سه سطح به شرح زیر می‌باشد :
 1- یک سطح کروی به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r .
 2- یک سطح مخروطی به رأس مبدأ مختصات و نیم زاویه θ و محوری منطبق بر محور z .
 3- یک نیم صفحه که یال آن محور z بوده و با صفحه $y=0$ زاویه φ بسازد. شکل (6-1) این سطوح را نشان می‌دهد. معادلات سطوح متعامد مذکور که محل تلاقی آنها نقطه A به مختصات $r = u_1$ ، $\theta = u_2$ و $\varphi = u_3$ را تشکیل دهد عبارتند از :

$$f_1(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r = u_1 \quad (21-1)$$

$$f_2(x,y,z) = \cos^{-1} \left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] = \theta = u_2 \quad (22-1)$$

$$f_3(x,y,z) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \varphi = u_3 \quad (23-1)$$



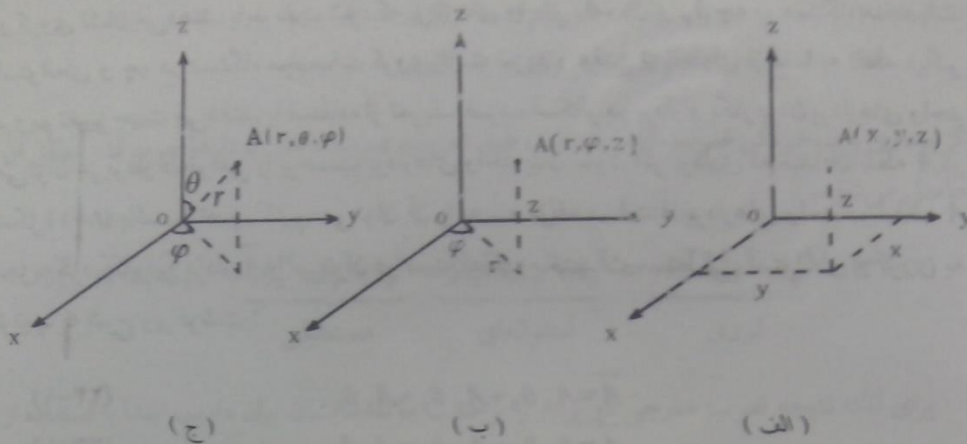
شکل (۶-۱) سطوح متعامد در دستگاه مختصات کروی

مختصه z در دستگاههای مستطیلی و استوانه‌ای و مختصه φ در دستگاههای استوانه‌ای و کروی یکسان هستند. ولی باید دقت شود که مختصه r در دستگاههای استوانه‌ای و کروی یکسان نیستند. در دستگاه مختصات مستطیلی x, y و z هر کدام ممکن است مثبت یا منفی باشند، در حالی که در دستگاه مختصات استوانه‌ای r همواره غیر منفی بوده و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ است و z ممکن است مثبت یا منفی باشد. بالاخره در دستگاه مختصات کروی $r \geq 0$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ می‌باشد. یادآوری می‌شود که مختصه φ در دستگاههای استوانه‌ای و کروی زاویه بین نیم صفحه $y=0$ و $x>0$ با نیم صفحه‌ای با یال محور z است که از نقطه مورد نظر بگذرد و در جهت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) اندازه‌گیری شود. بطور خلاصه نقطه A از فضا مطابق شکل (۷-۱) در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی نمایش داده می‌شود.

۳-۱) مؤلفه‌های بردار

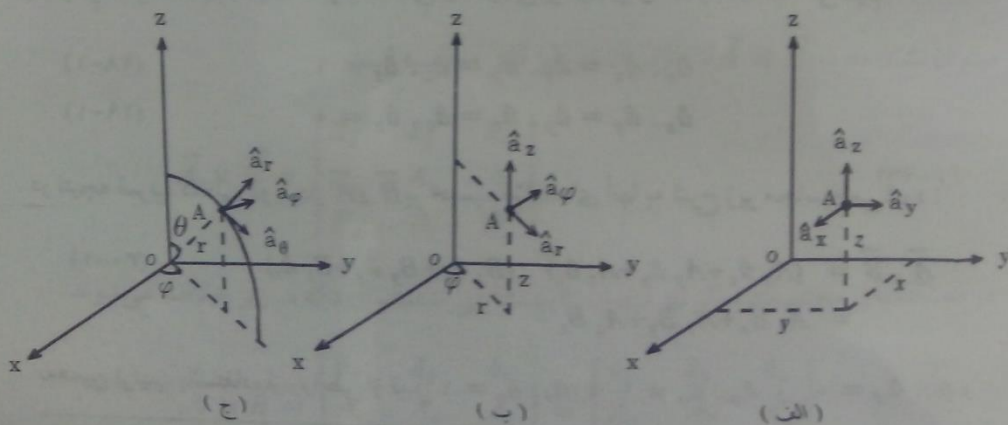
■ بردارهای واحد

در هر نقطه از فضا سه بردار واحد تعریف می‌کنیم. اندازه این بردارها همواره برابر واحد بوده و بر سطوح متعامد گذرنده از نقطه مورد نظر عمود می‌باشند. جهت این بردارها در جهت افزایش مختصات می‌باشد. در دستگاه مختصات مستطیلی بردارهای واحد به صورت \hat{a}_x ، \hat{a}_y و \hat{a}_z نوشته



شکل (۷-۱) مختصات نقطه A در دستگاههای (الف) مستطیلی (ب) استوانه‌ای (ج) کروی

برند. این بردارها، وقتی که از نقطه‌ای از فضا به نقطه دیگر برویم، هیچگونه تغییری نمی‌کنند یا تر بگوئیم جهت آنها همیشه ثابت است. با توجه به اینکه سطوح تشکیل دهنده یک دستگاه مختصات دو به دو بر یکدیگر عمودند، بردارهای واحد در هر نقطه‌ای و در هر نوع دستگاه مختصاتی نیز دو به دو بر یکدیگر عمودند. شکل (۸-۱-الف) بردارهای واحد را در دستگاه مختصات مستطیلی نشان می‌دهد. در دستگاه مختصات استوانه‌ای بردارهای واحد عبارت از \hat{a}_r ، \hat{a}_ϕ و \hat{a}_z هستند و بالاخره در دستگاه مختصات کروی این بردارها به صورت \hat{a}_r ، \hat{a}_θ و \hat{a}_ϕ نوشته



شکل (۸-۱) بردارهای واحد در دستگاههای مختصات (الف) مستطیلی (ب) استوانه‌ای (ج) کروی

می شوند. شکل‌های (۸-۱-ب) و (۸-۱-ج) بردارهای واحد را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی نشان می‌دهند. باید دقت شود که بردارهای واحد \hat{a}_r ، \hat{a}_θ و \hat{a}_ϕ چه در دستگاه مختصات استوانه‌ای و چه در دستگاه مختصات کروی ثابت نبوده و وقتی از نقطه‌ای از فضا به نقطه دیگر برویم تغییر جهت می‌دهند. با استفاده از تعریف ضرب اسکالر در بردار و بکار بردن بردارهای واحد می‌توان هر بردار دلخواهی را برحسب بردارهای واحد بیان نمود. اگر برداری که مبدأ آن نقطه A در شکل (۸-۱) باشد را تصور کنیم، می‌توان آن را به سه مؤلفه در امتداد بردارهای واحد در نقطه A تجزیه کرد. بنابراین بردار \vec{A} را می‌توان در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی به ترتیب به شرح زیر نوشت:

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z \quad (24-1)$$

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi \quad (25-1)$$

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi \quad (26-1)$$

جمع چند بردار را می‌توان با جمع مؤلفه‌های متناظر آنها بدست آورد. بعنوان مثال جمع دو بردار \vec{A} و \vec{B} در دستگاه مختصات مستطیلی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{a}_x + (A_y + B_y)\hat{a}_y + (A_z + B_z)\hat{a}_z \quad (27-1)$$

ضرب خارجی و داخلی دو بردار را نیز می‌توان بر حسب مؤلفه‌های آنها انجام داد. برای این منظور با استفاده از تعریف ضرب داخلی و خارجی بردارها و توجه به این نکته که بردارهای واحد دو به دو بر یکدیگر عمودند، ابتدا نتیجه ضرب داخلی و خارجی بردارهای واحد را محاسبه می‌کنیم:

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1 \quad (28-1)$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_x = 0 \quad (29-1)$$

در نتیجه ضرب داخلی دو بردار \vec{A} و \vec{B} بر حسب مؤلفه‌های آنها به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \cdot (B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z) \quad (30-1)$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

به همین ترتیب با استفاده از روابطی از قبیل $\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = 1$ ، $\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\theta = 0$ و $\hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\phi = 0$

جمع و ضرب بردارها در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی فقط و فقط وقتی که بردارها دارای مبدأ مشترکی باشند امکان پذیر است.

غیره در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بترتیب میتوان به سهولت نتایج زیر را بدست آورد:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_r B_r + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z \quad (31-1)$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi \quad (32-1)$$

اگر برداری را در خودش ضرب داخلی نماییم، طبق تعریف ضرب داخلی بردارها، مربع قدر مطلق آن حاصل می‌شود.

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = |\bar{A}|^2 = \underbrace{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}_{\text{مستطیلی}} = \underbrace{A_r^2 + A_\varphi^2 + A_z^2}_{\text{استوانه‌ای}} = \underbrace{A_r^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2}_{\text{کروی}} \quad (33-1)$$

برای آنکه نتیجه ضرب خارجی دو بردار را برحسب مؤلفه‌هایشان بیان داریم، ابتدا با استفاده از تعریف ضرب خارجی داریم:

$$\begin{aligned} \hat{a}_x \times \hat{a}_y &= \hat{a}_z & \hat{a}_x \times \hat{a}_x &= 0 \\ \hat{a}_y \times \hat{a}_z &= \hat{a}_x & \hat{a}_y \times \hat{a}_y &= 0 \\ \hat{a}_z \times \hat{a}_x &= \hat{a}_y & \hat{a}_z \times \hat{a}_z &= 0 \end{aligned} \quad (34-1)$$

آنگاه $\bar{A} \times \bar{B}$ را بر حسب مؤلفه‌های \bar{A} و \bar{B} نوشته و آنرا بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \bar{A} \times \bar{B} &= (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \times (B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{a}_z \end{aligned} \quad (35-1)$$

میتوان نشان داد که $\bar{A} \times \bar{B}$ از دترمینان زیر نیز قابل محاسبه است:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (36-1)$$

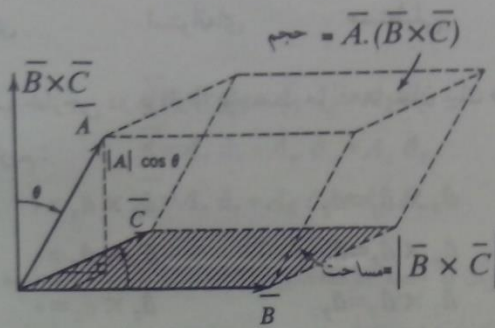
در دستگاههای مختصات دیگر نیز میتوان نتایج مشابهی بدست آورد که در زیر خلاصه می‌شوند:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ A_r & A_\varphi & A_z \\ B_r & B_\varphi & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\theta & \hat{a}_\varphi \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix} \quad (37-1)$$

استوانه‌ای کروی

با ترکیب ضرب داخلی و خارجی میتوان ضرب سه گانه اسکالر $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ را بوجود آورد. اندازه این ضرب سه گانه برابر حجم متوازی السطوحی است که با سه بردار \vec{A} ، \vec{B} و \vec{C} مطابق شکل (۹-۱) ساخته شود. در دستگاه مختصات مستطیلی، اندازه $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ از دترمینان زیر بدست می آید:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (38-1)$$



شکل (۹-۱) متوازی السطوح با اضلاع \vec{A} ، \vec{B} و \vec{C}

■ بردار مکان

هر نقطه از فضا را میتوان با برداری نشان داد که از اتصال مبدأ مختصات به نقطه مورد نظر بدست می آید. این بردار را بردار مکان نامیده و با \vec{r} نمایش می دهیم. با توجه به شکل (۱۰-۱) بردار مکان \vec{r} را بر حسب مختصات نقطه میتوان در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی بترتیب بصورت‌های زیر نوشت:

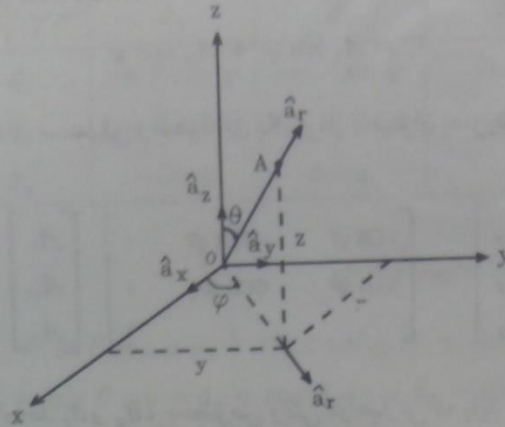
$$\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \quad (39-1)$$

$$\vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z \quad (40-1)$$

$$\vec{r} = r\hat{a}_r \quad (41-1)$$

مشاهده می شود که وقتی بردار \vec{r} را در دستگاههای استوانه‌ای یا کروی بیان می کنیم کلیه مختصات نقطه A ظاهر نمی شوند. مثلاً در دستگاه مختصات استوانه‌ای $\vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$ است و φ در عبارت \vec{r} دیده نمی شود در حالیکه بدون φ نمی توان نقطه A را مشخص کرد. در واقع بردار واحد \hat{a}_r در خود φ را مستتر دارد، زیرا فقط به ازای مقدار معینی از φ ، \hat{a}_r معنی خواهد داشت. به همین ترتیب

بردار واحد \hat{a}_r در دستگاه مختصات کروی تابعی از θ و φ است و رابطه $\vec{r} = r\hat{a}_r$ در خود θ و φ را مستتر دارد.



شکل (۱-۱۰) بردار مکان \vec{r} بر حسب مختصات نقطه A

■ تبدیل بردارها در دستگاههای مختصات مختلف

گاهی اوقات برداری در یک دستگاه مختصات داده شده است و بیان آن در دستگاه مختصات دیگری ضرورت پیدا می‌کند. بعنوان مثال فرض کنید بردار \vec{A} در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است، یعنی $\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\varphi \hat{a}_\varphi + A_z \hat{a}_z$ و می‌خواهیم آن را در دستگاه مختصات مستطیلی بنویسیم. به عبارت دیگر باید مؤلفه‌های A_x ، A_y و A_z را برحسب مؤلفه‌های A_r ، A_φ و A_z بدست آوریم. بدیهی است که مؤلفه A_z که بین دو دستگاه مختصات استوانه‌ای و مستطیلی مشترک است بدون تغییر باقی می‌ماند. برای بدست آوردن A_x و A_y به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. ابتدا دو طرف عبارت بردار \vec{A} را در بردار واحد \hat{a}_x ضرب داخلی می‌کنیم. لذا با توجه به اینکه $\vec{A} \cdot \hat{a}_x = A_x$ است، داریم:

$$A_x = A_r \hat{a}_r \cdot \hat{a}_x + A_\varphi \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_x + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_x \quad (۴۲-۱)$$

لیکن با توجه به صفر بودن عبارت سوم سمت راست رابطه مذکور و اینکه به سهولت می‌توان نشان داد که:

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x = \cos \varphi \quad (۴۳-۱)$$

$$\hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_x = -\sin \varphi \quad (۴۴-۱)$$

خواهیم داشت:

$$A_x = A_r \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \quad (۴۵-۱)$$

به نحو مشابهی میتوان نشان داد که:

$$A_y = A_r \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \quad (۴۶-۱)$$

روابط بین مؤلفه‌های مستطیلی و استوانه‌ای یک بردار را میتوان بصورت یک رابطه ماتریسی نیز بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (۴۷-۱)$$

تبدیل بردارهای واحد \hat{a}_r و \hat{a}_φ ، بخصوص وقتی در عبارتی که باید از آنها انتگرال گرفته شود ظاهر شوند، ضرورت پیدا می‌کند. این بدان دلیل است که بردارهای واحد مزبور ثابت نیستند. با استفاده از رابطه (۴۷-۱) میتوان نشان داد که:

$$\hat{a}_r = \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y \quad (۴۸-۱)$$

$$\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y \quad (۴۹-۱)$$

روش فوق را میتوان برای تبدیل بردارها از دستگاه مختصات کروی به دستگاه مختصات مستطیلی و بالعکس نیز بکار برد. بطور خلاصه، آنچه که برای تبدیل یک بردار از دستگاهی به دستگاه دیگر مورد نیاز است، نتایج ضرب داخلی بردارهای واحد بین دو دستگاه می‌باشند. این نتایج برای دستگاههای استوانه‌ای - مستطیلی و کروی - مستطیلی به ترتیب در جداول (۱-۱) و (۲-۱) خلاصه شده‌اند.

جدول (۱-۱) ضرب داخلی بردارهای واحد در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و مستطیلی

ضرب داخلی	\hat{a}_x	\hat{a}_y	\hat{a}_z
\hat{a}_r	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	۰
\hat{a}_φ	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	۰
\hat{a}_z	۰	۰	۱

جدول (۲-۱) ضرب داخلی بردارهای واحد در دستگاههای مختصات کروی و مستطیلی

ضرب داخلی « . »	\hat{a}_x	\hat{a}_y	\hat{a}_z
\hat{a}_r	$\sin \theta \cos \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta$
\hat{a}_θ	$\cos \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$-\sin \theta$
\hat{a}_φ	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0

با استفاده از جدول (۲-۱)، میتوان نوشت :

$$\hat{a}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z \quad (50-1)$$

$$\hat{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z \quad (51-1)$$

$$\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y \quad (52-1)$$

تبدیل مختصات یک نقطه از دستگاهی به دستگاه دیگر نیز اغلب ضرورت پیدا می‌کند. با استفاده از شکل (۱۰-۱) روابط مورد نیاز بشرح زیر خلاصه میشوند :

الف) استوانه‌ای - مستطیلی

$$x = r \cos \varphi \quad (53-1)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (54-1)$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (55-1)$$

$$\varphi = \tan^{-1}(y/x) \quad (56-1)$$

$$z = z \quad (57-1)$$

ب) کروی - مستطیلی

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (58-1)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (59-1)$$

$$z = r \cos \theta \quad (60-1)$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (61-1)$$

$$\theta = \cos^{-1} [z / (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}] \quad (62-1)$$

$$\varphi = \tan^{-1}(y/x) \quad (63-1)$$

مثال (۱-۱) بردار $\vec{A} = (5/r^2) \hat{a}_r$ در دستگاه مختصات کروی داده شده است.

الف) $|\vec{A}|$ و A_x را در نقطه $M(3, 4, 5)$ بدست آورید.

ب) نتیجه ضرب داخلی $\vec{A} \cdot \vec{B}$ را در نقطه M محاسبه کنید وقتی که $\vec{B} = \hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$

باشد.

حل:

الف) با استفاده از رابطه (۱-۱۶)، مقدار r در نقطه M عبارت است از:

$$r = (3^2 + 4^2 + 5^2)^{1/2} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{A}| = \frac{5}{r^2} = \frac{5}{50} = 0.1$$

برای بدست آوردن مؤلفه A_x ، با توجه به رابطه (۱-۵۰) می‌نویسیم:

$$\vec{A} = 0.1 \hat{a}_r = 0.1 (\sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z)$$

لذا:

$$A_x = 0.1 \sin \theta \cos \varphi$$

لیکن در نقطه M با استفاده از روابط (۱-۶۲) و (۱-۶۳) میتوان نوشت:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{z}{r} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{5}{5\sqrt{2}} \right) = 45^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$\tan \varphi = \frac{4}{3}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4/3)^2}} = \frac{3}{5}, \quad \sin \varphi = \frac{4}{5}$$

سرانجام:

$$A_x = 0.1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{100} = 0.0424$$

ب) عبارت کامل بردار \vec{A} در نقطه M در دستگاه مختصات مستطیلی با داشتن خطوط مثلثاتی

θ و φ بشرح زیر نوشته میشود:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= 0.1 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\hat{a}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_z \right] \\ &= 0.1 \left(3\sqrt{2}\hat{a}_x + 4\sqrt{2}\hat{a}_y + 5\sqrt{2}\hat{a}_z \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A} \cdot \bar{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0.1 \left[(3\sqrt{2})(1) + (4\sqrt{2})(-2) + (5\sqrt{2})(3) \right] \\ &= 0.1414\end{aligned}$$

□

۴-۱) انتگرالهای خط، سطح و حجم

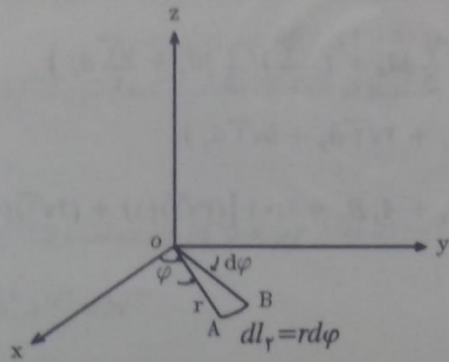
به منظور مطالعه انتگرالهای خط، سطح و حجم که به دفعات زیاد در محاسبه میدانهای الکترومغناطیس مورد استفاده قرار می‌گیرند، ابتدا عناصر طول، سطح و حجم را در دستگاههای مختلف مختصات مورد بررسی قرار میدهیم. فرض می‌کنیم که نقطه A به مختصات (u_1, u_2, u_3) و نقطه B به مختصات $(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ در یک دستگاه مختصات متعامد باشد. اگر dl_1 عنصر طولی باشد که از تغییر u_1 به $u_1 + du_1$ حاصل می‌شود وقتی که u_2 و u_3 ثابت نگهداشته شوند و همینطور dl_2 و dl_3 عناصر طول ناشی از تغییر u_2 و u_3 به $u_2 + du_2$ و $u_3 + du_3$ باشند، du_i و dl_i به ازای $i=1, 2, 3$ الزاماً با یکدیگر برابر نخواهند بود و در حالت کلی توسط رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$dl_i = h_i du_i \quad i=1, 2, 3 \quad (۶۴-۱)$$

که h_i خود تابعی از u_1, u_2, u_3 می‌باشد. به منظور روشن شدن مطلب فرض می‌کنیم که φ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به $\varphi + d\varphi$ تغییر نماید، در آن صورت با توجه به شکل (۱۱-۱) عنصر طول ناشی از این تغییر برابر $dl_\varphi = r d\varphi$ می‌باشد و در نتیجه $h_\varphi = r$ است. حال آنکه اگر در دستگاه مختصات مستطیلی x به $x + dx$ تغییر کند، عنصر طول ناشی از این تغییر همان dx خواهد بود. یعنی $dl_1 = dx$ و در نتیجه $h_1 = 1$ است.

■ عناصر طول، سطح و حجم

عناصر طول، سطح و حجم وقتی که هر سه مختصه تغییرات دیفرانسیلی نمایند در دستگاههای مختلف مختصات قابل بیان می‌باشند.



شکل (۱۱-۱) تغییر دیرانسیلی φ و عنصر طول dl حاصل از آن

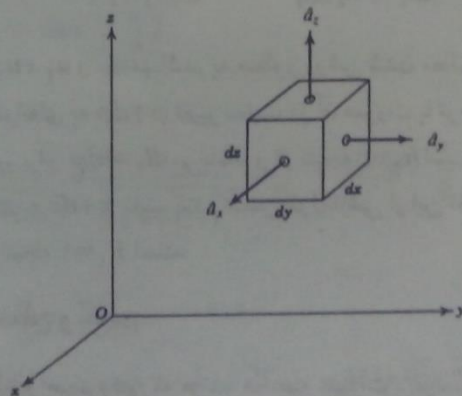
دستگاه مختصات مستطیلی: با توجه به شکل (۱۲-۱) عناصر طول، سطح و حجم در این دستگاه مختصات عبارتند از:

عناصر طول : $dl_x = dx$, $dl_y = dy$, $dl_z = dz$ (۶۵-۱)

بردار عنصر طول : $\overline{dl} = dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z$ (۶۶-۱)

عناصر سطح : $ds_x = dydz$, $ds_y = dx dz$, $ds_z = dx dy$ (۶۷-۱)

عناصر حجم : $dv = dx dy dz$ (۶۸-۱)



شکل (۱۲-۱) عناصر طول، سطح و حجم در دستگاه مختصات مستطیلی

در دستگاه مختصات مستطیلی $h_1=h_2=h_3=1$ است. عنصر سطح را میتوان بصورت برداری نیز تعریف نمود. کافی است اندازه عنصر سطح را در بردار واحدی که بر آن عنصر عمود است ضرب کنیم. البته بردار واحد را میتوان در دو جهت مخالف یکدیگر بر عنصر سطح عمود نمود. بعنوان مثال هر دو عبارت $\overline{ds}_x = \pm dydz \hat{a}_x$ و $\overline{ds}_y = \pm dxdy \hat{a}_y$ را می توان در نظر گرفت.

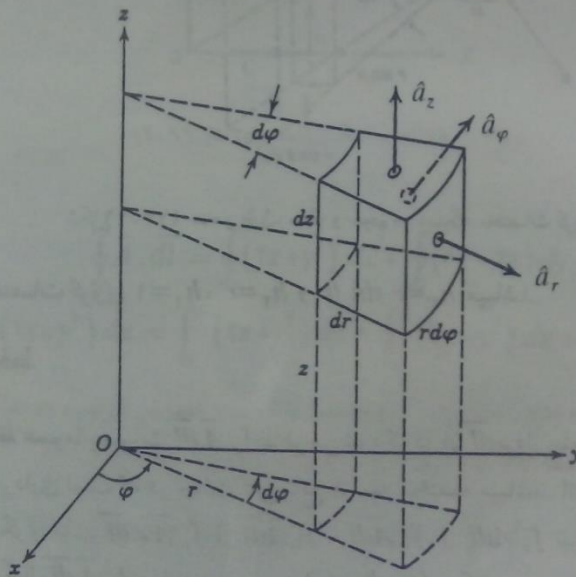
دستگاه مختصات استوانه‌ای: در این دستگاه میتوان نشان داد که $h_1=1$ ، $h_2=r$ و $h_3=1$ است. عناصر طول، سطح و حجم در این دستگاه مختصات با توجه به شکل (۱۳-۱) بشرح زیر خلاصه می شوند:

عناصر طول : $dl_r=dr$, $dl_\phi=r d\phi$, $dl_z=dz$ (۶۹-۱)

بردار عنصر طول : $\overline{dl}=dr \hat{a}_r + r d\phi \hat{a}_\phi + dz \hat{a}_z$ (۷۰-۱)

عناصر سطح : $ds_r=r d\phi dz$, $ds_\phi=r dr dz$, $ds_z=r dr d\phi$ (۷۱-۱)

عناصر حجم : $dv=r dr d\phi dz$ (۷۲-۱)



شکل (۱۳-۱) عناصر طول، سطح و حجم در دستگاه مختصات استوانه‌ای

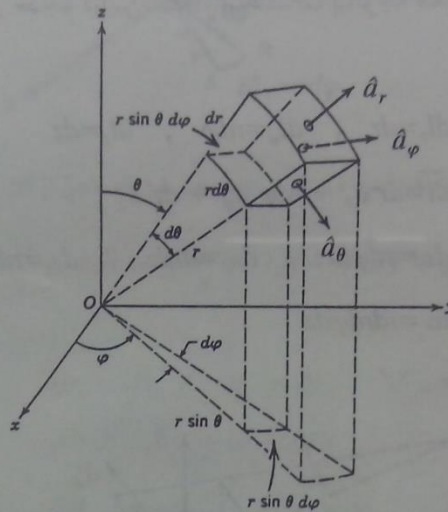
دستگاه مختصات کروی: با در نظر گرفتن شکل (۱۴-۱)، عناصر طول، سطح و حجم در این دستگاه بشرح زیر نوشته می شوند:

عناصر طول : $dl_r=dr$, $dl_\theta=r d\theta$, $dl_\phi=r \sin\theta d\phi$ (۷۳-۱)

برداری عنصر طول : $\overline{dl}=dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin\theta d\phi \hat{a}_\phi$ (۷۴-۱)

عناصر سطح : $ds_r=r^2 \sin\theta d\theta d\phi$, $ds_\theta=r \sin\theta dr d\phi$, $ds_\phi=r dr d\theta$ (۷۵-۱)

عناصر حجم : $dv=r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ (۷۶-۱)



شکل (۱۴-۱) عناصر طول، سطح و حجم در دستگاه مختصات کروی

در دستگاه مختصات کروی $h_r=r$, $h_\theta=r \sin\theta$ و $h_\phi=1$ میباشد.

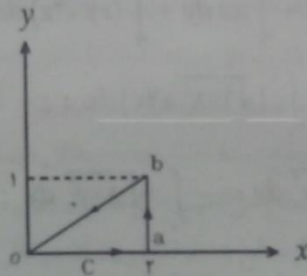
■ انتگرال خط

انتگرال خط عموماً بصورت $\int_C \overline{A} \cdot \overline{dl}$ ظاهر می شود که در آن برداری عنصر طول در امتداد مسیر C بوده و \overline{A} برداری است که در حالت کلی تابع هر سه مختصه میباشد. انتگرال خط ممکن است بصورت های دیگری مانند $\int_C \overline{A} \times \overline{dl}$, $\int_C A dl$, $\int_C \overline{A} dl$ و $\int_C A dl$ نیز ظاهر شود ولی در این میان اغلب انتگرال $\int_C \overline{A} \cdot \overline{dl}$ در این درس مورد استعمال پیدا می کند. مسیر انتگرال گیری که با منحنی C نشان داده می شود در حالت کلی یک منحنی فضایی است. به منظور محاسبه $\int_C \overline{A} \cdot \overline{dl}$ میتوان نوشت:

$$\int_C \overline{A} \cdot \overline{dl} = \int_C A_x(x, y, z) dx + \int_C A_y(x, y, z) dy + \int_C A_z(x, y, z) dz \quad (۷۷-۱)$$

هر کدام از انتگرالهای سمت راست رابطه (۱-۷۷) را باید جداگانه محاسبه نمود. بعنوان مثال اگر بخواهیم $\int_C A_x(x,y,z) dx$ را محاسبه کنیم باید بجای y و z در $A_x(x,y,z)$ با استفاده از معادلات منحنی C بر حسب x مقدار گذاشته و سپس عمل انتگرالگیری را انجام دهیم. اگر انتگرال $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{l}$ بین دو نقطه a و b روی منحنی C مورد نظر باشد، در محاسبه $\int_C A_x(x,y,z) dx$ از مؤلفه x نقطه a تا مؤلفه x نقطه b انتگرالگیری را انجام می دهیم. انتگرال $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{l}$ را ممکن است بر حسب \bar{A} و $d\bar{l}$ در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی نیز بسط داد.

مثال (۱-۲) مطلوب است محاسبه $\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l}$ روی مسیر بسته شکل (۱-۱۵) وقتی که بردار \bar{A} بصورت $\bar{A} = (2x + y^2)\hat{a}_x + (3y - 2x)\hat{a}_y$ بیان شود (از علامت \circ برای نمایش انتگرال روی یک مسیر بسته استفاده می شود).



شکل (۱-۱۵) مسیر انتگرال خط برای مثال (۱-۲)

حل:

$$\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} = \oint_C (2x + y^2) dx + \oint_C (3y - 2x) dy$$

$$K_1 = \oint_C (2x + y^2) dx = \int_0^a (2x + y^2) dx + \int_0^b (2x + y^2) dx + \int_0^0 (2x + y^2) dx$$

در فاصله 0 تا a ، $y = 0$ ، $x_0 = 0$ و $x_1 = a$ میباشد. به همین ترتیب در فاصله a تا b ، $x = x_0 = x_1 = 2$ و در فاصله b تا 0 ، $y = x/2$ ، $x_0 = 2$ و $x_1 = 0$ است. لذا:

$$K_1 = \int_0^1 (2x + 0) dx + \int_2^1 (2 + y^2) dx + \int_2^0 (2x + \frac{x^2}{4}) dx = 2 + 0 - \frac{12}{4} = -\frac{2}{4}$$

به همین ترتیب:

$$K_2 = \oint_C (3y - 2x) dy = \left[\int_0^a + \int_0^b + \int_0^0 \right] (3y - 2x) dy$$

$$= \int_0^1 (0 - 2x) dy + \int_2^1 (3y - 2) dy + \int_2^0 (3y - 2y) dy = 0 - \frac{12}{4} + \frac{0}{4} = -2$$

و سرانجام:

$$\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} = K_1 + K_2 = -\frac{2}{3} - 4 = -\frac{14}{3}$$

□

مثال (۳-۱) مطلوب است محاسبه $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{l}$ برای $\bar{A} = (yz + 2x)\hat{a}_x + xz\hat{a}_y + (xy + 2z)\hat{a}_z$ وقتی که منحنی C با معادلات $z=1$ و $x^2 + y^2 = 1$ مشخص شود. انتگرال را از نقطه $(0, 1, 1)$ تا نقطه $(1, 0, 1)$ محاسبه کنید.

حل:

$$\int_C \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int_C (yz + 2x) dx + \int_C xz dy + \int_C (xy + 2z) dz$$

$$K_1 = \int_C (yz + 2x) dx = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + 2x) dx ; z=1, y=\sqrt{1-x^2}$$

$$K_2 = \int_C xz dy = \int_1^0 \sqrt{1-y^2} dy = - \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy ; z=1, x=\sqrt{1-y^2}$$

$$K_3 = \int_C (xy + 2z) dz = \int_1^1 (xy + 2z) dz = 0$$

$$\begin{aligned} \int_C \bar{A} \cdot d\bar{l} &= K_1 + K_2 + K_3 = \int_0^1 2x dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy \\ &= \int_0^1 2x dx = 1 \end{aligned}$$

□

برای محاسبه انتگرال خط از نوع $\int_C A dl$ که در آن $A=A(x,y,z)$ تابعی اسکالر میباشد، ابتدا انتگرال را بصورت زیر می نویسیم:

$$\int_C A dl = \int_C A(x,y,z) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (۷۸-۱)$$

پس بجای y و z نیز $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dz}{dx}$ با استفاده از معادلات منحنی C بر حسب x مقدار می گذاریم. لذا اگر بعنوان مثال معادلات منحنی C بصورت $y=y(x)$ و $z=z(x)$ بیان شوند، رابطه (۷۸-۱) بصورت زیر نوشته می شود:

$$\int_C Adl = \int_{x_0}^{x_1} A[x, y(x), z(x)] [1+y'(x)^2+z'(x)^2]^{1/2} dx \quad (79-1)$$

انتگرال مزبور مشابه یک انتگرال معمولی یگانه است که با استفاده از روشهای معمول محاسبه می‌شود. اضافه می‌شود که در رابطه (79-1) محاسبه انتگرال از نقطه a تا نقطه b روی منحنی C مورد نظر میباشد.

■ انتگرال سطح

برحسب تعریف $\int_S \bar{A} \cdot d\bar{s}$ روی سطح S برابر حاصل ضرب عناصری است که از ضرب داخلی بردار \bar{A} در بردار $d\bar{s}$ بدست می‌آید. برداری به اندازه عنصر سطح ds و در جهت عمود بر آن است. لیکن در امتداد عمود بر ds همواره دو جهت مخالف یکدیگر وجود دارند. از اینرو مقدار $\int_S \bar{A} \cdot d\bar{s}$ که یک کمیت اسکالر است ممکن است مثبت یا منفی محاسبه شود، بویژه وقتی که S یک سطح غیربسته باشد مگر آنکه نسبت به چگونگی انتخاب بردار $d\bar{s}$ اطلاعات بیشتری در اختیار باشد. (یادآوری می‌شود که یک سطح بسته فضا را به دو بخش متمایز تقسیم می‌کند که یک بخش را درون و بخش دیگر را بیرون این سطح می‌نامیم). اگر انتگرال روی سطح بسته‌ای انجام شود، معمول این است که بردار $d\bar{s}$ در تمام نقاط سطح به طرف بیرون آن در نظر گرفته شود.

سطح S در حالت کلی معادله‌ای بصورت $f(x,y,z)=k$ دارد که در آن k مقداری ثابت است. اگر S یک سطح ساده مانند یک صفحه یا سطح استوانه‌ای قائم باشد، بردار $d\bar{s}$ را میتوان به آسانی تعیین کرد. ولی در حالت کلی بردار $d\bar{s}$ را که در هر نقطه بر سطح S عمود باشد باید با استفاده از تعریف گرادیان که بعداً مطالعه خواهیم نمود بدست آورد. اگر $d\bar{s}$ را بصورت $d\bar{s} = ds \hat{a}_n$ بنویسیم که \hat{a}_n بردار واحد عمود بر سطح S باشد، میتوان نشان داد که \hat{a}_n از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\hat{a}_n = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$$

$$\bar{N} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z = f \text{ گرادیان} \quad (80-1)$$

بنابراین میتوان نوشت:

$$\int_S \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{A} \cdot \hat{a}_n ds$$

حال اگر تصویر عنصر سطح ds را روی یکی از صفحات مختصات، مثلاً صفحه $z=0$ ، بدست آوریم میتوان انتگرال‌گیری را روی تصویر سطح S در آن صفحه مختصات انجام داد. با توجه به

شکل (۱۶-۱) میتوان نوشت :

$$dx dy = ds |\cos \alpha|$$

از طرفی :

$$|\cos \alpha| = |\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z|$$

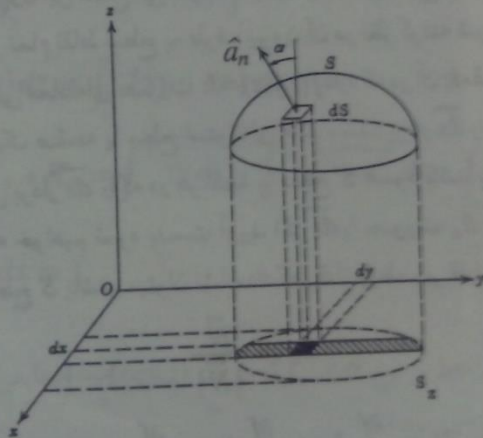
بنابراین :

$$\int_S \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dx dy}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z|} \quad (۸۱-۱)$$

در رابطه (۸۱-۱)، S_z تصویر S روی صفحه $z=0$ است. به نحو مشابه میتوان نشان داد که :

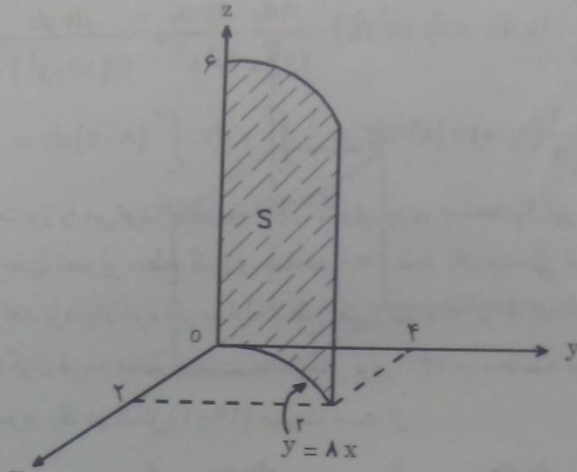
$$\int_S \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_{S_y} \bar{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dx dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_y|} = \int_{S_x} \bar{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dy dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_x|} \quad (۸۲-۱)$$

در رابطه (۸۲-۱)، S_x و S_y بترتیب تصویر سطح S روی صفحات $x=0$ و $y=0$ میباشند.



شکل (۱۶-۱) تصویر سطح S روی صفحه $z=0$

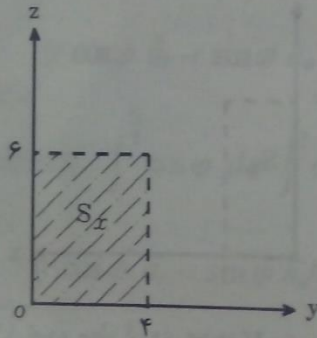
مثال (۴-۱) مطلوب است محاسبه $\int_S \bar{A} \cdot d\bar{s}$ وقتی که $\bar{A} = x^2 \hat{a}_z + z \hat{a}_y - 2y \hat{a}_x$ و سطح S بخشی از یک استوانه سهمی شکل به معادله $y^2 = 8x$ که در $\frac{1}{8}$ اول فضا واقع است باشد و به صفحات $z=6$ و $y=4$ محدود گردد. شکل (۱۷-۱) سطح S مذکور را نمایش میدهد (در $\frac{1}{8}$ اول فضا $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ است).



شکل (۱۷-۱) سطح S برای انتگرال مثال (۴-۱)

حل:

معادله سطح را بصورت $f(x,y,z) = 16x - y^2 = 0$ می نویسیم و تصویر آن را روی صفحه $x=0$ مطابق شکل (۱۸-۱) بدست می آوریم.



شکل (۱۸-۱) تصویر سطح S روی صفحه yz برای مثال (۴-۱)

$$f(x, y, z) = 16x - y^2 = 0$$

$$\vec{N} = \nabla f = 16\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y$$

$$\hat{a}_n = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{16\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y}{(16 + 4y^2)^{1/2}}$$

$$\hat{a}_n \cdot \hat{a}_x = \frac{16}{(16 + y^2)^{1/2}}$$

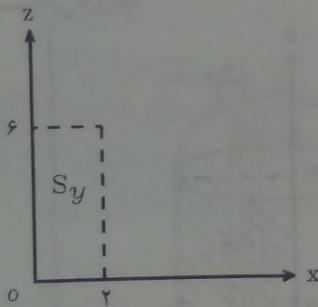
$$\int_S \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_{S_y} (2y \hat{a}_x - z \hat{a}_y + x^2 \hat{a}_z) \cdot \frac{\hat{a}_x - 2y \hat{a}_y}{(64 + 4y^2)^{1/2}} \frac{dy dz}{4/(16 + y^2)^{1/2}}$$

$$= \int_{S_y} \frac{1}{4} (\lambda y + yz) dy dz = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 y dy \int_{-6}^6 (\lambda + z) dz = 132$$

نتیجه انتگرال مزبور را می‌توان از طریق انتگرال‌گیری روی صفحه S_y نیز بدست آورد، ولی باید توجه نمود که چون تصویر سطح S روی صفحه $z=0$ فقط یک منحنی است انتگرال‌گیری روی S_z امکان‌پذیر نخواهد بود. بالاخره اگر معادله سطح بصورت $f(x,y,z) = -\lambda x + y^2 = 0$ در نظر گرفته می‌شود، مقدار انتگرال قرینه مقدار بدست آمده یعنی برابر $132 -$ محاسبه می‌گردید. محاسبه انتگرال با استفاده از تصویر S_y در شکل (۱۹-۱) عبارت است از:

$$\int_{S_y} \bar{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dx dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_y|} = \int_{S_y} (\lambda y + yz) \frac{dx dz}{y} = \int_{S_y} (\lambda + z) dx dz$$

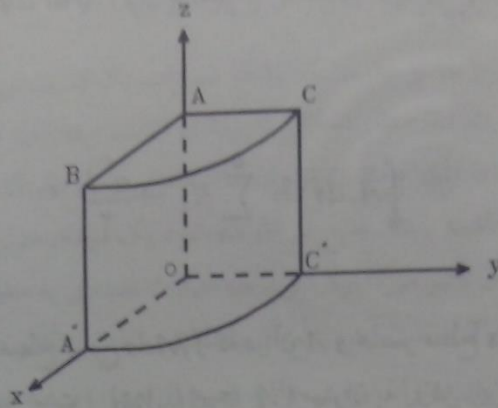
$$= \int_{-2}^2 dx \int_{-6}^6 (\lambda + z) dz = 132$$



شکل (۱۹-۱) تصویر سطح S روی صفحه xz برای مثال (۱-۴)

مثال (۵-۱) مطلوب است محاسبه $\oint_S \bar{A} \cdot d\bar{s}$ روی سطح بسته‌ای که محدود به صفحات مختصات $(x=0, y=0, z=0)$ و صفحه $z=l$ و استوانه‌ای به شعاع $r=a$ بوده و در $\frac{1}{\lambda}$ اول فضا قرار داشته باشد. بردار \bar{A} در دستگاه مختصات استوانه‌ای بصورت $\bar{A} = r \cos \varphi \hat{a}_r - r \sin \varphi \hat{a}_\varphi$ بیان می‌شود. شکل (۲۰-۱) سطح بسته S را نشان می‌دهد.
حل:

$$\oint_S \bar{A} \cdot d\bar{s} = \left[\int_{BCC'A'} + \int_{ACC'O} + \int_{ABA'O} + \int_{A'OC'} + \int_{ABC} \right] \bar{A} \cdot d\bar{s}$$



شکل (۱-۲۰) سطح بسته S محدود به سطوح $BCC'A'$ و $ACC'O$ ، $ABA'O$ ، $OA'C'$ ، ABC برای انتگرال سطح مثال (۱-۵)

در محاسبه هر یک از انتگرالهای سمت راست عبارت مزبور، بردار \overline{ds} را در جهت عمود و بطرف خارج سطح بسته S در نظر می‌گیریم.

$$K_x = \int_{BCC'A'} \overline{A} \cdot \overline{ds} = \int_{BCC'A'} (r \cos \varphi \hat{a}_r - r \sin \varphi \hat{a}_\varphi) \cdot (rd\varphi dz \hat{a}_r), r = a$$

$$= \int_{BCC'A'} r^2 \cos \varphi d\varphi dz = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi \int_0^l dz = a^2 l$$

$$K_y = \int_{ACC'O} \overline{A} \cdot \overline{ds} = \int_{ACC'O} (r \cos \varphi \hat{a}_r - r \sin \varphi \hat{a}_\varphi) \cdot (dr dz \hat{a}_\varphi), \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$= \int_{ACC'O} -r \sin \varphi dr dz = - \int_0^a r dr \int_0^l dz = -\frac{1}{2} a^2 l$$

$$K_z = \int_{ABA'O} \overline{A} \cdot \overline{ds} = \int_{ABA'O} (r \cos \varphi \hat{a}_r - r \sin \varphi \hat{a}_\varphi) \cdot (-dr dz \hat{a}_\varphi), \varphi = 0$$

$$= 0$$

$$K_z = \int_{A'OC'} \overline{A} \cdot \overline{ds} = \int_{A'OC'} (r \cos \varphi \hat{a}_r - r \sin \varphi \hat{a}_\varphi) \cdot (-rd\varphi dr \hat{a}_z), z = 0$$

$$= 0$$

$$K_{\Delta} = \int_{ABC} \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_{ABC} (r \cos \varphi \hat{a}_r - r \sin \varphi \hat{a}_{\varphi}) \cdot (r dr d\varphi \hat{a}_z), z = l$$

$$= 0$$

پس:

$$\oint_V \bar{A} \cdot d\bar{s} = \sum_{i=1}^5 K_i = \frac{a^2 l}{\epsilon_0}$$

□

برای محاسبه انتگرال سطح از نوع $\int_S A ds$ که در آن A و عنصر سطح ds هر دو اسکالر هستند و A تابعی از هر سه مختصه است ($A = A(x, y, z)$) میتوان به روش زیر عمل نمود:

$$\int_S A ds = \int_{S_z} A[x, y, z(x, y)] \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dx dy \quad (۸۳-۱)$$

در بدست آوردن سمت راست رابطه (۸۳-۱) از $\cos \alpha = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2}$ و $z = z(x, y)$ استفاده شده است. همچنین فرض شده است که سطح S با معادله $z = z(x, y)$ مشخص شده باشد. انتگرال (۸۳-۱) را میتوان با روشهای معمول برای محاسبه انتگرالهای دوگانه محاسبه کرد.

■ انتگرال حجم

این انتگرال ساده‌ترین نوع انتگرال است و همواره با استفاده از روشهای محاسبه انتگرالهای سه‌گانه به سادگی بدست می‌آید. انتگرال حجم عموماً بصورت $\int_V A dv$ که در آن A کمیتی اسکالر است ظاهر می‌شود.

مثال (۶-۱) بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho = \rho_0 r^2/a^2$ برای $r \leq a$ در کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مقدار کل بار الکتریکی را محاسبه نمایید.

$$Q = \int_V \rho dv = \int_V \rho_0 \frac{r^2}{a^2} (r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi)$$

$$= \frac{\rho_0}{a^2} \int_0^a r^4 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{5} \rho_0 \pi a^3$$

مطالعه انواع دیگر انتگرالهای خط، سطح و حجم که به جزئیات آنها پرداخته نشده به تمرینات آخر فصل موکول گردیده است.

۵-۱) مشتقات میدانهای اسکالر و برداری

میدان را می‌توان تابعی ریاضی دانست که بیانگر تغییرات یک کمیت فیزیکی در ناحیه‌ای از فضا باشد. بر حسب اینکه کمیت مورد نظر اسکالر یا برداری باشد، میدان نیز اسکالر یا برداری خواهد بود. به منظور روش‌تر شدن مفهوم میدان میتوان مثال اطاقی را در نظر گرفت که در گوشه‌ای از آن یک منبع حرارتی وجود داشته باشد. منبع در اطراف خود یک میدان حرارتی بوجود می‌آورد و بر درجه حرارت هر نقطه اطاق تأثیر می‌گذارد. اگر درجه حرارت نقطه‌ای به مختصات (x, y, z) در لحظه t از رابطه $T = T(x, y, z, t)$ بدست آید، تابع T بیان‌کننده میدان اسکالر درجه حرارت می‌باشد. بعنوان مثالی از میدان برداری میتوان نیروی جاذبه زمین را نام برد. بر هر جسمی که در میدان جاذبه زمین قرار بگیرد نیرویی اعمال می‌شود که تابعی از مختصات نقطه‌ای است که جسم در آن واقع می‌باشد. اگر میدانی اعم از اسکالر یا برداری نسبت به زمان تغییراتی نداشته باشد، آن را میدان ساکن گویند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن و میدانهای الکترومغناطیسی متغیر با زمان مبحث اصلی مطالعات ما را تشکیل می‌دهند.

تغییرات میدانهای اسکالر و برداری نسبت به مکان و زمان و بخصوص مشتقات این میدانها نسبت به مکان، که تحت عناوین **گرادیان**^۱، **دیورژانس**^۲ و **کرل**^۳ بیان می‌شوند، حائز اهمیت فراوانی در مطالعه میدانهای الکترومغناطیس هستند و ادامه مطالب این فصل را به بحث و بررسی آنها اختصاص می‌دهیم.

■ گرادیان

در ریاضیات عمومی آموخته‌ایم که مشتق تابع اسکالر $f(x)$ نسبت به متغیر x بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (۸۴-۱)$$

وقتی که f تابعی از هر سه مختصه باشد ($f = f(x, y, z)$) مبادرت به تعریف مشتقات پاره‌ای می‌کنیم. بعنوان مثال مشتق پاره‌ای f نسبت به x ، وقتی که y و z ثابت نگهداشته شوند، عبارت است از:

1 - Gradient

2 - Divergence

3 - Curl

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (۸۵-۱)$$

را باید بتوان مشتق یک بعدی تلقی نمود، زیرا فقط x تغییر کرده است و y و z ثابت فرض شده‌اند. در مشتق سه بعدی، که می‌توان آنرا تعمیمی از مشتق یک بعدی دانست، تغییرات x ، y و z هر سه دخالت می‌کنند. افزایش دیرتاسیلی تابع تک مقداری و اسکالر $f(x, y, z)$ از نقطه $A(x, y, z)$ به نقطه $B(x+dx, y+dy, z+dz)$ برابر است با:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (۸۶-۱)$$

عبارت سمت راست رابطه (۸۶-۱) را می‌توان نتیجه ضرب داخلی دو بردار زیر دانست:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \right) \cdot (dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z) \quad (۸۷-۱)$$

بردار $\frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z$ را با علامت ∇f نشان داده و آن را گرادینت تابع اسکالر f می‌نامیم. بردار دیگر همان عنصر طول $d\vec{l} = \overline{AB}$ می‌باشد. با استفاده از تعریف ضرب داخلی دو بردار می‌توان نوشت:

$$df = (\nabla f) \cdot (d\vec{l}) = |\nabla f| |d\vec{l}| \cos \alpha \quad (۸۸-۱)$$

در رابطه (۸۸-۱)، α زاویه بین بردارهای $d\vec{l}$ و ∇f می‌باشد. یادآوری می‌شود که $d\vec{l}$ را می‌توان عنصر دیرتاسیلی بردار مکان \vec{r} دانست، زیرا $d\vec{l} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ است. حال به همان ترتیب که $\frac{\partial f}{\partial x}$ را مشتق یک بعدی تابع f نسبت به مکان تعریف می‌کنیم، می‌توان $\frac{df}{d\vec{l}}$ را مشتق سه بعدی تابع f نسبت به مکان دانست. پس از تقسیم طرفین رابطه (۸۸-۱) به $|d\vec{l}|$ داریم:

$$\frac{df}{d\vec{l}} = |\nabla f| \cos \alpha \quad (۸۹-۱)$$

ولی برخلاف $\frac{\partial f}{\partial x}$ که بصورت واحدی تعریف می‌شود، دارای مقدار واحدی نیست. در حقیقت بینهایت نقطه با فاصله $d\vec{l}$ در همسایگی A یافت می‌شوند که برای هر کدام زاویه α دارای مقدار خصوصی است. از اینرو $\frac{df}{d\vec{l}}$ فقط وقتی معنی خواهد داشت که در رابطه با جهت معینی باشد. بنابراین ضرورتاً می‌باید به تعریف مشتق جهت‌دار می‌کنیم: «مشتق تابع اسکالر و تک‌مقداری f نسبت به مکان در جهت مشخصی برابر حد نسبت تغییر جزئی تابع f (df) به اندازه تغییر جزئی بردار مکان ($d\vec{l}$) در آن جهت می‌باشد، وقتی که $d\vec{l}$ به سمت صفر میل نماید.» قبلاً اشاره کرده‌ایم ولی هنوز ثابت نمودیم که بردار ∇f و در نتیجه $\hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ بر سطح $f(x, y, z) = k$ عمود می‌باشد.

بنابراین مشتق تابع f در جهت معینی که با بردار واحد \hat{a}_1 مشخص شود برابر است با:

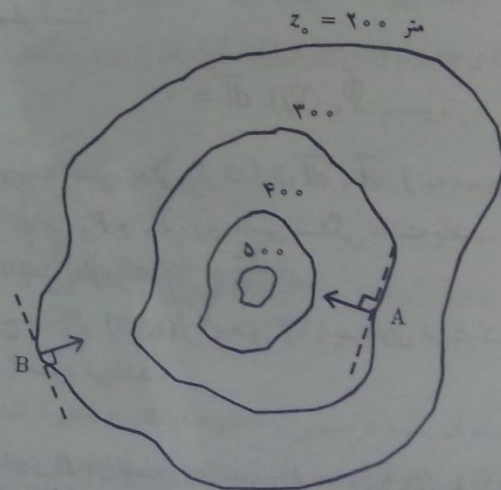
$$\frac{df}{dl} = |\nabla f| \cos \alpha = |\nabla f| \hat{a}_n \cdot \hat{a}_1 \quad (90-1)$$

از رابطه (۹۰-۱) استنباط میشود که حداکثر $\frac{df}{dl}$ برابر $|\nabla f|$ است که به ازای $\hat{a}_n = \hat{a}_1$ حاصل میشود. بنابراین میتوان بیان نمود که: «گرادیان تابع اسکالر و تکمقداری f در یک نقطه برداری است که اندازه آن برابر حداکثر نمو تابع در آن نقطه بوده و در جهت عمود بر سطح $f(x,y,z) = k$ (که k یک مقدار ثابت است) باشد.» بطور خلاصه در دستگاه مختصات مستطیلی گرادیان تابع اسکالر f عبارت است از:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \quad (91-1)$$

علامت « ∇ » را « del » تلفظ نموده و میتوان آن را بصورت عملگری تلقی کرد که روی تابع f عمل میکند ($\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z$). عملگر ∇ بطوریکه بعداً خواهیم دید روی توابع برداری نیز عمل میکند و بطور کلی میتوان با آن به مثابه یک بردار رفتار کرد.

گرادیان کاربردها و نمودهای متعددی در مسائل فیزیک دارد. بعنوان مثال تپه‌ای را در نظر گرفته که نقاط هم سطح آنرا به یکدیگر وصل نموده باشیم تا یک دسته منحنی‌های بسته مطابق شکل (۲۱-۱) حاصل شود. این منحنی‌ها با معادله $E(x,y) = z_0$ مشخص میشوند که z_0 ارتفاع نقاط هم سطح می‌باشد. گرادیان E در هر نقطه برداری است که بر منحنی بسته‌ای که از آن



شکل (۲۱-۱) منحنی‌های بسته معرف نقاط هم سطح روی یک تپه

نقطه میگذرد عمود بوده و در جهت افزایش E باشد. در شکل (۱-۲۱) گرادیان E در نقاط A و B نشان داده شده است. حال تصور کنید که باران بر این تپه بیارد و جریانی از آب از بالای تپه به پایین بوجود آید. بدیهی است که آب باران در امتداد حداکثر شیب تپه جاری خواهد شد. به زبان آنالیز برداری آب در جهت $-\nabla E$ جاری می شود. در فصل بعد خواهیم دید که شدت میدان الکتریکی برابر منهای گرادیان پتانسیل است.

خواص گرادیان: با بیان دو قضیه با ویژگیهای گرادیان بیشتر آشنا می شویم.

قضیه (۱-۱) اگر $\vec{A} = \nabla f$ باشد که $f = f(x,y,z)$ تابعی اسکالر و تکمقداری است، در آنصورت حاصل $\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}$ مستقل از مسیری است که نقاط P_1 و P_2 را بیکدیگر وصل میکند.

اثبات:

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \int_{P_1}^{P_2} (\nabla f) \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \right) \cdot (dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z) \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = \int_{P_1}^{P_2} df = f \Big|_{P_1}^{P_2} \\ &= f(P_2) - f(P_1) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

□

نتیجه‌ای که فوراً از قضیه مزبور گرفته می شود این است که انتگرال گرادیان تابع اسکالر f حول هر مسیر بسته‌ای همواره صفر است:

$$\oint_C (\nabla f) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (۹۲-۱)$$

عکس قضیه فوق نیز درست است، یعنی اگر انتگرال $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ به مسیر C بستگی نداشته، بلکه فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی P_1 و P_2 روی مسیر بستگی داشته باشد، در آنصورت تابعی اسکالر مانند f وجود خواهد داشت بطوریکه $\vec{A} = \nabla f$ باشد.

قضیه (۲-۱) گرادیان تابع اسکالر $f(x,y,z)$ (یعنی ∇f) برداری است که بر سطح $f(x,y,z) = k$ (مقداری ثابت است) عمود میباشد.

اثبات:

فرض می کنیم که A و B دو نقطه روی سطح $f(x,y,z) = k$ بوده بطوریکه A به مختصات (x,y,z) و B به مختصات $(x+dx, y+dy, z+dz)$ باشد. به این ترتیب بردار عنصر طول $\vec{AB} = d\vec{l}$ روی سطح واقع است. حال $\nabla f \cdot d\vec{l}$ را محاسبه می کنیم:

$$\nabla f \cdot d\bar{l} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df = 0, \quad f = k = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین دو بردار $d\bar{l}$ و ∇f بر یکدیگر عمودند، زیرا حاصل ضرب داخلی آنها برابر صفر است. حال چون $d\bar{l}$ ممکن است هر بردار عنصر طول دلخواهی روی سطح $f(x,y,z) = k$ باشد، میتوان نتیجه گرفت که بردار ∇f بر سطح $f = k$ عمود است.

□

گرادیان در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی: بطور کلی در یک دستگاه مختصات متعامد، گرادیان تابع اسکالر $f(u_1, u_2, u_3)$ به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3} dl_3 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \hat{a}_{u_1} + \frac{\partial f}{\partial l_2} \hat{a}_{u_2} + \frac{\partial f}{\partial l_3} \hat{a}_{u_3} \right) \cdot (dl_1 \hat{a}_{u_1} + dl_2 \hat{a}_{u_2} + dl_3 \hat{a}_{u_3}) \end{aligned}$$

بنابراین گرادیان $f(u_1, u_2, u_3)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial l_1} \hat{a}_{u_1} + \frac{\partial f}{\partial l_2} \hat{a}_{u_2} + \frac{\partial f}{\partial l_3} \hat{a}_{u_3} \\ &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \hat{a}_{u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \hat{a}_{u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \hat{a}_{u_3} \quad (93-1) \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۹۳-۱) و جدول (۳-۱)، عبارات گرادیان را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بترتیب بشرح زیر می‌نویسیم:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \quad (94-1)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi \quad (95-1)$$

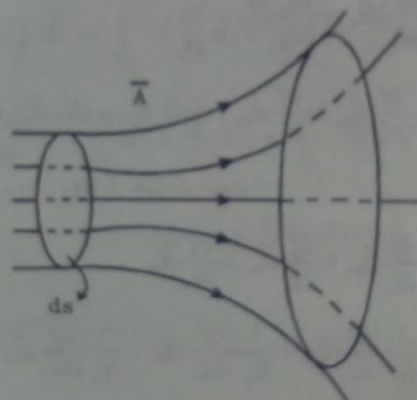
■ دیورژانس

یک میدان برداری را میتوان بطور ترسیمی با خطوط میدان یا خطوط شار نمایش داد. خطوط میدان منحنی‌هایی هستند که در هر نقطه بر بردار میدان مماس بوده و تراکم یا پراکندگی آنها در هر ناحیه از فضا بستگی به بزرگی یا کوچکی بردار (شدت یا ضعف میدان) در آن ناحیه دارد. هر چه اندازه بردار بزرگتر باشد خطوط میدان متراکم‌تر بوده و در جاهایی که اندازه بردار کوچکتر است

جدول (۲۰-۱) مختصات برداری واحد و ضرایب برای محاسبه گرادینان، دیورژانس، کرل و لاپلاس در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی

سیستم مختصات	u_1	u_2	u_3	\hat{a}_{u_1}	\hat{a}_{u_2}	\hat{a}_{u_3}	h_1	h_2	h_3
مستطیلی	x	y	z	\hat{a}_x	\hat{a}_y	\hat{a}_z	۱	۱	۱
استوانه‌ای	r	φ	z	\hat{a}_r	\hat{a}_φ	\hat{a}_z	۱	r	۱
کروی	r	θ	φ	\hat{a}_r	\hat{a}_θ	\hat{a}_φ	۱	r	$r \sin \theta$

خطوط میدان نیز پراکنده‌تر هستند. جهت خطوط میدان همان جهت بردار میباشد. شکل (۲۲-۱) خطوط میدان را نشان میدهد.



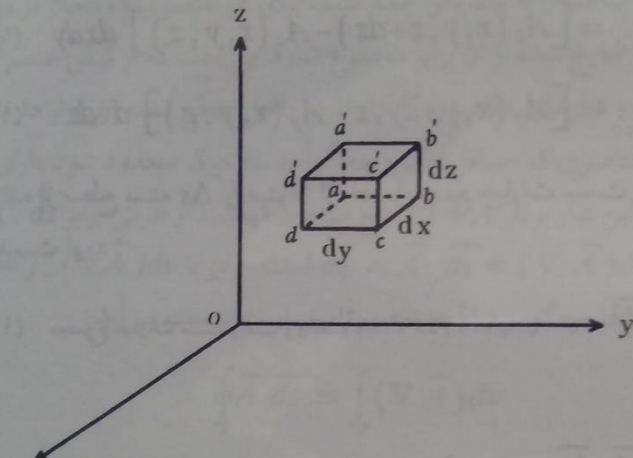
شکل (۲۲-۱) خطوط میدان معرف برداری \vec{A}

شار بردار \vec{A} که از عنصر سطح ds می‌گذرد، بر حسب تعریف از رابطه $d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{s}$ بدست می‌آید. حال عنصر حجم ΔV ، که به سطح بسته ΔS محدود می‌شود، را در نظر می‌گیریم. شار خالصی که از سطح بسته ΔS خارج می‌شود برابر $\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{s}$ است. بر حسب تعریف، دیورژانس بردار \vec{A} برابر حد نسبت شار خارج شده از سطح بسته ΔS به عنصر حجم ΔV است وقتی که ΔV به سمت صفر میل کند.

$$\text{Div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} \quad (۲۶-۱)$$

دیورژانس بردار \vec{A} بصورت $\nabla \cdot \vec{A}$ نمایش داده می‌شود. به منظور استخراج فرمول دیورژانس

یک بردار، ابتدا شار خالص خروجی از عنصر حجم Δv ، یعنی $\bar{A} \cdot d\bar{s}$ را محاسبه می‌کنیم. جهت سهولت، محاسبات را در دستگاه مختصات مستطیلی انجام می‌دهیم. عنصر حجمی را به ابعاد dx ، dy و dz مطابق شکل (۱-۲۳) در نظر می‌گیریم. این عنصر حجم دارای سطح بسته‌ای است که از شش وجه مکعب مستطیل $abcd a'b'c'd'$ تشکیل می‌شود. شار خالصی که از عنصر حجم خارج می‌شود برابر مجموع جبری شارهایی است که از شش وجه آن عبور می‌نمایند.



شکل (۱-۲۳) عنصر حجم در دستگاه مختصات مستطیلی برای محاسبه دیورژانس $\nabla \cdot \bar{A}$

مختصات نقطه a را (x, y, z) فرض می‌کنیم. در این صورت مختصات هفت رأس دیگر عنصر حجم، مشخص خواهند بود. بردار \bar{A} در نقطه a بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z) \hat{a}_x + A_y(x, y, z) \hat{a}_y + A_z(x, y, z) \hat{a}_z \quad (۹۷-۱)$$

شار گذرنده از سطح $abb'a'$ برابر است با:

$$(\Delta\phi)_{abb'a'} = \bar{A}(x, y, z) \cdot (-dydz \hat{a}_x) = -A_x(x, y, z) dydz$$

به دلیل کوچک بودن عنصر سطح $abb'a'$ ، اندازه بردار \bar{A} را روی آن تقریباً ثابت و برابر مقدارش در نقطه a فرض می‌کنیم. بدیهی است که این تساوی تقریبی در حد وقتی که عنصر سطح مذکور به سمت صفر میل میکند به یک تساوی دقیق تبدیل می‌گردد. به همین ترتیب میتوان نشان داد که:

$$(\Delta\phi)_{dcc'd'} = \bar{A}(x+dx, y, z) \cdot (dydz \hat{a}_x) = A_x(x+dx, y, z) dydz \quad (۹۸-۱)$$

در محاسبه شار گذرنده از سطح $dcc'd'$ ، اندازه بردار \bar{A} روی این سطح را با مقدارش در نقطه d

تقریب زده‌ایم، درست به همان نحو که اندازه بردار \bar{A} روی سطح $abb'a'$ را با مقدار این بردار در نقطه a تقریب زدیم. شاری که از دو سطح $abb'a'$ و $dcc'd'$ می‌گذرد عبارت است از:

$$(\Delta\phi)_{abb'a'} + (\Delta\phi)_{dcc'd'} = [A_x(x+dx, y, z) - A_x(x, y, z)] dydz \quad (99-1)$$

به همین ترتیب میتوان نشان داد که:

$$(\Delta\phi)_{abcd} + (\Delta\phi)_{a'b'c'd'} = [A_z(x, y, z+dz) - A_z(x, y, z)] dxdy \quad (100-1)$$

$$(\Delta\phi)_{aa'd'd'} + (\Delta\phi)_{bb'c'c'} = [A_y(x, y+dy, z) - A_y(x, y, z)] dxdz \quad (101-1)$$

شار کل گذرنده از سطح بسته ΔS را میتوان از حاصل جمع عبارات سمت راست روابط (99-1) تا (101-1) بدست آورد:

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta S} \bar{A} \cdot \bar{ds} = \text{مجموع عبارات سمت راست روابط (99-1) تا (101-1)} \quad (102-1)$$

و سرانجام:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{A} &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \bar{A} \cdot \bar{ds}}{\Delta v} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A_x(x+dx, y, z) - A_x(x, y, z)}{dx} \\ &+ \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A_y(x, y+dy, z) - A_y(x, y, z)}{dy} + \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{A_z(x, y, z+dz) - A_z(x, y, z)}{dz} \\ \nabla \cdot \bar{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (103-1) \end{aligned}$$

دیورژانس بردار \bar{A} در دستگاه مختصات مستطیلی را میتوان نتیجه ضرب داخلی عملگر ∇ در بردار \bar{A} دانست:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right] \cdot (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \bar{A} \quad (104-1) \end{aligned}$$

قضیه گوس^۱: بردار \bar{A} و سطح بسته S ، که دارای حجمی برابر V باشد، را در نظر می‌گیریم. حجم

V را به تعداد زیادی عنصر مکعبی شکل تقسیم می‌کنیم. اگر عنصر i ام دارای حجمی برابر Δv_i و سطح کلی برابر Δs_i باشد، در آن صورت شار بردار \bar{A} که از عنصر سطح Δs_i خارج می‌شود برابر است با:

$$\Delta \phi_i = \oint_{\Delta s_i} \bar{A} \cdot \bar{ds} = (\nabla \cdot \bar{A}) \Delta v_i \quad (105-1)$$

حال اگر شارهای کلیه عناصر را با یکدیگر جمع کنیم، برای هر عنصری که کاملاً در درون حجم V واقع است شار خالص خارج شده از آن برابر مجموع شارهایی است که از شش عنصر مجاور به آن وارد می‌شوند. در نتیجه شارهای عناصری که کاملاً در داخل سطح بسته S قرار دارند یکدیگر را خنثی می‌کنند، لیکن عناصری که حداقل یک وجه آنها به سطح S محدود شود دارای شار خالص غیر صفر می‌باشند. بنابراین شار بردار \bar{A} که از سطح بسته S میگذرد از طرفی برابر $\phi = \oint_S \bar{A} \cdot \bar{ds}$ و از طرف دیگر، چون $d\phi = \bar{A} \cdot \bar{ds} = (\nabla \cdot \bar{A}) dv$ است، برابر با $\phi = \int_V (\nabla \cdot \bar{A}) dv$ است. در نتیجه رابطه زیر که بیان قضیه گوس یا قضیه دیورژانس است بدست می‌آید:

$$\oint_S \bar{A} \cdot \bar{ds} = \int_V (\nabla \cdot \bar{A}) dv \quad (106-1)$$

باید توجه شود که رابطه (۱۰۶-۱) صرفاً بر اساس تعریف دیورژانس یک بردار که در رابطه (۱-۹۶) آمده است استخراج گردید و از اینرو مستقل از نوع دستگاه مختصات بکار رفته می‌باشد. با استفاده از قضیه گوس میتوان یک انتگرال سطح را به یک انتگرال حجم تبدیل نمود.

دیورژانس در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی: محاسبه دیورژانس در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی را میتوان با دنبال نمودن همان روشی که در دستگاههای مختصات مستطیلی بکار رفت انجام داد. جزئیات محاسبات بعنوان تمرین بعهدہ دانشجویان واگذار می‌شود. میتوان نشان داد که در یک دستگاه مختصات متعامد دیورژانس بردار \bar{A} از رابطه کلی زیر بدست می‌آید:

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (107-1)$$

که در آن:

$$\bar{A} = A_1 \hat{a}_{u_1} + A_2 \hat{a}_{u_2} + A_3 \hat{a}_{u_3}$$

با استفاده از جدول (۳-۱) در رابطه (۱۰۷-۱)، عبارات دیورژانس در دستگاههای مختصات

استوانه‌ای و کروی بترتیب بشرح زیر خلاصه می‌شوند :

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (108-1)$$

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi) \right] \quad (109-1)$$

برای روشن شدن مفهوم فیزیکی دیورژانس میتوان مثال یک سیال غیرقابل تراکم را در نظر گرفت که چگالی حجمی آن ρ و سرعت آن در هر نقطه برابر \bar{v} است. برای چنین سیالی $\nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0$ است، زیرا شار جرم وارد شده به یک سطح بسته همواره برابر شار خارج شده از آن است. بعبارت دیگر یک سیال غیرقابل تراکم نه در اطراف نقطه‌ای منبسط و نه به سمت نقطه‌ای متراکم می‌شود. ولی اگر یک ماده قابل انفجار را در نظر بگیریم که دارای حجم معینی باشد، پس از انفجار حجم ماده افزایش یافته و مقداری جرم از مرزهای حجم قبل از انفجار ماده عبور می‌کند. در این حالت $\nabla \cdot (\rho \bar{v}) > 0$ خواهد بود. در مبحث میدان الکتریکی اگر در بخشی از فضا که محدود به سطح بسته S است بار الکتریکی موجود باشد دیورژانس شدت میدان الکتریکی مقداری غیر صفر خواهد داشت. بطور خلاصه دیورژانس یک کمیت برداری را میتوان به مولد (یا یکی از مولدهای) آن کمیت منسوب نمود و مقدار غیر صفر دیورژانس را در نقطه‌ای به منزله حضور مولد در آن نقطه تعبیر کرد. مثال (۷-۱) با استفاده از قضیه گوس، حاصل $\oint_S \bar{A} \cdot d\bar{s}$ را برای $\bar{A} = r \cos \varphi \hat{a}_r - r \sin \varphi \hat{a}_\varphi$ و سطح بسته S نشان داده شده در شکل (۲۰-۱) محاسبه نمایید.
حل:

این مسأله را قبلاً در مثال (۵-۱) با روش انتگرال‌گیری مستقیم روی سطح مورد بررسی قرار داده و مقدار $a^2 l / 2$ را برای انتگرال مذکور محاسبه نموده‌ایم. اکنون با استفاده از قضیه گوس میتوان نوشت:

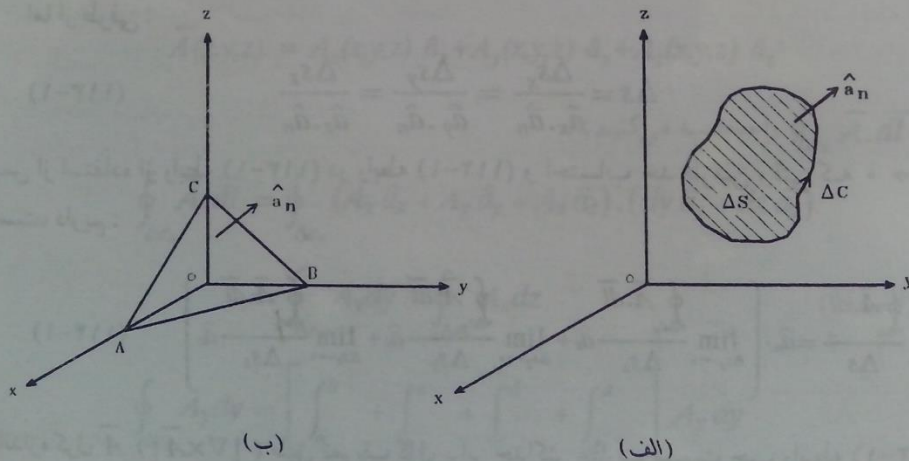
$$\begin{aligned} \oint_S \bar{A} \cdot d\bar{s} &= \int_V (\nabla \cdot \bar{A}) dv \\ \nabla \cdot \bar{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (-r \sin \varphi) = \cos \varphi \\ \int_V (\nabla \cdot \bar{A}) dv &= \int_V \cos \varphi dv = \int_V r \cos \varphi dr d\varphi dz \\ &= \int_0^a r dr \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^l dz = \left(\frac{1}{2} a^2\right) (1) (l) = \frac{1}{2} a^2 l \end{aligned}$$

□

■ کرل

هر مبحث گرادیان نشان داده شد که اگر میدان برداری \bar{A} بر حسب گرادیان تابع اسکالر f قابل بیان باشد، انتگرال $\oint \bar{A} \cdot d\bar{l}$ حول هر مسیر بسته‌ای همواره برابر صفر است. چنین میدانهایی را پایستار^۱ نامند. میدان الکتریکی ساکن بطوریکه بعداً خواهیم دید یک میدان پایستار میباشد. دسته دیگری از میدانها که دارای انتگرال غیر صفر حول یک مسیر بسته هستند غیرپایستار نامیده می‌شوند. میدان مغناطیسی یک میدان غیرپایستار میباشد. مقدار انتگرال یک میدان برداری غیرپایستار را حول یک مسیر بسته به عنوان سیرکولاسیون^۲ آن میدان تعریف می‌کنیم. عنصر سطح ΔS را که دارای محیط ΔC باشد در میدان بردار \bar{A} مطابق شکل (۱-۲۴-الف) در نظر می‌گیریم. سیرکولاسیون بردار \bar{A} حول مسیر بسته ΔC را با $\oint_{\Delta C} \bar{A} \cdot d\bar{l}$ بیان نموده و فرض می‌کنیم که ΔS طوری قرار گرفته باشد که $\oint_{\Delta C} \bar{A} \cdot d\bar{l}$ حداکثر مقدار ممکن را دارا باشد. همچنین بردار واحد \hat{a}_n را عمود بر سطح ΔS طوری در نظر می‌گیریم که در جهت پیشروی پیچ راستگردی باشد که در جهت انتخاب شده روی ΔC بچرخد. آنگاه کرل بردار \bar{A} بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Curl } \bar{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta S} \hat{a}_n \quad (1-110)$$



شکل (۱-۲۴) عناصر سطح مورد نیاز برای تعریف کرل و مؤلفه‌های آن (الف) عنصر سطح برای تعریف کرل (ب) عنصر مثالی شکل سطح برای محاسبه مؤلفه‌های کرل

کرل بردار \bar{A} بصورت $\nabla \times \bar{A}$ نشان داده می شود. همانطور که از رابطه (۱-۱۱۰) بر می آید، کرل یک بردار به نوبه خود یک بردار است. اندازه کرل یک بردار برابر سیرکولاسیون بردار بر واحد سطح است وقتی که سطح به سمت صفر میل نماید و در فرایند میل کردن سطح به سمت صفر $\oint_{\Delta c} \bar{A} \cdot d\bar{l}$ همواره حداکثر باقی بماند.

قبل از اینکه به استخراج فرمول کرل مبادرت کنیم، مؤلفه های کرل یک بردار را مورد بررسی قرار می دهیم. برای این منظور عنصر سطحی را مطابق شکل (۱-۲۴-ب) در نظر گرفته و $\oint_{\Delta c} \bar{A} \cdot d\bar{l}$ را به سه انتگرال بشرح زیر تجزیه می کنیم:

$$\oint_{ABCA} \bar{A} \cdot d\bar{l} = \oint_{BCOB} \bar{A} \cdot d\bar{l} + \oint_{AOCA} \bar{A} \cdot d\bar{l} + \oint_{ABOA} \bar{A} \cdot d\bar{l} \quad (1-111)$$

عناصر سطح ABC ، BCO ، AOC و ABO را به ترتیب با Δs_x ، Δs_y و Δs_z و محیط های آنها را به ترتیب با Δc_x ، Δc_y و Δc_z نشان می دهیم. پس از تقسیم طرفین رابطه (۱-۱۱۱) بر Δs میتوان نوشت:

$$\frac{\oint_{\Delta c} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s} = \frac{\oint_{\Delta c_x} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s} + \frac{\oint_{\Delta c_y} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s} + \frac{\oint_{\Delta c_z} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s} \quad (1-112)$$

اما از طرفی:

$$\Delta s = \frac{\Delta s_x}{\hat{a}_x \cdot \hat{a}_n} = \frac{\Delta s_y}{\hat{a}_y \cdot \hat{a}_n} = \frac{\Delta s_z}{\hat{a}_z \cdot \hat{a}_n} \quad (1-113)$$

پس از استفاده از رابطه (۱-۱۱۳) در رابطه (۱-۱۱۲) و احتساب حد طرفین وقتی که $\Delta s \rightarrow 0$ است، داریم:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta c} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s} = \hat{a}_n \cdot \left(\lim_{\Delta s_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta c_x} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s_x} \hat{a}_x + \lim_{\Delta s_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta c_y} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s_y} \hat{a}_y + \lim_{\Delta s_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta c_z} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s_z} \hat{a}_z \right) \quad (1-114)$$

اندازه کرل \bar{A} ($|\nabla \times \bar{A}|$) طبق تعریف کرل برابر حداکثر عبارت سمت چپ رابطه (۱-۱۱۴) میباشد. واضح است که این مقدار حداکثر وقتی حاصل می شود که در سمت راست رابطه (۱-۱۱۴) بردار واحد \hat{a}_n و برداری که در داخل پرانتز میباشد هم جهت باشند (زاویه بین آنها صفر باشد). لذا بردار داخل پرانتز در واقع $\nabla \times \bar{A}$ میباشد و برای بدست آوردن هر کدام از مؤلفه های آن کافی است که سیرکولاسیون بر واحد سطحی عمود بر امتداد مؤلفه مورد نظر را، وقتی آن سطح به سمت صفر

میل میکند، محاسبه کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم مؤلفه x کرل بردار \bar{A} را در نقطه‌ای به مختصات (x, y, z) بدست آوریم، کافی است عنصر سطح ΔS_x را موازی صفحه yz و حول نقطه (x, y, z) در نظر گرفته و حد عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$(\nabla \times \bar{A})_x = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S_x} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta S_x}$$

نتیجه بدست آمده در رابطه (۱-۱۱۴) گرچه برای مؤلفه‌های کرل یک بردار در دستگاه مختصات مستطیلی و با استفاده از یک عنصر سطح مثلثی شکل بدست آمد، ولی در هر دستگاه مختصات متعامد و برای هر عنصر سطح دلخواه نیز صادق است.

برای استخراج فرمول کرل باید مؤلفه‌های $\nabla \times \bar{A}$ را جداگانه محاسبه نمود. در اینجا فقط به محاسبه یکی از مؤلفه‌ها، مثلاً مؤلفه x در دستگاه مختصات مستطیلی، اکتفا می‌کنیم. روشی که ارائه خواهد شد را میتوان برای محاسبه مؤلفه‌های کرل در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی نیز بکار برد. جهت سهولت، عنصر سطح ΔS_x را به شکل مربع مستطیلی با ابعاد dy و dz ، مطابق شکل (۱-۲۵)، در نظر می‌گیریم. مختصات نقطه a را برابر (x, y, z) فرض می‌کنیم و در این صورت مختصات سه رأس دیگر عنصر سطح مشخص خواهند بود. بردار \bar{A} در نقطه a عبارت است از:

$$\bar{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z) \hat{a}_x + A_y(x, y, z) \hat{a}_y + A_z(x, y, z) \hat{a}_z$$

حال $\oint_{\Delta S_x} \bar{A} \cdot d\bar{l}$ را محاسبه می‌کنیم:

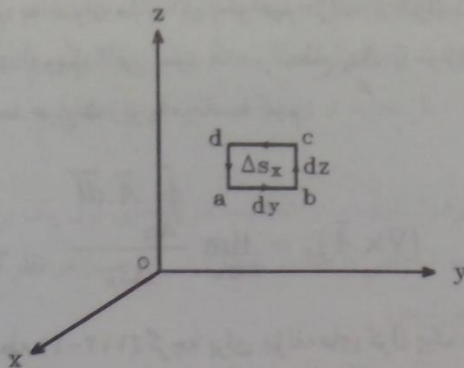
$$\begin{aligned} \oint_{\Delta S_x} \bar{A} \cdot d\bar{l} &= \oint_{\Delta S_x} (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \cdot (dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z) \\ &= \oint_{\Delta S_x} A_y dy + \oint_{\Delta S_x} A_z dz \end{aligned} \quad (1-115)$$

$$\oint_{\Delta S_x} A_y dy = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] A_y dy$$

چون در فواصل b تا c و d تا a تغییرات y صفر است:

$$\int_b^c A_y dy = \int_d^a A_y dy = 0 \quad (1-116)$$

آنگاه:



شکل (۱-۲۵) عنصر سطح مستطیلی شکل Δs_x با محیط Δc_x برای محاسبه مؤلفه x کرل یک بردار

$$\oint_{\Delta c_x} A_y dy = \int_a^b A_y dy + \int_c^d A_y dy$$

$$= A_y(x, y, z) dy - A_y(x, y, z + dz) dy \quad (117-1)$$

در محاسبه $\int_a^b A_y dy$ مقدار A_y در فاصله a تا b تقریباً ثابت و برابر A_y در نقطه a فرض شده است. بدیهی است که این تقریب وقتی که dy به سمت صفر میل کند به یک تساوی دقیق تبدیل خواهد شد. به همین ترتیب مقدار A_y در فاصله c تا d تقریباً ثابت و برابر مقدارش در نقطه d ، که به مختصات $(x, y, z + dz)$ است، فرض شده است. به نحو مشابه میتوان نشان داد که:

$$\oint_{\Delta c_x} A_z dz = A_z(x, y + dy, z) dz - A_z(x, y, z) dz \quad (118-1)$$

بنابراین:

$$\lim_{\Delta s_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta c_x} \bar{A} \cdot d\bar{l}}{\Delta s_x} = \lim_{\substack{dy \rightarrow 0 \\ dz \rightarrow 0}} \frac{\oint_{\Delta c_x} A_y dy + \oint_{\Delta c_x} A_z dz}{dy dz} = (\nabla \times \bar{A})_x$$

$$= \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{A_y(x, y, z) - A_y(x, y, z + dz)}{dz} + \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{A_z(x, y + dy, z) - A_z(x, y, z)}{dy}$$

$$(\nabla \times \bar{A})_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad (119-1)$$

سایر مؤلفه‌های $\nabla \times \bar{A}$ را میتوان مطابق روش فوق محاسبه نمود. سرانجام بطور خلاصه میتوان نوشت:

$$\nabla \times \bar{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z \quad (120-1)$$

در دستگاه مختصات مستطیلی، کرل بردار \bar{A} را میتوان نتیجه ضرب خارجی عملگر ∇ در بردار \bar{A} دانست:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right) \times (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z \quad (121-1) \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه ضرب خارجی بصورت دترمینان نیز نوشت، داریم:

$$\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (122-1)$$

کرل در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی: محاسبه کرل در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی را میتوان با بکار بستن همان روشی که در دستگاه مختصات مستطیلی استفاده شد، انجام داد. در اینجا فقط به ذکر نتیجه کلی برای یک دستگاه مختصات متعامد اکتفا می‌کنیم

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{a}_{u_1} & h_2 \hat{a}_{u_2} & h_3 \hat{a}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (123-1)$$

با استفاده از جدول (۳-۱) در رابطه (۱۲۳-۱) و بسط دترمینان، عبارات کرل در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بترتیب به شرح زیر خلاصه می‌گردند:

$$\nabla \times \bar{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{a}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{a}_z \quad (124-1)$$

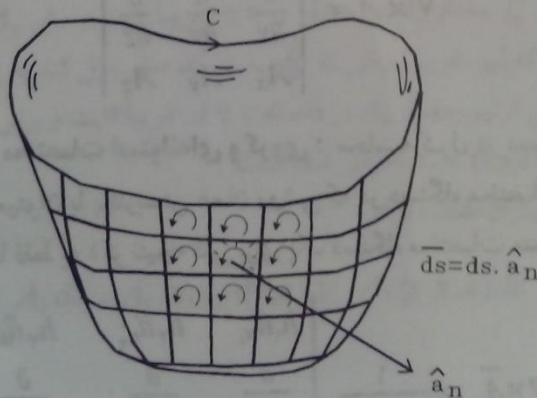
$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{a}_\varphi \quad (1-125)$$

قضیه استوکس^۱: سطح S را که به منحنی بسته C محدود می‌شود، مطابق شکل (۱-۲۶)، در نظر می‌گیریم. اگر این سطح را به عناصر کوچک تقسیم نماییم در این صورت برای هر عنصر سطح با توجه به تعریف کرل میتوان نوشت:

$$\oint_{\Delta c_i} \bar{A} \cdot d\bar{l}_i = (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s}_i \quad (1-126)$$

لیکن:

$$\sum_{\text{تمام عناصر سطح}} (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s}_i = \int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s} = \sum_{\Delta c_i} \oint_{\Delta c_i} \bar{A} \cdot d\bar{l}_i$$



شکل (۱-۲۶) سطح S محدود به منحنی بسته C برای اثبات قضیه استوکس

کلیه اضلاع عناصر سطح بجز آنهایی که محدود به منحنی بسته C می‌شوند دوبار در مجموع $\sum \oint_{\Delta c_i} \bar{A} \cdot d\bar{l}_i$ ظاهر می‌شوند و لذا سهم هر ضلع در مجموع صفر می‌باشد (زیرا در امتداد هر ضلع دوبار ولی در دو جهت مخالف انتگرال گرفته می‌شود). بدین ترتیب نتیجه زیر را که همان بیان قضیه استوکس است بدست می‌آوریم:

$$\int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{ds} = \oint_C \bar{A} \cdot \bar{dl} \quad (127-1)$$

اگر منحنی بسته C را بتدریج کوچک نماییم بطوریکه نهایتاً محیط آن صفر شود، در آنصورت انتگرال $\oint_C \bar{A} \cdot \bar{dl}$ به سمت صفر میل خواهد کرد و سطح S نیز بصورت یک سطح بسته درخواهد آمد. لذا، نتیجه زیر، که بیان میکند انتگرال کرل هر بردار روی هر سطح بسته‌ای همواره صفر است، را می‌توان بدست آورد:

$$\oint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot \bar{ds} = 0 \quad (128-1)$$

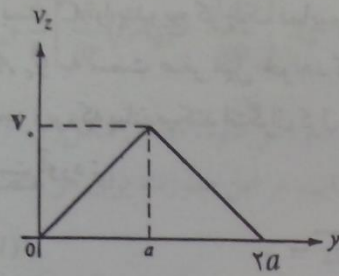
به منظور روشن شدن مفهوم فیزیکی کرل، چرخ پره‌داری را مطابق شکل (۱-۲۷-الف) مطالعه می‌کنیم. جریانی از آب در امتداد محور z که دارای سرعت \bar{v} باشد را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که سرعت \bar{v} مستقل از ارتفاع آب باشد و بطور یکنواخت از مقدار صفر در جدار ظرف تا مقدار حداکثری مانند v_0 در وسط ظرف افزایش یابد. بدین ترتیب بردار سرعت فقط دارای مؤلفه \hat{a}_z بوده و تابعی خطی از y می‌باشد، بطوریکه می‌توان نوشت:

$$\bar{v} = \begin{cases} v_0 \frac{y}{a} \hat{a}_z & 0 < y < a \\ v_0 \frac{2a-y}{a} \hat{a}_z & a < y < 2a \end{cases} \quad (129-1)$$

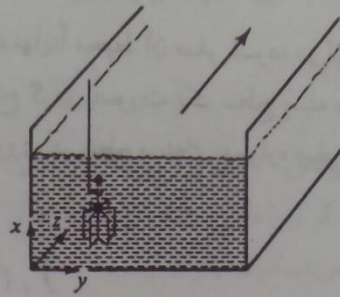
کرل بردار سرعت برابر است با:

$$\nabla \times \bar{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} \hat{a}_x = \begin{cases} \frac{v_0}{a} \hat{a}_x & 0 < y < a \\ -\frac{v_0}{a} \hat{a}_x & a < y < 2a \end{cases} \quad (130-1)$$

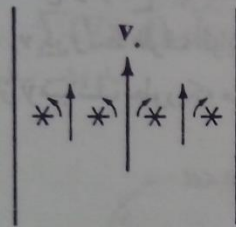
تغییرات v_z و $(\nabla \times \bar{v})_x$ بر حسب y در شکل (۱-۲۷) نشان داده شده‌اند. حال چرخ پره‌داری را در نظر می‌گیریم که بطور قائم در آب فرو رفته باشد و فرض می‌کنیم که اصطکاک چرخ با آب قابل اغماض بوده و حضور آن در آب تأثیری بر سرعت آب نداشته باشد. ملاحظه می‌کنیم که وقتی چرخ در ناحیه‌ای قرار بگیرد که $0 < y < a$ است، در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و وقتی که در ناحیه $a < y < 2a$ واقع شود، در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. بعلاوه وقتی چرخ را در امتداد عرض یا عمق جریان آب حرکت دهیم (در امتداد y یا x) سرعت چرخش تغییری نمی‌کند. در مرکز جریان آب ($y=a$) سرعت چرخش صفر است، زیرا جریان آب نیروهای مساوی به پره‌های دو طرف محور



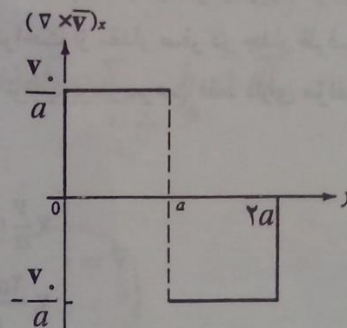
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل (۲۷-۱) چرخ پره‌دار به منظور تشریح مفهوم فیزیکی کرل یک بردار (الف) چرخ پره‌دار در آب (ب) تغییرات سرعت آب (ج) مؤلفه x کرل بردار سرعت (د) جهت چرخش پره‌ها

وارد می‌آورد. حال اگر رفتار چرخ پره‌دار را با منحنی تغییرات $(\nabla \times \vec{v})_x$ مقایسه کنیم، مفهوم فیزیکی کرل روشن می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که سرعت چرخش در هر نقطه متناسب با اندازه $\nabla \times \vec{v}$ است. اگر چرخ را بطور افقی (محور آن در امتداد محور z) یا عرضی (محور آن در امتداد محور y) در آب قرار دهیم، هیچگونه چرخشی مشاهده نخواهد شد. به بیان دیگر بردار سرعت در جهات افقی و عرضی دارای کرل صفر می‌باشد.

مثال (۸-۱) با استفاده از قضیه استوکس، حاصل $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ را روی مسیر شکل (۱-۱۵) برای بردار $\vec{A} = (2x + y^2)\hat{a}_x + (3y - 4x)\hat{a}_y$ محاسبه نمایید.

حل:

این مسأله را قبلاً در مثال (۲-۱) به روش انتگرال‌گیری مستقیم روی مسیر بسته مورد بررسی

قرار داده و مقدار $-\frac{1}{3}$ را برای انتگرال مذکور محاسبه نموده ایم. اکنون با استفاده از قضیه استوکس میتوان نوشت:

$$\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s}$$

$$\nabla \times \bar{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z = (-\tau - \tau y) \hat{a}_z, \quad d\bar{s} = dx dy \hat{a}_z$$

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s} &= - \int_S (\tau + \tau y) dx dy = - \int_0^1 dx \int_0^{x/\tau} (\tau + \tau y) dy \\ &= - \int_0^1 \left(\tau x + \frac{x^2}{\tau} \right) dx = - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

■ لاپلاسیان^۱

لاپلاسیان یک تابع اسکالر بصورت دیورژانس گرادیان آن تابع تعریف می شود. در دستگاه مختصات مستطیلی لاپلاسیان تابع اسکالر f را میتوان به سهولت محاسبه نمود. لاپلاسیان با علامت ∇^2 نمایش داده می شود.

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (۱۳۱-۱)$$

بطور کلی در یک دستگاه مختصات متعامد لاپلاسیان تابع اسکالر f عبارت است از:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \quad (۱۳۲-۱)$$

با استفاده از جدول (۳-۱) در رابطه (۱۳۲-۱) میتوان عبارات لاپلاسیان را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بترتیب به شرح زیر بدست آورد:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (۱۳۳-۱)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (۱۳۴-۱)$$

لاپلاسین یک تابع برداری بصورت گرادبان دیورژانس منهای کرل کرل آن بردار تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \times \nabla \times \bar{A} \quad (1-135)$$

میتوان نشان داد که در دستگاه مختصات مستطیلی لاپلاسین یک بردار مساوی مجموع لاپلاسین مؤلفه‌های آن میباشد:

$$\nabla^2 \bar{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{a}_x + (\nabla^2 A_y) \hat{a}_y + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z \quad (1-136)$$

در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی لاپلاسین بردار \bar{A} را باید از بسط عبارت سمت راست رابطه (1-135) بدست آورد، زیرا در دستگاههای مختصات مذکور مؤلفه‌های لاپلاسین یک بردار مساوی لاپلاسین مؤلفه‌های متناظر آن نیستند.

■ قضیه هلمولتز^۱

در قسمتهای قبلی با مفاهیم گرادبان، دیورژانس و کرل آشنا شدیم. اگر برداری دارای دیورژانس صفر باشد شار خالص گذرنده از هر سطح بسته دلخواه برای چنین برداری همواره صفر است. یک بردار با دیورژانس صفر را بردار یا میدان برداری سلنوییدی^۲ نامند. بعلاوه اگر برداری دارای کرل صفر باشد سیرکولاسیون چنین برداری روی هر مسیر بسته دلخواه همواره صفر است. چنین برداری معروف یک میدان پایستار است و از آن بعنوان بردار یا میدان برداری غیرچرخشی^۳ یاد می‌شود. بردارها را بر حسب اینکه سلنوییدی یا غیر چرخشی باشند یا نه به چهار دسته تقسیم می‌کنند. میدان برداری \bar{A} از نوع:

- سلنوییدی و غیرچرخشی است اگر $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ و $\nabla \times \bar{A} = 0$ باشد،

- سلنوییدی و چرخشی است اگر $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ و $\nabla \times \bar{A} \neq 0$ باشد،

- غیر سلنوییدی و غیر چرخشی است اگر $\nabla \cdot \bar{A} \neq 0$ و $\nabla \times \bar{A} = 0$ باشد،

- غیر سلنوییدی و چرخشی است اگر $\nabla \cdot \bar{A} \neq 0$ و $\nabla \times \bar{A} \neq 0$ باشد.

دیورژانس یک بردار را میتوان به عنوان منبع فورانی^۴ و کرل آن را به عنوان منبع گردابی^۵ آن میدان برداری تلقی کرد. به عنوان مثال بار الکتریکی به منزله یک منبع فورانی برای میدان الکتریکی ساکن و جریان الکتریکی بعنوان یک منبع گردابی برای میدان مغناطیسی ساکن محسوب میشوند.

1 - Helmholtz's Theorem

2 - Solenoidal

3 - Irrotational

4 - Flow Source

5 - Vortex Source

قضیه هلمولتز بیان می‌دارد که اگر دیورژانس و کرل یک بردار در کلیه نقاط فضا معلوم باشند، آن بردار را میتوان (تا حد یک مقدار ثابت برداری) بطور کامل تعیین کرد. به عبارت دیگر، اگر منابع بوجود آورنده یک میدان معلوم باشند آن میدان بطور کامل قابل محاسبه است. اثبات این قضیه در اینجا آورده نمی‌شود ولی بر اهمیت آن در فهم میدانهای برداری تأکید می‌گردد.

یک میدان برداری، که در حالت کلی از نوع غیر سلنوئیدی و چرخشی است، را میتوان به دو میدان که یکی غیر سلنوئیدی و غیر چرخشی و دیگری سلنوئیدی و چرخشی باشد تجزیه کرد. مثلاً برای میدان برداری \bar{A} میتوان نوشت:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_r \quad (137-1)$$

بطوریکه:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{A}_1 = p & (138-1) \\ \nabla \times \bar{A}_1 = 0 & (139-1) \end{cases}$$

و:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{A}_r = 0 & (140-1) \\ \nabla \times \bar{A}_r = \bar{P} & (141-1) \end{cases}$$

\bar{P} و p که بترتیب معرف منابع گردابی و فورانی هستند معلوم فرض میشوند. بدیهی است که:

$$\nabla \cdot \bar{A} = \nabla \cdot \bar{A}_1 = p \quad (142-1)$$

$$\nabla \times \bar{A} = \nabla \times \bar{A}_r = \bar{P} \quad (143-1)$$

بر اساس قضیه هلمولتز اگر \bar{P} و p در کلیه نقاط فضا معلوم باشند، آنگاه \bar{A} بصورت زیر مشخص میشود:

$$\bar{A} = \bar{A}(p, \bar{P}) + \bar{A}_0 \quad (144-1)$$

که \bar{A}_0 یک مقدار ثابت برداری است و با استفاده از شرایط مرزی مسأله تعیین میشود. با توجه به اینکه $\nabla \times \bar{A}_1 = 0$ و از طرف دیگر $\nabla \times (\nabla V) = 0$ که V یک میدان اسکالر دلخواه می‌باشد (برای اثبات این رابطه به مسأله (۲۳-۱) مراجعه کنید) میتوان نوشت:

$$\bar{A}_1 = -\nabla V \quad (145-1)$$

بالاخره با مقایسه $\nabla \cdot \bar{A}_r = 0$ و اتحاد برداری $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{U}) = 0$ (برای اثبات این رابطه به مسأله (۲۳-۱) مراجعه کنید) میتوان نتیجه گرفت که:

$$\bar{A}_r = \nabla \times \bar{U} \quad (۱۴۶-۱)$$

با جایگزین نمودن روابط (۱۴۵-۱) و (۱۴۶-۱) در رابطه (۱۳۷-۱) داریم:

$$\bar{A} = -\nabla V + \nabla \times \bar{U} \quad (۱۴۷-۱)$$

رابطه (۱۴۷-۱) این نتیجه مهم را بیان می‌کند که هر بردار دلخواهی را میتوان بصورت حاصل جمع گرادیان یک تابع اسکالر و کرل یک تابع برداری نوشت. از این نتیجه بعنوان یک رابطه زیر بنایی در تجزیه و تحلیل مسائل الکترومغناطیس استفاده می‌شود.

■ خلاصه فصل

- قواعد ساده برداری از جمله جمع، تفریق، ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها را مطالعه نمودیم.
- دستگاههای مختصات متعامد و از جمله دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی را تعریف نموده و بردارهای واحد در این دستگاهها و خواص آنها را مطالعه کردیم. همچنین جمع و ضرب بردارها را بر حسب مؤلفه‌هایشان در دستگاههای مختصات مزبور بیان داشتیم.
- بردار مکان را به منظور مشخص نمودن نقاط فضا تعریف کرده و بیان آن را در دستگاههای مختلف آموختیم.
- انتگرالهای خط، سطح و حجم و نحوه محاسبه آنها را مطالعه نمودیم.
- مشتقات توابع اسکالر و برداری، به خصوص گرادیان، دیورژانس و کول را تعریف کرده و نتایج را در حالت کلی در یک دستگاه مختصات متعامد بیان داشتیم.
- قضیه گوس (یا قضیه دیورژانس) که انتگرال حجم را به انتگرال سطح یا بالعکس و قضیه استوکس که انتگرال سطح را به انتگرال خط یا بالعکس تبدیل میکند را نتیجه‌گیری کردیم:

$$\int_V \nabla \cdot \bar{A} dv = \oint_S \bar{A} \cdot d\bar{s} \quad \text{قضیه گوس}$$

$$\int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s} = \oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} \quad \text{قضیه استوکس}$$

- نشان دادیم که گرادیان یک تابع اسکالر همواره یک میدان برداری پایستار است:

$$\oint_C (\nabla V) \cdot d\bar{l} = 0$$

- قضیه هلمولتز را که بیان می‌دارد یک بردار را با در دست داشتن دیورژانس و کول آن میتوان بطور کامل (تا حد یک بردار ثابت) تعیین نمود، به اختصار بررسی کردیم.

■ مسائل

۱-۱ به فرض آنکه $\bar{A} = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z$ ، $\bar{B} = \hat{a}_x + \hat{a}_z$ و $\bar{C} = \hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$ باشد، عبارات زیر را محاسبه کنید:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------|
| (الف) $\bar{A} + \bar{B}$ | (ب) $ \bar{B} - \bar{C} $ | (ج) $\bar{B} \cdot \bar{C}$ |
| (د) $\bar{A} \times \bar{B}$ | (ه) $\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})$ | |

۲-۱ صحت اتحادهای برداری زیر را تحقیق کنید:

- (الف) $\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B} \cdot (\bar{C} \times \bar{A}) = \bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B})$
 (ب) $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B})$
 (ج) $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot (\bar{C} \times \bar{D}) = (\bar{A} \cdot \bar{C})(\bar{B} \cdot \bar{D}) - (\bar{B} \cdot \bar{C})(\bar{A} \cdot \bar{D})$
 (د) $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) + \bar{B} \times (\bar{C} \times \bar{A}) + \bar{C} \times (\bar{A} \times \bar{B}) = 0$

۳-۱ نتایج ضرب داخلی یا خارجی بردارهای واحد زیر را بدست آورید:

- | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| (الف) $\hat{a}_\phi \times \hat{a}_x$ | (ب) $\hat{a}_{r_s} \times \hat{a}_z$ | (ج) $\hat{a}_{r_c} \cdot \hat{a}_\theta$ |
| (د) $\hat{a}_\theta \times \hat{a}_z$ | (ه) $\hat{a}_{r_c} \cdot \hat{a}_{r_s}$ | (و) $\hat{a}_{r_c} \times \hat{a}_{r_s}$ |
| (ز) $\hat{a}_{r_s} \times \hat{a}_y$ | (ح) $\hat{a}_x \cdot \hat{a}_{r_c}$ | (ط) $\hat{a}_{r_s} \cdot \hat{a}_z$ |

جهت رفع ابهام بردار واحد \hat{a}_r در دستگاه مختصات استوانه‌ای با \hat{a}_{r_c} و بردار واحد \hat{a}_r در دستگاه مختصات کروی با \hat{a}_{r_s} نشان داده شده است.

۴-۱ بردار $\bar{A} = (3/r) \hat{a}_r$ در دستگاه مختصات کروی داده شده است. مقادیر \bar{A} و A_y را در نقطه $M(-2, -4, 4)$ محاسبه نمایید.

۵-۱ بردارهای $\bar{A} = 3\hat{a}_x + 8\hat{a}_y + \hat{a}_z$ ، $\bar{B} = \hat{a}_x - 6\hat{a}_y + 5\hat{a}_z$ و $\bar{C} = 7\hat{a}_x - 4\hat{a}_z$ داده شده‌اند. مطلوب است تعیین:

- (الف) بردار واحدی که بردار \bar{A} و \bar{B} عمود باشد،
 (ب) بردار واحدی که بر بردارهای $\bar{A} - \bar{B}$ ، $\bar{B} - \bar{C}$ و $\bar{C} - \bar{A}$ عمود باشد،
 (ج) مساحت مثلثی که از وصل سه نقطه انتهایی بردارهای \bar{A} ، \bar{B} و \bar{C} حاصل شود.

۶-۱ سه نقطه به مختصات $A(-4, 6, 5)$ ، $B(-2, 3, 0)$ و $C(6, 2, -3)$ داده شده‌اند.

مطلوب است محاسبه :

الف) مساحت مثلث ABC

ب) بردار واحدی که بر سطح مثلث ABC عمود باشد.

۷-۱ بردار $\vec{A} = 2xyz \hat{a}_x - 5(x+y+z)\hat{a}_z$ داده شده است.

الف) بردار \vec{A} را بر حسب مختصات استوانه‌ای و بردارهای واحد استوانه‌ای بیان کنید.

ب) $|\vec{A}|$ را در نقطه $(r=2, \varphi=\pi/3, z=3)$ محاسبه کنید.

۸-۱ نقطه $A(3, -4, 5)$ را در نظر بگیرید.

الف) بردار واحد \hat{a}_x را بر حسب مؤلفه‌های مختصات کروی در نقطه A بیان کنید.

ب) بردار واحد \hat{a}_θ را بر حسب مؤلفه‌های مختصات مستطیلی در نقطه A بیان کنید.

۹-۱ فرض کنید \vec{A} و \vec{B} دو بردار واقع در صفحه xy باشند که با محور x به ترتیب زوایای α و β

می‌سازند. با استفاده از ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها صحت اتحادهای مثلثاتی زیر را

تحقیق نمایید :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{الف})$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{ب})$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{ج})$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{د})$$

۱۰-۱ مثلثی از سه بردار \vec{A} ، \vec{B} و \vec{C} تشکیل شده است بطوریکه $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$ می‌باشد. اندازه‌های

این بردارها را به ترتیب a ، b و c فرض می‌کنیم. با استفاده از قانون ضرب داخلی بردارها نشان دهید

که $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ که γ زاویه بین بردارهای \vec{A} و \vec{B} می‌باشد. (راهنمایی: از رابطه

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) \text{ استفاده کنید.})$$

۱۱-۱ مثلث ABC به اضلاع $AB = c$ ، $BC = a$ و $CA = b$ را در نظر بگیرید. با استفاده از

رابطه برداری $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$ و ضرب خارجی بردار \vec{AB} ، \vec{BC} یا \vec{CA} در رابطه مزبور

نشان دهید که :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

۱۲-۱ بردارهای \vec{A} و \vec{B} مفروضند. رابطه‌ای بدست آورید که مؤلفه بردار \vec{A} را در امتداد بردار \vec{B}

تعیین نماید. این رابطه باید کاملاً عمومی و مستقل از دستگاه مختصات بخصوصی باشد. سپس با استفاده از رابطه‌ای که بدست آورده‌اید مؤلفه $\bar{A} = -4\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$ را در امتداد $\bar{B} = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - \hat{a}_z$ محاسبه کنید.

۱۳-۱ مشتقات $d\hat{a}_\phi/d\phi$ و $d\hat{a}_r/d\phi$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

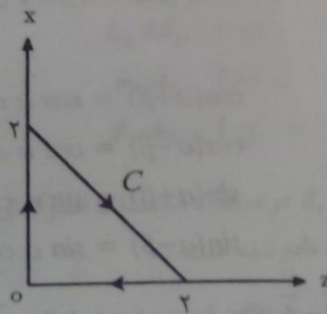
۱۴-۱ مطلوب است محاسبه انتگرال خط $\int_C \bar{A} \cdot d\bar{l}$ از نقطه $A(2, 1, -2)$ تا نقطه $B(8, 2, -2)$ برای $\bar{A} = y\hat{a}_x + x\hat{a}_y$ وقتی که:

الف) مسیر C عبارت از خط راستی است که A را به B وصل می‌کند.

ب) مسیر C در امتداد یک سهمی به معادله $x = 2y^2$ می‌باشد.

آیا میدان برداری \bar{A} از نوع پایستار است؟ توضیح دهید.

۱۵-۱ حاصل $\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l}$ را برای بردار $\bar{A} = (2x^2 + z^2)\hat{a}_x + (xz - z^2)\hat{a}_z$ و مسیر بسته C مطابق شکل (م-۱-۱۵) محاسبه نمایید. این محاسبه را با استفاده از قضیه استوکس تکرار کنید.



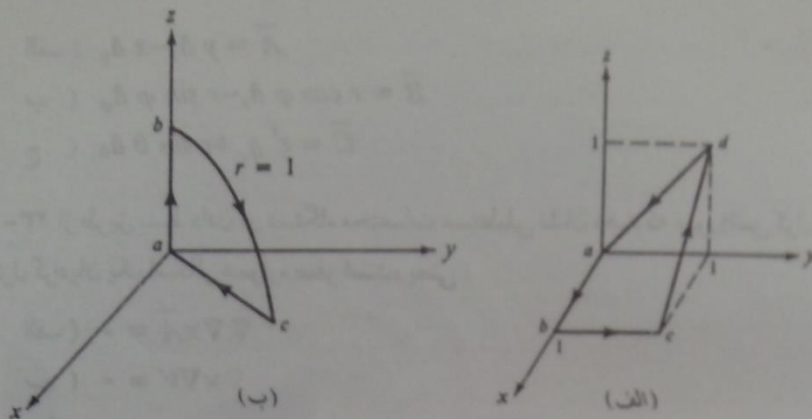
شکل (م-۱-۱۵)

۱۶-۱ انتگرال خط $\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l}$ را برای دو حالت زیر محاسبه نمایید:

الف) $\bar{A} = xy\hat{a}_x + yz\hat{a}_y + zx\hat{a}_z$ و C بصورت مسیری بسته $abcd$ مطابق شکل (م-۱۶-۱-الف).

ب) $\bar{A} = (e^{-r}/r)\hat{a}_\theta$ و C بصورت مسیری بسته $abca$ مطابق شکل (م-۱۶-۱-ب).

۱۷-۱ برای بردار $\bar{A} = x^2yz\hat{a}_x + y^2zx\hat{a}_y + z^2xy\hat{a}_z$ انتگرال سطح $\oint_S \bar{A} \cdot d\bar{s}$ را محاسبه کنید. S سطح بسته‌ای است که به صفحات $x = 0, y = 0, z = 0$ و $x + 2y + 3z = 3$ محدود می‌باشد.



شکل (۱-۱-۱۶)

۱۸-۱ میدان برداری $\vec{A} = r \cos \varphi \hat{a}_r + r \sin \varphi \hat{a}_\varphi + \hat{a}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است. مطلوب است محاسبه $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ که عبارت است از:

- الف) سطح بسته محدود به صفحات $z = l$ و $z = 0$ و سطح استوانه‌ای $r = a$
 ب) سطح بسته محدود به صفحات $z = l$ و $z = 0$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ و سطح استوانه‌ای $r = a$

۱۹-۱ مسأله (۱۸-۱) را با استفاده از قضیه دیورژانس تکرار نمایید.

۲۰-۱ بردار $\vec{A} = z \hat{a}_z$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ که در آن S سطح نیمکره‌ای به مرکز مبدأ مختصات، شعاع ۳ و محدود به صفحه xy می‌باشد. مسأله را از دو طریق، روش انتگرالگیری مستقیم و روش مبتنی بر قضیه دیورژانس حل کنید.

۲۱-۱ انتگرالهای حجم زیر را محاسبه نمایید:

الف) $\int_V xyz \, dv$ که V حجم محدود به صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ و $x + y + z = 1$ میباشد.

ب) $\int_V \frac{dv}{r}$ که V حجم استوانه‌ای است که محورش منطبق بر محور z ، شعاعش برابر a و طولش برابر l می‌باشد.

ج) $\int_V y \, dv$ که V حجم بخشی از کره‌ای به شعاع واحد، به مرکز مبدأ مختصات و واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا می‌باشد (در $\frac{1}{8}$ اول فضا $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ است).

۲۲-۱ دیورژانس و کرول بردارهای زیر را محاسبه نمایید:

$$\bar{A} = y \hat{a}_x - x \hat{a}_y \quad (\text{الف})$$

$$\bar{B} = r \cos \varphi \hat{a}_r - r \sin \varphi \hat{a}_\varphi \quad (\text{ب})$$

$$\bar{C} = r^\nu \hat{a}_r + r \sin \theta \hat{a}_\theta \quad (\text{ج})$$

۱-۲۳ از طریق بسط دادن در دستگاه مختصات مستطیلی نشان دهید که دیورژانس کرل یک بردار و کرل گرادینان یک اسکالر همواره صفر است، یعنی:

$$\nabla \cdot \nabla \times \bar{A} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times \nabla V = 0 \quad (\text{ب})$$

۱-۲۴ از طریق بسط دادن در دستگاه مختصات مستطیلی نشان دهید که:

$$\nabla \cdot (f \bar{A}) = f \nabla \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \nabla f \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times (f \bar{A}) = (\nabla f) \times \bar{A} + f (\nabla \times \bar{A}) \quad (\text{ب})$$

$$\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B}) \quad (\text{ج})$$

۱-۲۵ ثابت کنید:

$$\int_V (\nabla f) dv = \oint_S f \bar{d}s$$

که f یک کمیت اسکالر و V حجمی محدود به سطح بسته S است.

۱-۲۶ ثابت کنید:

$$\int_V (\nabla \times \bar{A}) dv = -\oint_S \bar{A} \times \bar{d}s$$

که \bar{A} یک بردار دلخواه و V حجمی محدود به سطح بسته S است.

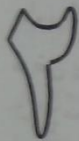
این رابطه می‌تواند مبنای تعریف دومی برای کرل یک بردار قرار گیرد. اگر V به عنصر حجم Δv محدود به سطح بسته Δs تبدیل شود، میتوان نوشت:

$$\nabla \times \bar{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta s} \bar{d}s \times \bar{A}}{\Delta v}$$

به همین ترتیب از رابطه مسأله (۱-۲۵) میتوان نتیجه گرفت:

$$\nabla f = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta s} f \bar{d}s}{\Delta v}$$

مقایسه این نتایج با تعریف دیورژانس در رابطه (۱-۹۶) جالب توجه است.



میدان الکتریکی ساکن در خلا^۱

پس از کسب آشنایی لازم با مفاهیم آنالیز برداری هم اکنون آماده مطالعه میدانهای الکترومغناطیس می‌باشیم. بطور کلی نظریه میدانهای الکترومغناطیس بر مبنای یک دسته معادلات، بنام معادلات ماکسول^۱، استوار میباشد. هدف نهایی ما در این درس نیز آموختن این معادلات و کاربرد آنها در تجزیه و تحلیل مسائل مختلف و بخصوص امواج الکترومغناطیس می‌باشد. وقتی صحبت از میدانهای الکترومغناطیس میشود، وابستگی متقابل و وجود همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باید تفهیم شود. مطالعه نظریه میدانهای الکترومغناطیس را ممکن است مستقیماً از معادلات ماکسول و معادله نیروی لورنتز^۲، بعنوان مفروضات اولیه، شروع نمود. یا روش دیگری اتخاذ نمود که در آن ابتدا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن (مستقل از زمان) را مورد بررسی قرار داده و پس از طی مسیر تکاملی این نظریه، معادلات ماکسول را نتیجه‌گیری نمود و آنگاه مبادرت به مطالعه میدانهای الکترومغناطیس کرد. ما روش دوم را در پیش خواهیم گرفت. منشأ میدانهای الکترومغناطیس بارهای الکتریکی هستند. تغییرات میدانها در فضا بستگی به

1 - Maxwell's Equations

2 - Lorentz Force Equation

مقدار، موقعیت، سرعت و شتاب بارها دارد. در این فصل به مطالعه میدانهایی میپردازیم که از بارهای الکتریکی ساکن ناشی می‌شوند. بارهای الکتریکی بصورت مثبت یا منفی وجود داشته و کوچکترین مقدار بار الکتریکی، بار الکترون فرض می‌شود. واحد اندازه‌گیری بار الکتریکی کولمب^۱ است و با حرف C نشان داده می‌شود. بار الکترون برابر 1.6×10^{-19} - کولمب می‌باشد. در مطالعات خود اصل بقای بار که بیان میکند «بار الکتریکی نه بوجود می‌آید و نه از بین میرود» را همواره رعایت خواهیم کرد. توزیع بارهای الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا ممکن است بصورت نقطه‌ای (نایبوسته) یا پیوسته باشد. در واقع پیوسته بودن توزیع بار با طبیعت ذره‌ای بودن آن مغایرت دارد، ولی با توجه به اینکه سر و کار ما با ابعاد ماکروسکوپی میباشد و نه ابعاد میکروسکوپی، بطوریکه حتی در یک عنصر کوچک طول، سطح یا حجم تعداد بیشماری الکترون وجود دارند، فرض پیوستگی بارها کاملاً معقول خواهد بود. در این فصل میدان الکتریکی و پتانسیل ناشی از انواع مختلف توزیع بارهای الکتریکی در خلاء را مورد مطالعه قرار میدهیم. توزیع بارهای الکتریکی در فضا ممکن است به چهار صورت باشد که عبارتند از:

- توزیع نقطه‌ای؛ بارها در یک یا چند نقطه متمرکز هستند.

- توزیع خطی؛ بارها در امتداد یک خط (مستقیم یا منحنی) توزیع میشوند.

- توزیع سطحی؛ بارها روی یک سطح قرار دارند.

- توزیع حجمی؛ بارها در یک حجم پراکنده هستند.

در سیستم آحاد $M.K.S.$ ، واحد اندازه‌گیری برای چگالی توزیع خطی «کولمب بر متر» (C/m) ، برای چگالی توزیع سطحی «کولمب بر متر مربع» (C/m^2) و برای چگالی توزیع حجمی «کولمب بر متر مکعب» (C/m^3) میباشد. میدان الکتریکی ناشی از بارهای ساکن با توزیع‌های مذکور را ممکن است به چندین روش محاسبه نمود که در آن میان روشهای زیر را در این فصل مطالعه خواهیم کرد:

- مستقیماً با استفاده از قانون کولمب^۲،

- با استفاده از قانون گوس^۳،

- از طریق محاسبه پتانسیل و بدست آوردن گرادیان آن.

1 - Coulomb

2 - Coulomb's Law

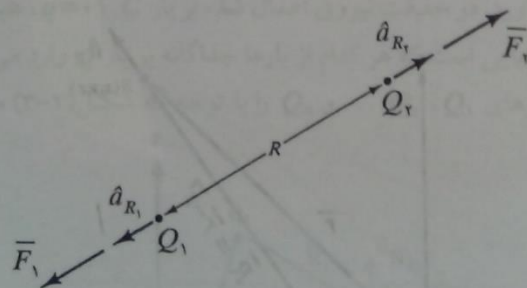
3 - Gauss' Law

۱-۲) قانون کولمب

مطالعات تجربی نشان داده است که نیروی بین دو بار الکتریکی ساکن و نقطه‌ای Q_1 و Q_2 که به فاصله R از یکدیگر قرار دارند طوری است که: الف) بارهای متحدالعلامه یکدیگر را دفع و بارهای مختلف‌العلامه یکدیگر را جذب میکنند. ب) نیروی بین دو بار در امتداد خطی عمل میکند که دو بار را به یکدیگر وصل مینماید. ج) اندازه نیرو متناسب با حاصل ضرب بارها می‌باشد. د) اندازه نیرو متناسب با عکس مربع فاصله دو بار است. این نتایج را که اولین بار توسط کولمب بدست آمده است می‌توان در رابطه زیر تحت عنوان قانون کولمب خلاصه نمود:

$$\bar{F}_1 = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \hat{a}_{R_1} \quad (1-2)$$

\bar{F}_1 نیرویی است که بر بار Q_1 توسط بار Q_2 اعمال میشود. واضح است که نیروی اعمال شده بر بار Q_2 توسط بار Q_1 همواره از رابطه $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$ بدست می‌آید. شکل (۱-۲) نیروهای \bar{F}_1 و \bar{F}_2 را برای دو بار متحدالعلامه نشان میدهد. \hat{a}_{R_1} بردار واحدی در جهت Q_2 بطرف Q_1 میباشد. k ضریب ثابتی است که بستگی به محیط اطراف بارهای Q_1 و Q_2 و همچنین سیستم آحاد دارد. برای خلاء و در سیستم آحاد $M.K.S.$ ، $k = 1/4\pi\epsilon_0$ است، که در آن ϵ_0 را قابلیت گذردگی^۱ یا قابلیت نفوذ الکتریکی خلاء نامیده و مقدار آن برابر با $10^{-12}/36\pi \approx 8.85 \times 10^{-12}$ فاراد بر متر است.



شکل (۱-۲) بارهای متحدالعلامه و نیروهای دافعه بین آنها

۲-۲) شدت میدان الکتریکی

از قانون کولمب نتیجه گرفته میشود که وقتی بار Q_2 در مجاورت بار Q_1 قرار میگیرد به آن نیرویی اعمال میشود. به بیان دیگر می‌توان گفت که بار Q_1 در اطراف خود میدانی بوجود می‌آورد

1 - Permittivity

که هر گاه بار دیگری در آن میدان قرار گیرد به آن نیرویی اعمال میشود. بر حسب تعریف نیرویی را که بار Q_1 بر واحد بار مثبت در نقطه‌ای از فضا وارد می‌آورد شدت میدان الکتریکی حاصل از بار Q_1 در آن نقطه گویند. شدت میدان الکتریکی با حرف \vec{E} نمایش داده شده و در سیستم آحاد $M.K.S.$ با واحد «ولت بر متر» اندازه‌گیری میشود.

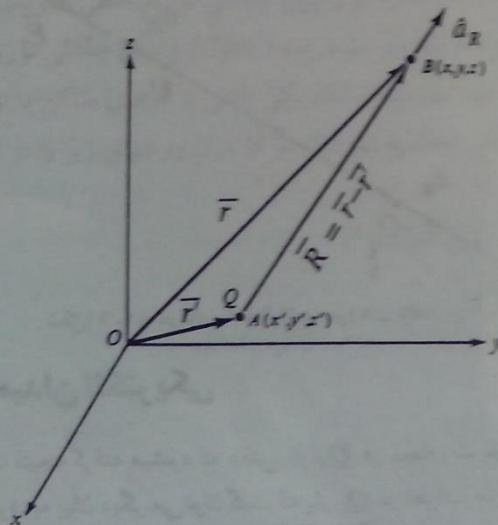
$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (2-2)$$

در رابطه مذکور \vec{E} نیرویی است که بار Q_1 بر بار $Q_2 = +1 C$ اعمال میکند. بطور خلاصه اگر باری به اندازه Q کولمب را در مبدأ مختصات در نظر بگیریم، شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای به مختصات (r, θ, φ) برداری است که فقط مؤلفه \hat{a}_r خواهد داشت:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad (3-2)$$

ولی اگر بار Q در نقطه‌ای غیر از مبدأ مختصات واقع باشد، دیگر تقارن کروی وجود نخواهد داشت. با توجه به شکل (2-2)، شدت میدان ناشی از بار Q واقع در نقطه A (که با بردار مکان \vec{r}' نشان داده میشود) در نقطه B (که با بردار مکان \vec{r} نشان داده می‌شود) عبارت است از:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (4-2)$$



شکل (2-2) نمایش بار نقطه‌ای Q و نحوه محاسبه میدان الکتریکی ناشی از آن

اما می‌دانیم:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (5-2)$$

$$\hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6-2)$$

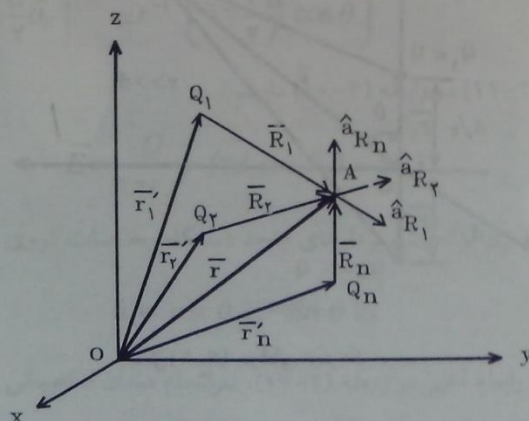
با استفاده از روابط (5-2) و (6-2) در رابطه (4-2) نتیجه زیر حاصل میشود:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7-2)$$

همانطور که در شکل (2-2) ملاحظه میشود دو نوع مختصات در آن بکار رفته‌اند. بر حسب معمول، مختصات بدون پریم، مانند (x, y, z) ، برای مشخص نمودن نقاطی که در آنها محاسبه میدان مورد نظر است بکار می‌روند، در حالیکه مختصات پریم‌دار، مانند (x', y', z') ، برای مشخص نمودن نقاطی که توزیع بار الکتریکی را شامل می‌شوند مورد استفاده قرار می‌گیرند. این قاعده کلی برای انواع توزیعها اعم از نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی و در هر دستگاه مختصاتی و نیز برای میدانهای مغناطیسی که در فصول بعد مطالعه میشوند همواره رعایت خواهد شد.

■ شدت میدان الکتریکی چندین بار نقطه‌ای

میدان الکتریکی چندین بار نقطه‌ای را میتوان از جمع برداری میدانهایی که از یکایک بارها حاصل میشود بدست آورد. در حقیقت نیروی اعمال شده بر بار $q=+1$ C، طبق اصل جمع آثار، برابر جمع برداری نیروهایی است که هر کدام از بارها جداگانه بر بار q وارد می‌آورند. لذا میدان الکتریکی حاصل از بارهای Q_1, Q_2, \dots, Q_n را با توجه به شکل (3-2) می‌توان به شرح



شکل (3-2) نمایش چندین بار نقطه‌ای و نحوه محاسبه میدان الکتریکی ناشی از آنها

زیر محاسبه نمود:

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \hat{a}_{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \hat{a}_{R_2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n^2} \hat{a}_{R_n} = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j^2} \hat{a}_{R_j} \quad (8-2)$$

اما از طرف دیگر:

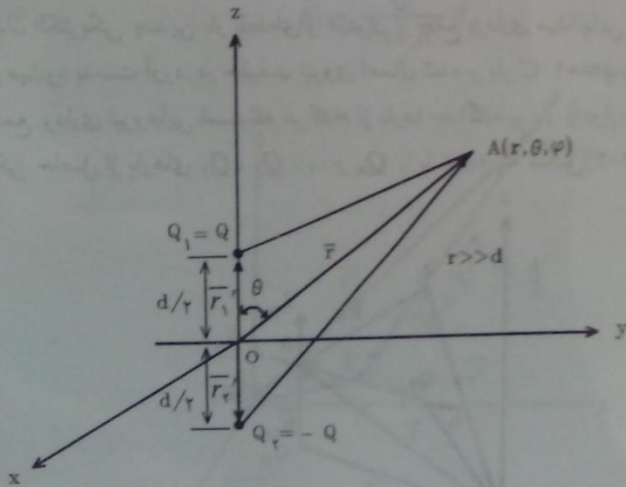
$$R_j = |\vec{r} - \vec{r}_j|, \quad \hat{a}_{R_j} = \frac{\vec{R}_j}{|\vec{R}_j|}$$

در نتیجه:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (9-2)$$

■ دوقطبی الکتریکی

شکل (۴-۲) یک دوقطبی الکتریکی را نشان میدهد که از دو بار نقطه‌ای مساوی و مختلف‌العلامه



شکل (۴-۲) دوقطبی الکتریکی

که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند تشکیل میشود. میخواهیم شدت میدان را در فواصل دور از دو قطبی ($r \gg d$) بدست آوریم. با استفاده از رابطه (۹-۲) میتوان نوشت:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q \left(r \hat{a}_r - \frac{d}{\sqrt{3}} \hat{a}_z \right)}{\left| r \hat{a}_r - \frac{d}{\sqrt{3}} \hat{a}_z \right|^3} + \frac{-Q \left(r \hat{a}_r + \frac{d}{\sqrt{3}} \hat{a}_z \right)}{\left| r \hat{a}_r + \frac{d}{\sqrt{3}} \hat{a}_z \right|^3} \right] \quad (10-2)$$

در نوشتن رابطه (۱۰-۲) فرض شده است که $Q_1 = Q$ ، $Q_2 = -Q$ ، $\vec{r}_1' = (d/\sqrt{3})\hat{a}_z$ ، $\vec{r}_2' = -(d/\sqrt{3})\hat{a}_z$ و $\vec{r} = r \hat{a}_r$ است. برای ساده نمودن رابطه (۱۰-۲)، می نویسیم:

$$\begin{aligned} \left| r \hat{a}_r \pm \frac{d}{\sqrt{3}} \hat{a}_z \right|^{-3} &= \left[\left(r \hat{a}_r \pm \frac{d}{\sqrt{3}} \hat{a}_z \right) \cdot \left(r \hat{a}_r \pm \frac{d}{\sqrt{3}} \hat{a}_z \right) \right]^{-3/2} \\ &= \left[r^2 + \frac{d^2}{3} \pm rd \cos \theta \right]^{-3/2} \end{aligned}$$

با فرض $d < r$:

$$\simeq \left[r^2 \pm rd \cos \theta \right]^{-3/2}$$

$$= r^{-3} \left(1 \pm \frac{d \cos \theta}{r} \right)^{-3/2}$$

و با استفاده از بسط دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$\left| r \hat{a}_r \pm \frac{d}{\sqrt{3}} \hat{a}_z \right|^{-3} \simeq r^{-3} \left(1 \mp \frac{\sqrt{3} d}{r} \cos \theta \right) \quad (11-2)$$

با استفاده از رابطه (۱۱-۲) در رابطه (۱۰-۲) داریم:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3d \cos \theta \hat{a}_r - d \hat{a}_z) \quad (12-2)$$

از طرفی، بردار واحد \hat{a}_z بر حسب بردارهای واحد دستگاه مختصات کروی عبارت است از:

$$\hat{a}_z = \cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta \quad (13-2)$$

با جایگزین نمودن رابطه اخیر در رابطه (۱۲-۲)، سرانجام میدان الکتریکی دو قطبی بصورت زیر خلاصه میشود:

$$\vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta) \quad (14-2)$$

بطوری که از رابطه (۱۴-۲) استنباط میشود، شدت میدان دوقطبی با عکس مکعب مسافت (یعنی r^{-3}) متناسب است و این در حالی است که میدان هر کدام از بارهای Q و $-Q$ با r^{-2} متناسب هستند. این نتیجه ناشی از این حقیقت است که دو بار نقطه‌ای مختلف‌العلامه در فواصل دور میدانهای یکدیگر را تضعیف می‌کنند. در قسمتهای بعدی مطالعات بیشتری در مورد دوقطبی خواهیم داشت.

رابطه (۱۴-۲)، میدان الکترونیکی دوقطبی را در فواصل دور نسبت به d بدست میدهد، ولی همین رابطه را می‌توان شدت میدان دوقطبی در نقطه دلخواه $A(r, \theta, \varphi)$ دانست، برای وقتی که d به سمت صفر میل نموده و همزمان اندازه Qd ثابت باقی بماند. کمیت $p = Qd$ را گشتاور دوقطبی نامیده و برای آن جهتی از بار منفی به سمت بار مثبت در نظر گرفته میشود. بنابراین میدان الکترونیکی دوقطبی که دارای گشتاور p در امتداد محور z باشد برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\theta) \quad (15-2)$$

■ میدان الکترونیکی توزیعهای پیوسته خطی

وقتی بارهای الکترونیکی در امتداد یک خط با چگالی ρ_l توزیع شده باشند، می‌خواهیم میدان الکترونیکی حاصل از این توزیع را در نقطه دلخواه A بدست آوریم. خط حاوی بار را به تعداد زیادی از عناصر کوچک تقسیم نموده و بار موجود در هر عنصر را بصورت یک بار نقطه‌ای تلقی میکنیم. بار عنصر i ام برابر $\Delta Q_i = \rho_l \Delta l_i$ بوده و میدان حاصل از آن در نقطه A با توجه به شکل (۵-۲) عبارت است از:

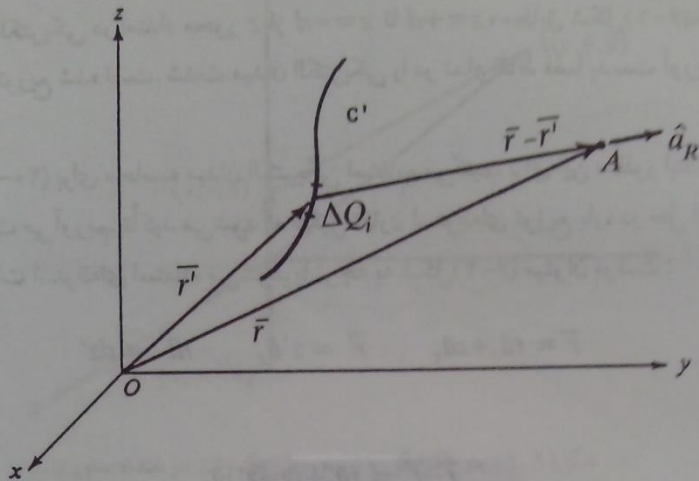
$$\Delta \vec{E}_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \hat{a}_{R_i} = \frac{\rho_l \Delta l_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \hat{a}_{R_i} \quad (16-2)$$

اما از طرفی مقدار کل بار برابر مجموع بارهای عناصر میباشد:

$$Q = \sum_i \Delta Q_i = \sum_i \rho_l \Delta l_i \quad (17-2)$$

در نتیجه با استفاده از اصل جمع آثار، میدان حاصل از کلیه عناصر برابر است با:

$$\vec{E} = \sum_i \Delta \vec{E}_i = \sum_i \frac{\rho_l \Delta l_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \hat{a}_{R_i} \quad (18-2)$$



شکل (۵-۲) بار الکتریکی توزیع شده در امتداد منحنی C'

در حد وقتی عنصر طول $\Delta l'_i$ به سمت صفر میل نماید رابطه (۱۸-۲) به یک انتگرال تبدیل می‌شود:

$$\bar{E} = \int_{C'} \frac{\rho_l dl'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (19-2)$$

در انتگرال (۱۹-۲)، ρ_l ، R و \hat{a}_R هر سه ممکن است متغیر باشند و بخصوص باید در مورد تغییرات بردار واحد \hat{a}_R دقت کافی مبذول داشت. با استفاده از روابط (۵-۲) و (۶-۲) در رابطه (۱۹-۲)، شدت میدان برای توزیع خطی بارهای الکتریکی بصورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \int_{C'} \frac{\rho_l(\bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|^3} dl' \quad (20-2)$$

اگر دستگاه مختصات مستطیلی را در رابطه (۲۰-۲) مورد استفاده قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\bar{E}(x, y, z) = \int_{C'} \left[\frac{\rho_l(x', y', z') [(x-x')\hat{a}_x + (y-y')\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \right] \left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 \right]^{1/2} dx' \quad (21-2)$$

با مشخص بودن $\rho_l(x', y', z')$ و معادلات منحنی C' ، انتگرال (۲۱-۲) قابل محاسبه است. مثال (۱-۲) بار الکتریکی در امتداد محور z از $z = -d$ تا $z = +d$ ، مطابق شکل (۲-۶)، با چگالی یکنواخت ρ_l توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا بدست آورید. حل:

از رابطه (۲۰-۲) برای محاسبه میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم. برای این منظور ابتدا بردارهای \vec{r} و \vec{r}' را بدست می‌آوریم. تأکید می‌شود که بدلیل تقارن استوانه‌ای توزیع بار، در حل این مثال از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. با توجه به شکل (۲-۶) میتوان نوشت:

$$\vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z, \quad \vec{r}' = z'\hat{a}_z, \quad dl' = dz'$$

آنگاه:

$$\vec{r} - \vec{r}' = r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z \quad (22-2)$$

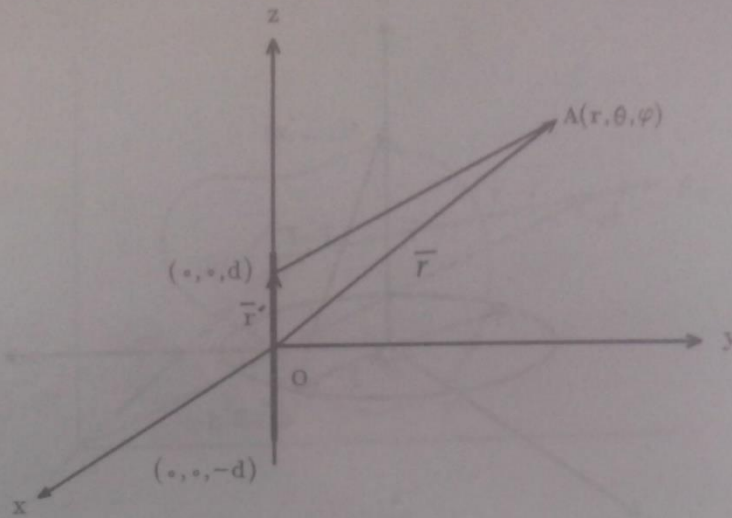
با استفاده از رابطه اخیر در رابطه (۲۰-۲) داریم:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \int_{-d}^d \frac{r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \left\{ \left[\frac{-(z - z')\hat{a}_z}{r\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \right]_{-d}^d + \left[\frac{\hat{a}_z}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \right]_{-d}^d \right\} \quad (23-2) \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \left\{ \left[\frac{-(z - d)}{r\sqrt{r^2 + (z - d)^2}} - \frac{-(z + d)}{r\sqrt{r^2 + (z + d)^2}} \right] \hat{a}_r + \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + d)^2}} \right] \hat{a}_z \right\} \end{aligned}$$

□

در مثال (۱-۲) ملاحظه می‌شود که اولاً شدت میدان مؤلفه φ ندارد و این بدین دلیل است که هیچکدام از عناصر بار تولید چنین مؤلفه‌ای نمی‌کنند و ثانیاً اگر d به سمت بینهایت میل کند در آنصورت مؤلفه E_z نیز صفر خواهد شد. در این حالت تقارنی که نسبت به z بوجود می‌آید باعث صفر شدن مؤلفه E_z میشود. در حقیقت برای هر عنصر بار dq که مؤلفه dE_z را بوجود آورد عنصر بار دیگری وجود دارد که مؤلفه‌ای برابر $-dE_z$ را ناشی میشود بطوریکه مجموعاً مؤلفه E_z صفر میگردد. پس بطور خلاصه شدت میدان الکتریکی یک خط بار بطول بینهایت برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} \hat{a}_r \quad (24-2)$$



شکل (۶-۲) بار الکتریکی یا توزیع خطی یکنواخت در امتداد محور z

در صفحه xy ، می توان شدت میدان الکتریکی را با قرار دادن $z=0$ در رابطه (۲۳-۲) بدست آورد:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} \cdot \hat{a}_r \quad (25-2)$$

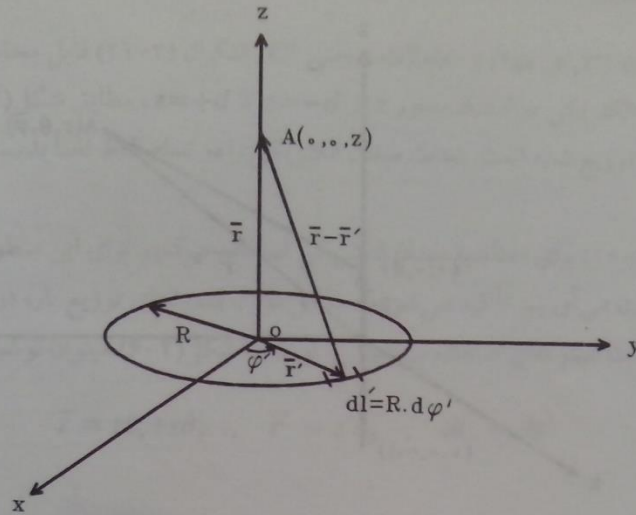
ملاحظه می شود که در صفحه xy نیز میدان \vec{E} فقط مؤلفه شعاعی E_r دارد و این نتیجه مجدداً بدلیل تقارنی است که نسبت به z موجود است.

مثال (۲-۲) بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی خطی ρ_L روی حلقه ای به شعاع R توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه ای روی محور حلقه بدست آورید. فرض کنید که حلقه در صفحه xy واقع بوده و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات باشد. شکل (۷-۲) توزیع بار و مختصات را برای این مثال نشان می دهد.

حل:

از دستگاه مختصات استوانه ای در حل این مثال استفاده میشود. با توجه به شکل (۷-۲)، بردارهای مکان \vec{r} و \vec{r}' عبارت از $\vec{r} = z\hat{a}_z$ و $\vec{r}' = R\hat{a}_r$ می باشند. اما چون بردار \hat{a}_r در عبارت \vec{r}' متغیر است، جهت تسهیل انتگرال گیری، ابتدا آن را بر حسب بردارهای واحد دستگاه مختصات مستطیلی می نویسیم. (اگر \hat{a}_r در عبارت \vec{r}' باشد با آن به عنوان یک بردار واحد ثابت برخورد میشود. چرا؟) لذا $\vec{r}' = R(\cos \varphi' \hat{a}_x + \sin \varphi' \hat{a}_y)$ است. پس:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -R \cos \varphi' \hat{a}_x - R \sin \varphi' \hat{a}_y + z\hat{a}_z \quad (26-2)$$



شکل (۷-۲) بار الکتریکی با توزیع خطی یکنواخت روی حلقه‌ای به شعاع R

$$|\bar{r}-\bar{r}'|^2 = (z^2 + R^2)^{2/2} \quad (27-2)$$

با جایگزین نمودن دو رابطه اخیر و $dl' = R d\phi'$ در رابطه (۲۰-۲) داریم:

$$\bar{E} = \frac{\rho_l R}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (-R \cos \phi' \hat{a}_x - R \sin \phi' \hat{a}_y + z \hat{a}_z) d\phi'$$

لیکن:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\bar{r}-\bar{r}') d\phi' &= -R \hat{a}_x \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi'}_{=0} - R \hat{a}_y \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi'}_{=0} + z \hat{a}_z \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= 2\pi z \hat{a}_z \end{aligned}$$

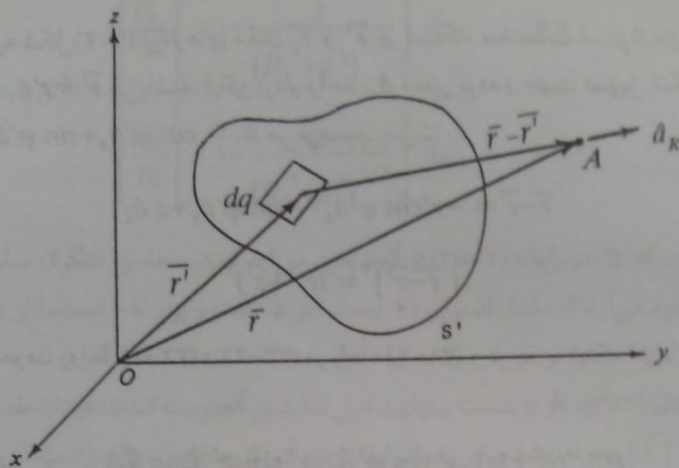
و سرانجام:

$$\bar{E} = \frac{\rho_l R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{a}_z \quad (28-2)$$

□

■ میدان الکتریکی توزیعهای پیوسته سطحی

وقتی که بارهای الکتریکی با چگالی ρ_s روی سطحی توزیع شده باشند و محاسبه میدان الکتریکی ناشی از این توزیع در نقطه دلخواهی مانند A در شکل (۸-۲) مورد نظر باشد ابتدا میدان

شکل (۸-۲) بار الکتریکی توزیع شده بر روی سطح S'

حاصل از یک عنصر بار را بدست آورده و سپس از میدان ناشی از عنصر بار انتگرال میگیریم تا میدان کل در نقطه مورد نظر بدست آید.

میدان ناشی از عنصر بار $dq = \rho_s ds'$ برابر است با:

$$d\vec{E} = \frac{\rho_s ds'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (29-2)$$

پس از انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۲۹-۲) روی سطحی که بار الکتریکی روی آن توزیع شده است خواهیم داشت:

$$\vec{E} = \int_{S'} \frac{\rho_s ds'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (30-2)$$

رابطه انتگرالی (۳۰-۲) را می توان بر حسب بردارهای مکان \vec{r} و \vec{r}' نیز بیان داشت. کافی است که جمله \hat{a}_R/R^2 را با $(\vec{r}-\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|^3$ جایگزین نماییم.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3} ds' \quad (31-2)$$

مثال (۳-۲) بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی سطحی ρ_s روی یک دیسک به شعاع R توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه ای روی محور دیسک بدست آورید.

حل:

با توجه به شکل (۹-۲) بردارهای مکان \vec{r} و \vec{r}' در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت از $\vec{r} = z \hat{a}_z$ و $\vec{r}' = r' \hat{a}_{r'}$ می‌باشند. لیکن بردار واحد $\hat{a}_{r'}$ متغیر بوده و جهت تسهیل انتگرال‌گیری آن را بصورت $\hat{a}_{r'} = \cos \varphi' \hat{a}_x + \sin \varphi' \hat{a}_y$ می‌نویسیم. پس:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r' \cos \varphi' \hat{a}_x - r' \sin \varphi' \hat{a}_y + z \hat{a}_z \quad (۳۲-۲)$$

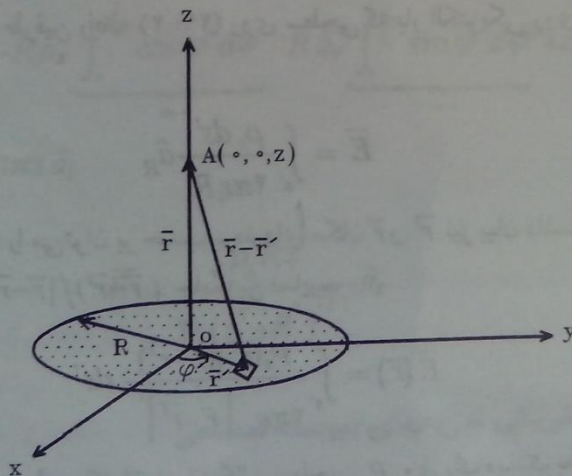
$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (r'^2 + z^2) \quad (۳۳-۲)$$

با جایگزین نمودن روابط (۳۲-۲) و (۳۳-۲) در رابطه (۳۱-۲) و توجه به اینکه $ds' = r' dr' d\varphi'$ داریم:

$$\vec{E}(\varphi, \varphi, z) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(-r' \cos \varphi' \hat{a}_x - r' \sin \varphi' \hat{a}_y + z \hat{a}_z) r' dr' d\varphi'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} \quad (۳۴-۲)$$

اگر ابتدا نسبت به φ' انتگرال گرفته شود، از آنجاکه $\int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = 0$ سریعاً این نتیجه حاصل میشود که \vec{E} فقط دارای مؤلفه \hat{a}_z است. پس:

$$\vec{E}(\varphi, \varphi, z) = \frac{\rho_s z}{4\epsilon_0} \hat{a}_z \int_0^R \frac{r' dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} = \left[\frac{-\rho_s z \hat{a}_z}{4\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R$$



شکل (۹-۲) توزیع سطحی بار الکتریکی با چگالی ثابت روی دیسکی به شعاع R

$$\bar{E}(0,0,z) = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[+1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}} \right] \hat{a}_z & z > 0 \\ \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}} \right] \hat{a}_z & z < 0 \end{cases} \quad (35-2)$$

باید دقت شود که \pm در رابطه (۳۵-۲) از آنجا پدید می‌آید که در محاسبه انتگرال عبارتی بصورت $z/\sqrt{z^2+R^2}$ بر وجود می‌آید که مقدار آن برابر ۱+ است، اگر z مثبت و برابر ۱- است، اگر z منفی باشد. □

اگر در مثال (۳-۲)، R به سمت بینهایت میل نماید در آنصورت شدت میدان مقدار ثابتی برابر $|\bar{E}| = \rho_s/2\epsilon_0$ خواهد شد و این همان شدت میدان یک صفحه بینهایت است که بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی سطحی ρ_s روی آن توزیع شده باشد. لذا بطور خلاصه میدان یک صفحه بینهایت بار که منطبق بر صفحه xy باشد برابر است با:

$$\bar{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases} \quad (36-2)$$

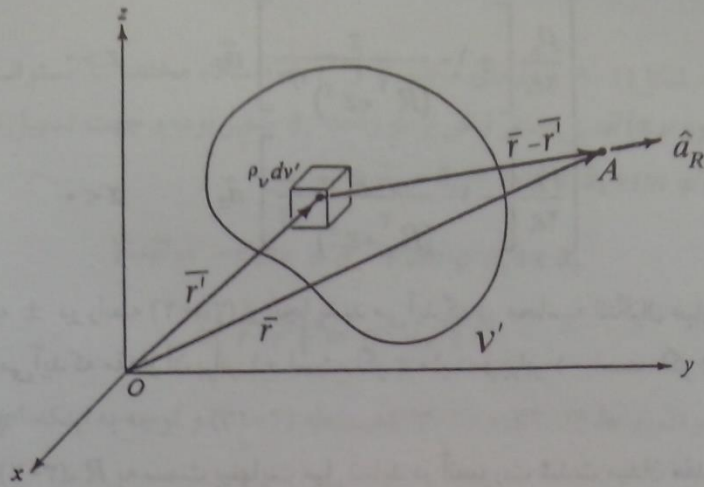
■ میدان الکتریکی توزیعهای پیوسته حجمی

برای توزیع حجمی بار با چگالی ρ_v مانند دو حالت قبل ابتدا میدان حاصل از عنصر بار $dq = \rho_v dv'$ را در نقطه $A(x,y,z)$ بدست آورده و سپس از عنصر میدان در حجم V' که در آن بار الکتریکی توزیع یافته است، انتگرال می‌گیریم تا میدان کل بدست آید. لذا با در نظر گرفتن شکل (۱۰-۲) میتوان بطور خلاصه نوشت:

$$\bar{E} = \int_{V'} \frac{\rho_v dv'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (37-2)$$

و بالاخره رابطه (۳۷-۲) بر حسب بردارهای مکان \bar{r} و \bar{r}' بصورت زیر نوشته میشود:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \int_{V'} \frac{\rho_v(\bar{r}')(\bar{r}-\bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r}-\bar{r}'|^3} dv' \quad (38-2)$$



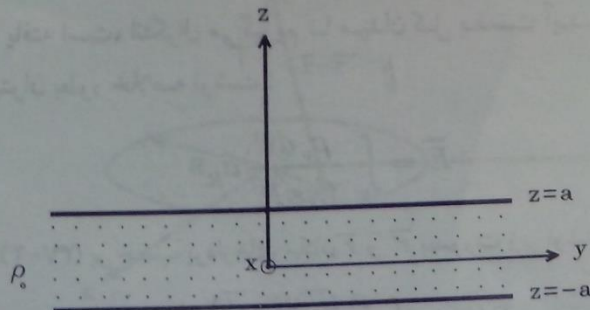
شکل (۲-۱۰) بار الکتریکی توزیع شده در حجم V'

مثال (۲-۴) بار الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت $\rho_v = \rho_0$ در بخشی از فضا که بین دو صفحه $z = -a$ و $z = a$ محصور است توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای بر روی محور z محاسبه کنید. شکل (۲-۱۱) این توزیع بار الکتریکی را نشان میدهد.

حل:

دستگاه مختصات مستطیلی یا استوانه‌ای برای حل این مثال مناسب است. ابتدا مسأله را در دستگاه مختصات مستطیلی در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه $\vec{r} = z\hat{a}_z$ و $\vec{r}' = x'\hat{a}_x + y'\hat{a}_y + z'\hat{a}_z$ است، از رابطه (۲-۳۸) داریم:

$$\vec{E}(\cdot, \cdot, z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \int_{y'=-\infty}^{+\infty} \int_{z'=-a}^a \frac{-x'\hat{a}_x - y'\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz' \quad (۲-۳۹)$$



شکل (۲-۱۱) توزیع حجمی بار با چگالی ثابت ρ_0 در فضای محصور بین صفحات $z = -a$ و $z = a$

از آنجا که عبارات درون انتگرال در رابطه زیر بترتیب توابع فردی از x' و y' هستند، پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x'}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y'}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dy' = 0 \quad (40-2)$$

و بنابراین به سادگی روشن می‌شود که میدان \bar{E} فقط دارای مؤلفه \hat{a}_z بوده که از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$\bar{E}(\cdot, \cdot, z) = \frac{\rho_z}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_z \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{y'=-\infty}^{\infty} \int_{z'=-a}^a \frac{(z-z')}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz' \quad (41-2)$$

اگر ابتدا نسبت به x' و سپس نسبت به y' انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{y'=-\infty}^{+\infty} \frac{dx' dy'}{[x'^2 + y'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{y'^2 + (z-z')^2} = \frac{2\pi}{|z-z'|} \quad (42-2)$$

آنگاه:

$$\int_{-a}^a \frac{2\pi(z-z')}{|z-z'|} dz' = \begin{cases} 2\pi \int_{-a}^a dz' = 4\pi a & z > a \\ -2\pi \int_{-a}^a dz' = -4\pi a & z < -a \\ 2\pi \int_{-a}^z dz' - 2\pi \int_z^a dz' = 4\pi z & -a < z < a \end{cases} \quad (43-2)$$

و سرانجام:

$$\bar{E}(\cdot, \cdot, z) = \begin{cases} (a\rho_z/\epsilon_0) \hat{a}_z & z > a \\ (z\rho_z/\epsilon_0) \hat{a}_z & -a < z < a \\ -(a\rho_z/\epsilon_0) \hat{a}_z & z < -a \end{cases} \quad (44-2)$$

با توجه به اینکه توزیع بار در جهات x' و y' از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و در ضمن تغییراتی نسبت به x' و y' ندارد، میتوان چنین نتیجه گرفت که میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار مستقل از x و y بوده و $\bar{E}(x, y, z) = \bar{E}(\cdot, \cdot, z)$ است.

این مثال را میتوان در دستگاه مختصات استوانه‌ای نیز حل کرد. رابطه (۲-۳۸) در این دستگاه

بصورت زیر نوشته میشود:

$$\bar{E}(0,0,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'=0}^{\infty} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{z'=-a}^a \frac{-r' \hat{a}_r + (z-z') \hat{a}_z}{[r'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi' dz'$$

با نوشتن \hat{a}_r بصورت $\hat{a}_r = \cos \varphi' \hat{a}_x + \sin \varphi' \hat{a}_y$ و انتگرال گرفتن نسبت به φ' به بلافاصله روشن می شود که \bar{E} دارای مؤلفه های \hat{a}_x و \hat{a}_y نخواهد بود. برای محاسبه مؤلفه \hat{a}_z میتوان نوشت:

$$\int_0^{\infty} \frac{r' dr'}{[r'^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \frac{1}{|z-z'|}$$

و:

$$\bar{E}(0,0,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{2\pi(z-z')}{|z-z'|} dz'$$

محاسبه انتگرال مزبور و نتایج نهایی همانند روش مبتنی بر دستگاه مختصات مستطیلی بوده که در روابط (۲-۴۳) (۲-۴۴) ارائه شده اند.

□

۲-۳) خطوط میدان

به منظور نمایش ترسیمی میدان الکتریکی (یا هر میدان برداری دیگر) از یک دسته منحنی که دارای معادلات عمومی یکسان هستند و در هر نقطه از فضا بر بردار میدان مماس میباشند استفاده می شود. تراکم یا پراکندگی خطوط میدان در یک ناحیه از فضا بیانگر شدت یا ضعف میدان در آن ناحیه میباشد. برای بدست آوردن معادلات خطوط میدان، همانطور که در شکل (۲-۱۲) نشان داده شده است، فرض میشود بردار \bar{E} در نقطه ای به مختصات (x,y,z) بر منحنی C که از این نقطه میگذرد مماس باشد. از آنجا که بردار عنصر طول در هر نقطه بر منحنی C مماس است بنابراین بردارهای میدان و عنصر طول در هر نقطه از منحنی C با یکدیگر موازی هستند:

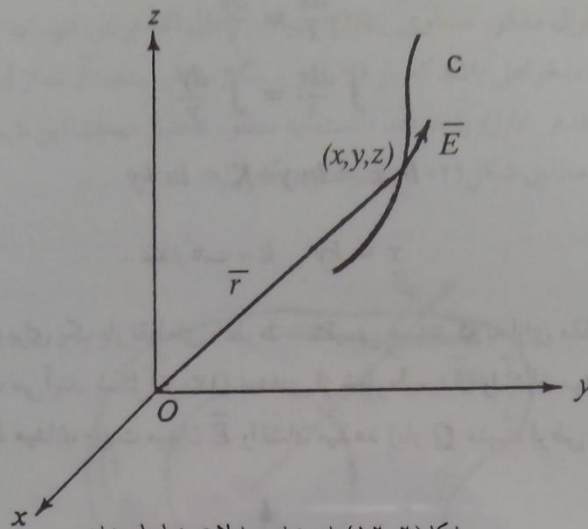
$$\bar{E}(\bar{r}) = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z \quad (۲-۴۵)$$

$$d\bar{l}(\bar{r}) = dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z \quad (۲-۴۶)$$

$$\bar{E}(\bar{r}) \parallel d\bar{l}(\bar{r}) \quad (۲-۴۷)$$

شرط موازی بودن دو بردار، متناسب بودن مؤلفه های متناظر آنها است:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (۲-۴۸)$$



شکل (۲-۱۲) استخراج معادلات خطوط میدان

معادلات اخیر معادلات خطوط میدان نامیده شده و چون از نوع معادلات دیفرانسیل هستند، در حالت کلی شامل یک دسته جواب می‌شوند. با معلوم بودن مؤلفه‌های میدان (E_x ، E_y و E_z) میتوان این معادلات را حل نموده و از آنجا خطوط میدان را مشخص کرد. در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی معادلات خطوط میدان بترتیب عبارتند از:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\phi}{E_\phi} = \frac{dz}{E_z} \quad (۴۹-۲)$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin \theta d\phi}{E_\phi} \quad (۵۰-۲)$$

مثال (۲-۵) خطوط میدان را برای یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات بدست آورید. خطوط میدان را فقط در صفحه $z=0$ مطالعه کنید.
حل:

میدان بار نقطه‌ای عبارت از $\vec{E} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2)\hat{a}_r$ است که مؤلفه‌های x و y آن در دستگاه مختصات مستطیلی بصورت زیر نوشته میشود:

$$E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad E_y = \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}} \quad (۵۱-۲)$$

در محاسبه مؤلفه‌های E_x و E_y از روابط $\hat{a}_r/r^2 = \vec{r}/|\vec{r}|^3$ و $\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y$ استفاده شده است. با استفاده از رابطه (۲-۵۱) در رابطه (۲-۴۸) داریم:

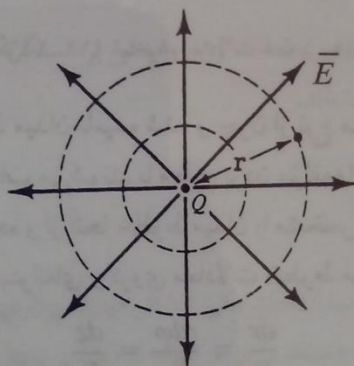
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln x = \ln y + K' = \ln ky$$

$$x = ky, \quad k = \text{مقدار ثابت} \quad (52-2)$$

بنابراین خطوط میدان برای یک بار نقطه‌ای خطوط مستقیمی هستند که به ازای مقادیر مختلف k از رابطه (52-2) بدست می‌آیند. شکل (13-2) تعدادی از خطوط میدان را نشان می‌دهد. جهت نشان داده شده روی خطوط میدان، جهت میدان \vec{E} را نشان می‌دهد (بار Q مثبت فرض شده است).



شکل (13-2) خطوط میدان بار نقطه‌ای Q

۴-۲) قانون گوس

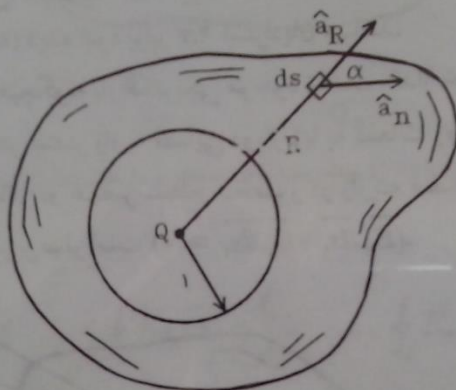
کره‌ای به شعاع r را که در مرکز آن بار نقطه‌ای Q واقع شده باشد در نظر می‌گیریم، میدان حاصل از این بار در نقطه‌ای به مختصات (r, θ, φ) مساوی $E = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{a}_r$ می‌باشد. شار بردار \vec{E} که از سطح کره می‌گذرد، یعنی $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ، را محاسبه می‌کنیم:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S \left[\frac{Q \hat{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right] \cdot (r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{a}_r)$$

$$= \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (53-2)$$

ملاحظه می‌شود که $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$ مستقل از شعاع کره است، بنابراین r چه یک میلی‌متر باشد و چه یک

کیلو متر، مقدار انتگرال مذکور مساوی Q/ϵ_0 میباشد. حال اگر فرض کنیم که S بجای یک سطح کروی، سطح بسته دلخواهی باشد که بار Q را در بر بگیرد شار میدان \vec{E} که از آن سطح بسته دلخواه میگذرد باز همان مقدار Q/ϵ_0 را خواهد داشت. به منظور تحقیق صحت این نتیجه، سطح بسته‌ای با بار Q در داخل آن مطابق شکل (۲-۱۴) در نظر میگیریم.



شکل (۲-۱۴) سطح بسته دلخواه S با بار نقطه‌ای Q در داخل آن

شاری که از عنصر سطح ds میگذرد برابر است با:

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \right) \cdot (ds \hat{a}_n) = \frac{Q \cos \alpha ds}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2-54)$$

در رابطه (۲-۵۴)، بردار واحد عمود بر عنصر سطح ds و زاویه بین بردارهای واحد \hat{a}_R و \hat{a}_n است. شار کل گذرنده از سطح بسته S را با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۲-۵۴) بدست می‌آوریم:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S \frac{Q ds \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$ds \cos \alpha = ds'$ را می‌توان تصویر عنصر سطح ds روی یک سطح کروی به شعاع R و مرکز Q دانست. اما $ds'/R^2 = ds''$ به نوبه خود تصویر عنصر ds' روی سطح کره‌ای به شعاع واحد و مرکز Q است زیرا:

$$\frac{ds''}{ds'} = \frac{1 \sin \theta d\theta d\phi}{R^2 \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{1}{R^2}$$

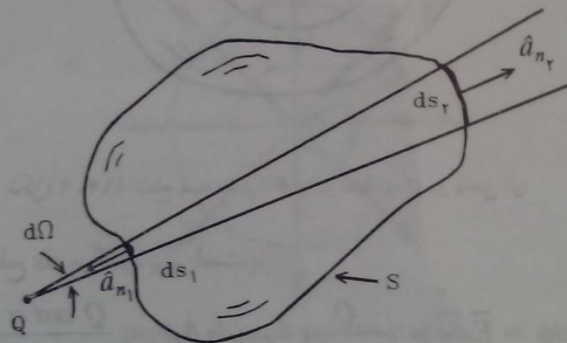
بنابراین $ds'' = d\Omega$ تصویر ds روی سطح کره‌ای به شعاع واحد (S'') و مرکز Q بوده و می‌توان

نوشت :

$$\Phi = \oint_{s''} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} ds'' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (55-2)$$

$d\Omega$ را زاویه فضایی محدود به ds از نقطه Q نامند. واحد اندازه گیری زاویه فضایی استرادیان^۱ است. زاویه فضایی یک سطح کروی (یا هر سطح بسته دلخواهی) وقتی که از مرکز آن (یا هر نقطه دلخواهی در داخل سطح بسته) دیده شود برابر 4π استرادیان می باشد.

اگر در داخل سطح بسته هیچگونه بار الکتریکی موجود نباشد، مقدار خالص شار خارج شده از سطح بسته صفر است. زیرا هر عنصر زاویه فضایی دوبار (یا به دفعات زوج) سطح بسته را قطع میکند و شار خالص گذرنده از دو عنصر سطح محصور در زاویه فضایی $d\Omega$ ، بطوریکه در شکل (۱۵-۲) دیده میشود، برابر صفر است ($\vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = 0$).



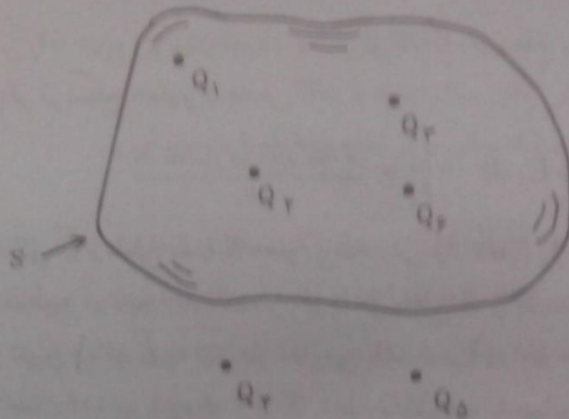
شکل (۱۵-۲) بار نقطه‌ای Q در خارج سطح بسته S

حال اگر چندین بار نقطه‌ای و سطح بسته S را در نظر بگیریم، بطوریکه مطابق شکل (۱۶-۲) تعدادی از بارها در داخل سطح بسته و تعدادی دیگر در خارج آن قرار بگیرند، با استفاده از اصل جمع آثار می توان نوشت :

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^6 \vec{E}_j$$

لذا :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^6 \oint_S \vec{E}_j \cdot d\vec{s}$$



شکل (۲-۱۶) سطح بسته S و تعدادی از بارهای نقطه‌ای در داخل آن

اما:

$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}, \quad \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_2}{\epsilon_0}, \quad \oint_S \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_3}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E}_4 \cdot d\vec{s} = 0, \quad \oint_S \vec{E}_5 \cdot d\vec{s} = 0, \quad \oint_S \vec{E}_6 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_6}{\epsilon_0}$$

در نتیجه:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_6) = \frac{1}{\epsilon_0} (\text{بار الکتریکی محصور در سطح بسته S}) \quad (۵۶-۲)$$

این بحث را می‌توان به سادگی برای حالتهای که توزیع بار الکتریکی پیوسته باشد نیز بکار گرفت. مثلاً در توزیع حجمی با چگالی ρ_v میتوان بار الکتریکی محصور در سطح S را مجموع عناصر بار $\Delta q_i = \rho_v \Delta v_i$ دانست و هر عنصر بار را بصورت یک بار نقطه‌ای تلقی نمود و رابطه (۵۶-۲) را بکار برد. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \Delta q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \rho_v \Delta v_i$$

فقط برای عناصر درون سطح بسته

در حد وقتی که Δv_i به سمت صفر میل کند داریم:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v \cdot dv \quad (۵۷-۲)$$

در رابطه (۵۷-۲)، V حجمی است که به سطح بسته S محدود میشود. با توجه به بحثی که گذشت

می توان قانون گوس را به شرح زیر بیان نمود: « شار کل گذرنده از سطح بسته S برابر است با بار الکتریکی محصور در آن سطح تقسیم بر ϵ_0 ».

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\text{بار محصور در سطح بسته } S}{\epsilon_0} \quad (58-2)$$

اگر میدان الکتریکی \vec{E} و سطح بسته S معلوم باشند، می توان $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$ را به روشهای تحلیلی و یا عددی محاسبه نموده و در نتیجه بار محصور در داخل سطح S را بدست آورد. ولی عکس این مسأله که عبارت از تعیین میدان \vec{E} به ازای بار معلومی باشد تحت شرایط خاصی امکان پذیر است. اگر سطح بسته S چنان انتخاب شود که اولاً \vec{E} همواره عمود و یا مماس بر آن باشد و ثانیاً در جاهایی که \vec{E} عمود بر S است، $|\vec{E}|$ مقدار ثابتی باشد، در آن صورت میتوان نوشت:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{E}_n \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_t \cdot d\vec{s}_2, \quad S = S_1 + S_2 \quad (59-2)$$

در رابطه (59-2)، \vec{E}_n را مؤلفه عمودی می نامیم که بر سطح S_1 عمود بوده و $|\vec{E}_n|$ روی سطح S_1 دارای مقدار ثابتی است، در حالیکه \vec{E}_t (مؤلفه مماسی) بر سطح S_2 مماس بوده و $\vec{E}_t \cdot d\vec{s}_2 = 0$ میباشد. بنابراین:

$$\int_{S_2} \vec{E}_t \cdot d\vec{s}_2 = 0 \quad (60-2)$$

$$\int_{S_1} \vec{E}_n \cdot d\vec{s}_1 = \int_{S_1} E_n ds_1 = E_n \int_{S_1} ds_1 = E_n S_1 \quad (61-2)$$

لذا:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{E}_n \cdot d\vec{s}_1 = E_n S_1 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_n = \frac{Q}{\epsilon_0 S_1} \quad (62-2)$$

سطحی را که دارای خصوصیات مذکور باشد سطح گوسی نامند. انتخاب سطح گوسی بستگی به توزیع بار الکتریکی و تقارن آن دارد. بدیهی است که با توجه به شرایط ویژه ای که باید سطح گوسی داشته باشد، محاسبه شدت میدان الکتریکی برای توزیعهای معدودی که از درجه تقارن بالایی برخوردار هستند امکان پذیر است. بعلاوه استفاده از این روش منوط به اطلاعات اولیه ای در مورد میدان میباشد. چون بردار \vec{E} باید عمود یا مماس بر سطح گوسی باشد قبل از اینکه مبادرت به محاسبه میدان کنیم باید به طریقی جهت بردار \vec{E} را مشخص نماییم. تعیین جهت بردار \vec{E} را می توان با در نظر گرفتن جهت میدانی که یک عنصر بار بوجود می آورد و با استفاده از تقارن مسأله

انجام داد.

مثال (۶-۲) بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی حجمی ρ در داخل کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا بدست آورید.

حل:

الف) نقاط خارج کره: نقطه M را در خارج کره، مطابق شکل (۲-۱۷)، در نظر می‌گیریم. میدانی که دو عنصر بار واقع در نقاط (r', θ', φ') و $(r', \theta', \varphi' + \pi)$ بوجود می‌آورند در جهت عمود بر سطح کره می‌باشد و به بیان دیگر میدان فقط مؤلفه شعاعی دارد. بعلاوه تقارن مسأله بیان میکند که اندازه میدان روی سطح کره به شعاع OM مقدار ثابتی است. با توجه به این اطلاعات در مورد میدان الکتریکی میتوان نتیجه گرفت که سطح گوسی مطلوب، سطح کره‌ای به شعاع $r = OM$ میباشد. با بکار بردن قانون گوس می‌توان نوشت:

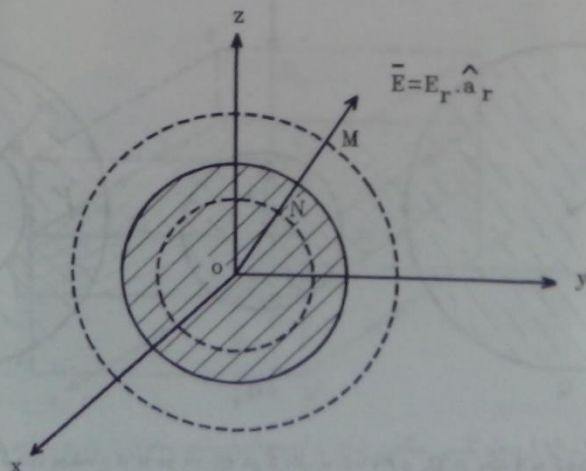
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S E_r ds = E_r \oint_S ds = E_r S = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

اما:

$$Q = \int_V \rho_v dv = \rho \int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{4\pi a^3}{3} \rho \quad (۲-۶۳)$$

در نتیجه:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$



شکل (۲-۱۷) بار الکتریکی با توزیع یکنواخت در کره‌ای به شعاع a و نحوه محاسبه میدان الکتریکی حاصل از آن

$$\vec{E} = \frac{\rho \cdot a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r, \quad r \geq a \quad (۶۴-۲)$$

ب) نقاط داخل کره: برای محاسبه میدان در نقاط داخل کره، نقطه N را در شکل (۱۷-۲) به فاصله r از مرکز بار در نظر میگیریم. تمامی بارها مطابق شکل (۱۸-۲)، میتوان مجموع بار کره‌ای به شعاع $ON=r$ و بار یک لایه کره‌ای به ضخامت $a-r$ دانست. طبق اصل جمع آثار میدانی که بار Q در نقطه N بوجود می‌آورد برابر مجموع میدانهای است که بارهای Q_1 و Q_2 بطور جداگانه در آن نقطه ایجاد میکنند. با توجه به تقارن کره‌ای بارهای Q_1 و Q_2 ، میدانها همواره شعاعی بوده و اندازه آنها روی کره‌ای به شعاع ON ثابت است. اما میدان کل حاصل از بار Q_2 در نقطه N طبق قانون گوس، صفر بوده و میدان حاصل از بار Q_1 عبارت است از:

$$E_{r1} = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad S = \text{سطح کره به شعاع } ON$$

اما:

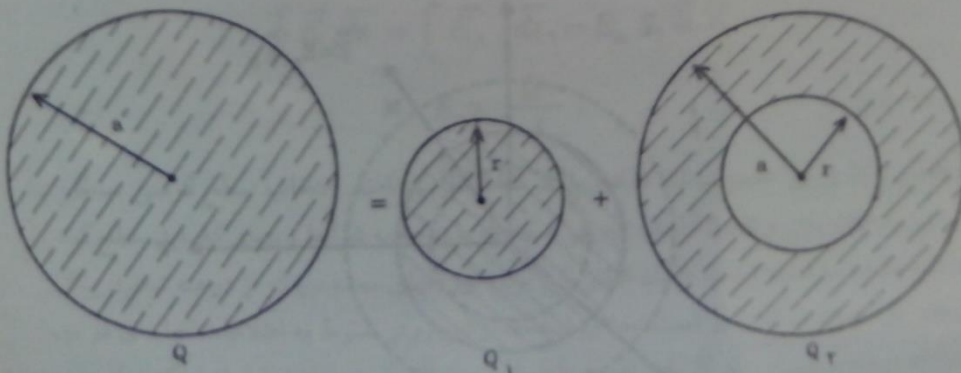
$$Q_1 = \int_V \rho_v dv = \rho \int_0^r r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$$

حجم محدوده به سطح گوس S

در نتیجه:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{a}_r, \quad r \leq a \quad (۶۵-۲)$$

□



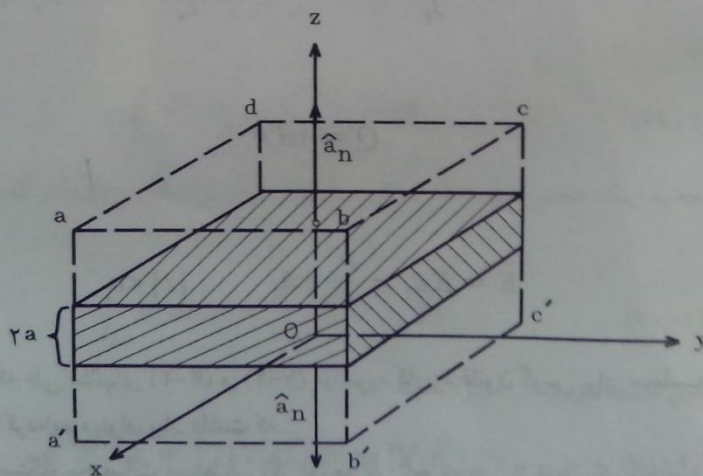
شکل (۱۸-۲) تقسیم بار کره‌ای به شعاع a به دو بار Q_1 در کره‌ای به شعاع r و Q_2 در یک لایه کره‌ای به ضخامت $a-r$

مثال (۷-۲) بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی حجمی $\rho_v = \rho$ در بخشی از فضا که بین دو صفحه $z = -a$ و $z = a$ محصور است توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا بدست آورید. (این مسأله قبلاً طی مثال (۴-۲) به روش انتگرال‌گیری از توزیع بار حل شده است. در اینجا حل مسأله با استفاده از قانون گوس مورد نظر است.)
حل:

با توجه به شکل (۱۱-۲)، فرض کنید که محاسبه میدان در نقطه دلخواهی در داخل ناحیه بار ($|z| < a$) یا در خارج آن مورد نظر باشد. محورهای مختصات را طوری در نظر میگیریم که محور z از آن نقطه عبور نموده و بر سطح توزیع عمود باشد. حال اگر دو عنصر بار که در نقاط (x', y', z') و $(-x', -y', z')$ قرار دارند را در نظر بگیریم، میدان حاصل از آنها بدلیل تقارن توزیع بار فقط دارای مؤلفه E_z میباشد. البته برای نقاطی که $z > 0$ است میدان در جهت \hat{a}_z و برای نقاطی که $z < 0$ باشد میدان در جهت $-\hat{a}_z$ است. سطح گوسی را، همان‌گونه که در شکل (۱۹-۲) نشان داده شده است، به صورت یک سطح مکعبی شکل به ضلع l در نظر میگیریم بطوریکه نیمی از آن بالای صفحه $z = 0$ و نیم دیگرش در پایین صفحه $z = 0$ قرار بگیرد.
الف) میدان در نقاطی که $|z| > a$ است:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_s E_z ds \hat{a}_n \cdot \hat{a}_z = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

اما:



شکل (۱۹-۲) سطح گوسی مکعبی شکل برای محاسبه میدان حاصل از توزیع بار در ناحیه $|z| < a$

$$Q = \int \rho \, dV, \quad \hat{a}_n \cdot \hat{a}_z = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left[\int_{abcd} + \int_{a'b'c'd'} + \int_{abba'} + \int_{bccb'} + \int_{dccb'} + \int_{daad'} \right] \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$\underbrace{\int_{abcd}}_{=E_z l'} + \underbrace{\int_{a'b'c'd'}}_{=E_z l'} + \underbrace{\int_{abba'}}_{=0} + \underbrace{\int_{bccb'}}_{=0} + \underbrace{\int_{dccb'}}_{=0} + \underbrace{\int_{daad'}}_{=0}$

$$\int E_z l' = \int \rho \, dV / \epsilon_0$$

$$E_z = \rho \, a / \epsilon_0$$

پس:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho \, a}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z > a \\ -\frac{\rho \, a}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z < -a \end{cases} \quad (6-2)$$

ب) میدان در نقاطی که $|z| < a$ است:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E_z l' = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

ولی:

$$Q = \int \rho \, dV$$

در نتیجه:

$$\vec{E} = E_z \hat{a}_z = \frac{\rho}{\epsilon_0} z \hat{a}_z \quad |z| < a$$

□

با تجربه‌ای که طی مثالهای (۶-۲) و (۷-۲) در مورد کاربرد قانون گوس برای محاسبه میدان الکتریکی کسب کرده‌ایم میتوان بیان داشت که:

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی اگر توزیع بار تابع زوجی از فقط یک مختصه مثلاً z باشد، میدان \vec{E} فقط مؤلفه \hat{a}_z خواهد داشت و سطح گوسی بصورت یک سطح مکعبی شکل همانند شکل (۱۹-۲) خواهد بود. برای توزیعهایی که تابع فردی از z باشند (با توجه به اینکه میدان

در خارج توزیع بار صفر است) تعیین میدان به کمک قانون گوس با استفاده از یک سطح گوسی مکعبی شکل ولی نامتقارن نسبت به صفحه $z=0$ امکان پذیر است.

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای اگر توزیع بار مستقل از φ و z (بعبارت دیگر فقط تابعی از r) باشد، میدان \vec{E} فقط مؤلفه \hat{a}_r خواهد داشت و سطح گوسی بصورت یک سطح استوانه‌ای به شعاع r خواهد بود.

ج) در دستگاه مختصات کروی اگر توزیع بار مستقل از θ و φ (بعبارت دیگر فقط تابعی از r) باشد، میدان \vec{E} فقط مؤلفه \hat{a}_r خواهد داشت و سطح گوسی بصورت یک سطح کروی به شعاع r خواهد بود.

بطور خلاصه، اگر توزیع باری را بتوان بصورت یک ترکیب خطی از توزیعهای مذکور بیان داشت، محاسبه میدان الکتریکی به کمک قانون گوس به سهولت میسر است.

■ شکل نقطه‌ای قانون گوس

بطوریکه قبلاً نشان داده‌ایم برای یک توزیع حجمی با چگالی ρ_v رابطه انتگرالی زیر برقرار است:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v dv \quad (68-2)$$

رابطه (68-2) را شکل انتگرالی قانون گوس نامند. حال اگر حجم V را آنقدر کوچک نماییم تا به عنصر حجم Δv تبدیل شود، آنگاه سطح بسته S به عنصر سطح Δs تبدیل خواهد شد. لذا می‌توان نوشت:

$$\oint_{\Delta s} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta v} \rho_v dv \quad (69-2)$$

با توجه به اینکه عنصر حجم Δv بسیار کوچک است میتوان توزیع بار را در آن یکنواخت فرض کرد. لذا:

$$\int_{\Delta v} \rho_v dv \simeq \rho_v \int_{\Delta v} dv = \rho_v \Delta v \quad (70-2)$$

اما طبق قضیه دیورژانس میتوان نوشت:

$$\oint_{\Delta s} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{\Delta v} (\nabla \cdot \vec{E}) dv \simeq (\nabla \cdot \vec{E}) \Delta v \quad (71-2)$$

با استفاده از روابط (70-2) و (71-2) در رابطه (69-2) نتیجه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (۷۲-۲)$$

این رابطه را شکل نقطه‌ای قانون گوس یا شکل دیفرانسیلی قانون گوس نامند. این رابطه بعنوان یکی از معادلات ماکسول شناخته میشود. این معادله بیان میکند که دیورژانس میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا برابر چگالی حجمی توزیع بار در آن نقطه تقسیم بر ϵ_0 می‌باشد. در صورت معلوم بودن میدان الکتریکی می‌توان چگالی حجمی توزیع بار را محاسبه نمود. شکل نقطه‌ای قانون گوس، بطوریکه از رابطه (۷۲-۲) استنباط میشود، بر حسب چگالی حجمی بار بیان میگردد. لذا می‌توان سؤال کرد که برای توزیعهای نقطه‌ای، خطی و سطحی رابطه (۷۲-۲) باید به چه صورتی باشد. خوشبختانه توزیعهای مذکور را می‌توان به کمک توابع دلتای دیراک^۱ بر حسب توزیع حجمی بیان نمود.

تابع دلتای دیراک یک بعدی (تابع ضربه یک بعدی) در نقطه $x=x_0$ بصورت $\delta(x-x_0)$ نوشته می‌شود. مقدار تابع در هر نقطه‌ای غیر از $x=x_0$ برابر صفر بوده و در $x=x_0$ بینهایت میشود. بعلاوه:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x-x_0) dx = 1 \quad x_1 < x_0 < x_2 \quad (۷۳-۲)$$

تابع دلتای دیراک دوبعدی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \begin{cases} \infty & x=x_0, \quad y=y_0 \\ 0 & x \neq x_0, \quad \text{یا} \quad y \neq y_0 \end{cases} \quad (۷۴-۲)$$

و همچنین:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) dx dy = 1 \quad x_1 < x_0 < x_2, \quad y_1 < y_0 < y_2 \quad (۷۵-۲)$$

برای تابع دلتای دیراک سه بعدی می‌توان نوشت:

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = \begin{cases} \infty & x=x_0, \quad y=y_0, \quad z=z_0 \\ 0 & x \neq x_0, \quad \text{یا} \quad y \neq y_0, \quad \text{یا} \quad z \neq z_0 \end{cases} \quad (۷۶-۲)$$

و نیز:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) dx dy dz = 1 \quad \begin{matrix} x_1 < x_0 < x_2 \\ y_1 < y_0 < y_2 \\ z_1 < z_0 < z_2 \end{matrix} \quad (۷۷-۲)$$

باید دقت شود که توابع دلتای دیراک دوبعدی و سه‌بعدی بترتیب در (x, y, z) و (x, y) بینهایت‌های مرتبه دوم و سوم هستند.

حال فرض کنید که بار نقطه‌ای Q در نقطه (x_0, y_0, z_0) واقع باشد. چگالی حجمی بار را میتوان بصورت $\rho_v = Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ بیان داشت، زیرا اگر از ρ_v در داخل حجم Δv که بار Q را در بر بگیرد انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_{\Delta v} \rho_v dv = Q \int_{\Delta v} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) dx dy dz = Q$$

بدین ترتیب شکل نقطه‌ای قانون گوس برای بار نقطه‌ای Q بصورت زیر نوشته میشود:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\bar{r}-\bar{r}_0) \quad (78-2)$$

بعنوان مثال دیگر اگر بار الکتریکی با چگالی ρ_l در امتداد خطی موازی محور z که از نقطه $(x_0, y_0, 0)$ میگذرد توزیع شده باشد، قانون گوس بصورت زیر نوشته میشود:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_l}{\epsilon_0} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (79-2)$$

بالاخره در آخرین مثال فرض میکنیم که بار الکتریکی روی صفحه $z=z_0$ با چگالی سطحی ρ_s توزیع شده باشد. در این حالت شکل نقطه‌ای قانون گوس بصورت زیر نوشته میشود:

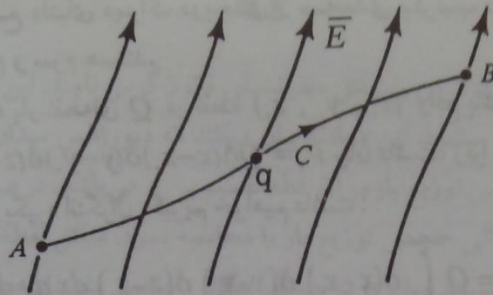
$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \delta(z-z_0) \quad (80-2)$$

۲-۵) پتانسیل الکتریکی

بار q را در میدان الکتریکی \bar{E} در نظر میگیریم. نیرویی که میدان \bar{E} بر بار q وارد می‌آورد در جهت خطوط میدان بوده و اندازه آن برابر qE میباشد. مقدار کاری که میدان \bar{E} برای حرکت دادن بار q از نقطه A به نقطه B در امتداد مسیر C انجام میدهد برابر است با:

$$W = q \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = -q \int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (81-2)$$

شکل (۲۰-۲) میدان \bar{E} و مسیر حرکت بار q را نشان میدهد. اگر W مثبت باشد، کار توسط میدان انجام شده است ولی چنانچه W منفی باشد، میدان کار منفی انجام داده و به بیان دیگر کار توسط یک عامل خارجی انجام گرفته است.



شکل (۲-۲۰) تغییر مکان بار q در میدان الکتریکی E از نقطه A به نقطه B

بر حسب تعریف، مقدار کاری را که میدان الکتریکی برای حرکت دادن واحد بار مثبت ($q=+1 C$) از نقطه A به نقطه B انجام میدهد (یا کار لازم برای حرکت دادن واحد بار مثبت از نقطه B به نقطه A توسط یک عامل خارجی) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B نامیده شده و بصورت V_{AB} نشان داده میشود. بنابراین می توان نوشت:

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (۸۲-۲)$$

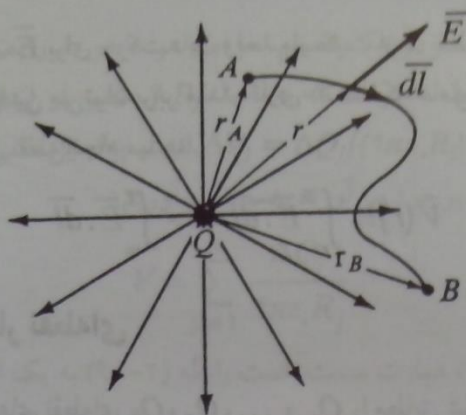
اگر مسیر C همه جا بر خطوط میدان عمود باشد (زاویه بین دو بردار \vec{E} و $d\vec{l}$ برابر 90° باشد) $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ مساوی صفر و در نتیجه کار لازم برای حرکت دادن بار q در امتداد مسیر C صفر خواهد بود. تحت چنین شرایطی اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B (یعنی V_{AB}) مساوی صفر بوده و دو نقطه A و B را هم پتانسیل گویند. مجموعه نقاطی که هم پتانسیل هستند تشکیل سطوحی به نام سطوح هم پتانسیل میدهند. بنابراین سطوح هم پتانسیل همیشه بر خطوط میدان عمود هستند.

■ پتانسیل بار نقطه‌ای

نقاط A و B را در میدان بار نقطه‌ای Q ، مطابق شکل (۲-۲۱)، در نظر میگیریم. در دستگاه مختصات کروی میدان بار نقطه‌ای Q بصورت $\vec{E} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{a}_r$ و بردار عنصر طول برابر $d\vec{l} = dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{a}_\phi$ میباشد. با استفاده از رابطه (۸۲-۲) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B که از طریق مسیر دلخواه C به یکدیگر وصل شده‌اند به شرح زیر محاسبه میشود:

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \right) \cdot (dr \hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{a}_\phi)$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \quad (۸۳-۲)$$



شکل (۲-۲۱) اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B در میدان بار نقطه‌ای Q

رابطه (۲-۸۳) نشان می‌دهد که در میدان یک بار نقطه‌ای، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه فقط به فواصل آنها از محل بار بستگی دارد و نه به مسیری که دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌کند.

بحث ما تا به حال درباره اختلاف پتانسیل بین دو نقطه بوده است، ولی اگر بخواهیم صحبت از پتانسیل یک نقطه بنماییم باید به دلخواه پتانسیل نقطه‌ای از فضا بنام «نقطه مبنا» را برابر صفر تعریف کنیم. بنابراین می‌توان گفت که پتانسیل یک نقطه مساوی اختلاف پتانسیل آن نقطه نسبت به نقطه مبنا می‌باشد. معمول است که پتانسیل نقطه‌ای واقع در بینهایت صفر فرض شود. با قرار دادن $r_B = \infty$ در رابطه (۲-۸۳)، پتانسیل نقطه A را در میدان بار نقطه‌ای Q بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \quad (۲-۸۴)$$

با حذف اندیس A در رابطه (۲-۸۴)، پتانسیل نقطه‌ای به فاصله r از بار Q به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۲-۸۵)$$

تمام نقاطی که دارای پتانسیل ثابت V هستند روی سطح کره‌ای به شعاع $r = Q/4\pi\epsilon_0 V$ قرار می‌گیرند. بنابراین سطوح هم پتانسیل در میدان بار نقطه‌ای Q سطوح کراتی هستند که مرکز همه آنها بار Q می‌باشد.

پس از انتخاب نقطه‌ای واقع در بینهایت بعنوان نقطه مبنا، پتانسیل یک نقطه از فضا در میدان الکتریکی \vec{E} را بصورت کلی زیر تعریف می‌کنیم: «پتانسیل یک نقطه در میدان الکتریکی \vec{E} برابر

مقدار کاری است که میدان \vec{E} برای حرکت دادن واحد بار مثبت از آن نقطه به بینهایت انجام میدهد. پتانسیل یک نقطه را همچنین می‌توان برابر مقدار کاری دانست که عامل خارجی برای آوردن واحد بار مثبت از بینهایت به آن نقطه انجام میدهد.

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (۸۶-۲)$$

■ پتانسیل چندین بار نقطه‌ای

نقطه دلخواه A و بارهای نقطه‌ای Q_1, Q_2, \dots, Q_n را مطابق شکل (۲-۳) در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا از رابطه $\vec{E} = \sum_{j=1}^n \vec{E}_j$ بدست می‌آید که در آن \vec{E}_j میدان حاصل از بار Q_j است. پتانسیل نقطه A در میدان \vec{E} را با بکار بردن رابطه (۲-۸۶) به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V_A &= \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_r^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_r^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_r^{\infty} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = \sum_{j=1}^n \int_r^{\infty} \vec{E}_j \cdot d\vec{l} \quad (۸۷-۲) \end{aligned}$$

اما جمله $\int_r^{\infty} \vec{E}_j \cdot d\vec{l}$ پتانسیل ناشی از بار Q_j به تنهایی در نقطه A می‌باشد و مقدار آن با توجه به رابطه (۲-۸۴) برابر $Q_j / 4\pi\epsilon_0 R_j$ است. لذا می‌توان نوشت:

$$V_A = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j} \quad (۸۸-۲)$$

اگر نقطه A را با بردار مکان \vec{r} مشخص نموده و رابطه $R_j = |\vec{r} - \vec{r}'_j|$ را در رابطه (۲-۸۸) بکاربریم، خواهیم داشت:

$$V(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'_j|} \quad (۸۹-۲)$$

ملاحظه می‌شود که پتانسیل ناشی از چندین بار نقطه‌ای مساوی مجموع پتانسیلهایی است که هر کدام از بارها به تنهایی بوجود می‌آورد. به بیان دیگر اصل جمع آثار را می‌توان در مورد محاسبه پتانسیل چندین بار نقطه‌ای بکار برد.

■ پتانسیل برای توزیعهای پیوسته

برای محاسبه پتانسیل ناشی از توزیعهای پیوسته بار الکتریکی (خطی، سطحی و حجمی)، ابتدا

بار را به تعداد زیادی از عناصر کوچک تقسیم نموده و هر عنصر بار را بصورت یک بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. پتانسیل در نقطه دلخواه A که به فاصله R_j از عنصر بار ΔQ_j قرار دارد و فقط از همین عنصر ناشی می‌شود برابر با $\Delta V_j = \Delta Q_j / (4\pi\epsilon_0 R_j)$ است. پتانسیل ناشی از کلیه عناصر را با جمع پتانسیلهایی که یکایک آنها بوجود می‌آورند بدست می‌آوریم:

$$V = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_j} \quad (90-2)$$

در حد وقتی که $\Delta Q_j \rightarrow 0$ ، عبارت سمت راست رابطه (۹۰-۲) به یک انتگرال تبدیل می‌شود. بر حسب اینکه توزیع بار خطی، سطحی، یا حجمی باشد انتگرال حاصله بترتیب بصورت انتگرال خطی، سطحی یا حجمی خواهد بود:

$$V(\vec{r}) = \int_c \frac{\rho_l(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dl' \quad (91-2)$$

$$V(\vec{r}) = \int_{s'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad (92-2)$$

$$V(\vec{r}) = \int_{v'} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (93-2)$$

مثال (۲-۸) بار نقطه‌ای Q در نقطه با بردار مکان \vec{r}' ، مطابق شکل (۲-۲۲)، واقع است. پتانسیل حاصل از این بار را در نقطه‌ای با بردار مکان \vec{r} ، وقتی که $r > r'$ باشد، بصورت یک سری برحسب r بدست آورید.
حل:

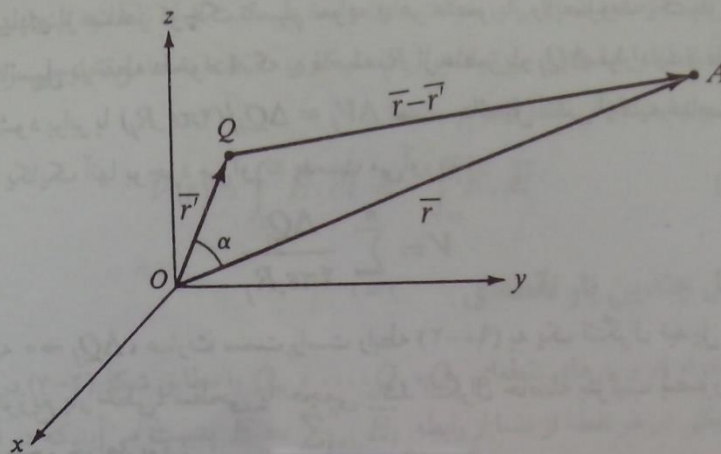
با بکار بردن رابطه (۲-۸۹)، پتانسیل حاصل از بار Q در نقطه A عبارت است از:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

اما:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \alpha)^{1/2} = (r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{1/2} = r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{1/2}$$

در نتیجه:



شکل (۲-۲۲) بار نقطه‌ای Q و نحوه محاسبه پتانسیل حاصل از آن در فواصل دور

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \underbrace{\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}}_{=t \ll 1} \right)^{-1/2} \quad (۹۴-۲)$$

با استفاده از بسط:

$$(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 + \dots$$

در رابطه (۹۴-۲) داریم:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{1}{2r'^2} \left[3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - (rr')^2 \right] + \dots \right\} \quad (۹۵-۲)$$

با توجه به اینکه $(r'/r) \ll 1$ میباشد، جملات با درجات بالاتر در سری (۹۵-۲) به سرعت کاهش یافته و لذا کافی است به چند جمله اول سری قناعت کنیم:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &\simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q\vec{r} \cdot \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^5} \left[3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - (rr')^2 \right] \\ &\simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Qr' \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Qr'^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \right) \quad (۹۶-۲) \end{aligned}$$

□

اگر چندین بار نقطه‌ای Q_1, Q_2, \dots, Q_n در نقاط $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_n$ داشته باشیم، پتانسیل حاصل از آنها را در فواصل دور با استفاده از رابطه (۹۶-۲) و اصل جمع آثار بصورت زیر می‌نویسیم:

$$V(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_j \vec{r} \cdot \vec{r}'_j}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q_j}{8\pi\epsilon_0 r^5} \left[3(\vec{r} \cdot \vec{r}'_j)^2 - (r r'_j)^2 \right] + \dots \right\}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n Q_j}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sum_{j=1}^n Q_j \vec{r} \cdot \vec{r}'_j}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\sum_{j=1}^n Q_j \left[3(\vec{r} \cdot \vec{r}'_j)^2 - (r r'_j)^2 \right]}{8\pi\epsilon_0 r^5} + \dots \quad (97-2)$$

چنانچه بخواهیم پتانسیل حاصل از توزیع پیوسته‌ای را در فواصل دور بدست آوریم کافی است که هر کدام از مجموع‌ها را در رابطه (۹۷-۲) با انتگرال جایگزین نماییم. مثلاً برای توزیع پیوسته بار در حجم V خواهیم داشت:

$$V(\vec{r}) = \frac{\int_V dQ}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\int_V \vec{r} \cdot \vec{r}' dQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots \quad (98-2)$$

پتانسیل حاصل از دو قطبی، چهار قطبی^۱ و چند قطبی^۲ در فواصل دور را می‌توان به سادگی و سریعاً از رابطه (۹۷-۲) بدست آورد. برای دو قطبی الکتریکی شکل (۴-۲) داریم: $Q_1 = Q$ ، $Q_2 = -Q$ ، $\vec{r}'_1 = (d/2)\hat{a}_z$ و $\vec{r}'_2 = (-d/2)\hat{a}_z$ ، در نتیجه:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q-Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q \frac{d}{2} \vec{r} \cdot \hat{a}_z + (-Q) \frac{d}{2} (-\vec{r} \cdot \hat{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

$$\approx \frac{Qd \vec{r} \cdot \hat{a}_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (99-2)$$

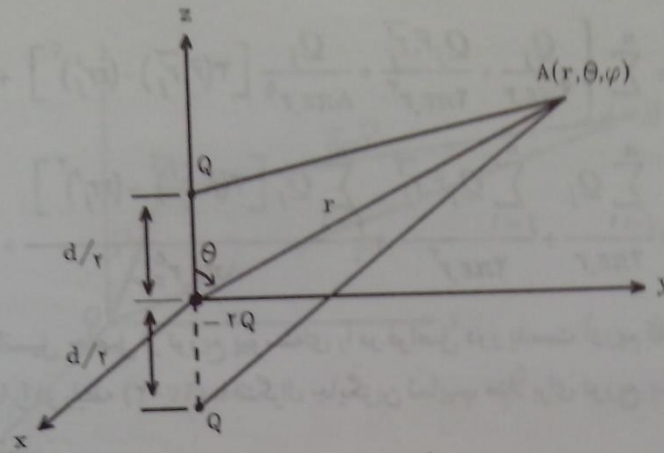
یادآوری میشود که $\vec{p} = Qd \hat{a}_z$ گشتاور دو قطبی می‌باشد.

برای چهار قطبی خطی که در شکل (۲۳-۲) نشان داده شده است داریم:

$$Q_1 = Q, \quad Q_2 = Q, \quad Q_3 = -2Q$$

$$\vec{r}'_1 = \frac{d}{2} \hat{a}_z, \quad \vec{r}'_2 = -\frac{d}{2} \hat{a}_z, \quad \vec{r}'_3 = 0$$

در نتیجه پتانسیل حاصل از چهار قطبی در فواصل دور ($r \gg d$) برابر است با:



شکل (۲-۲۳) چهارقطبی الکتریکی خطی

$$V(\vec{r}) = \frac{Q+Q-2Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q\frac{d}{r}\hat{a}_z \cdot \vec{r} - Q\frac{d}{r}\hat{a}_z \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \left\{ Q \left[3\left(\frac{d}{r}\vec{r} \cdot \hat{a}_z\right)^2 - \left(r\frac{d}{r}\right)^2 \right] + Q \left[3\left(-\frac{d}{r}\vec{r} \cdot \hat{a}_z\right)^2 - \left(r\frac{d}{r}\right)^2 \right] - 2Q[0] \right\} + \dots$$

$$\simeq \frac{2Q\left(\frac{d}{r}\right)^2}{8\pi\epsilon_0 r^5} \left[3(\vec{r} \cdot \hat{a}_z)^2 - r^2 \right] = \frac{Q\left(\frac{d}{r}\right)^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (100-2)$$

ملاحظه میکنیم پتانسیل یک دوقطبی متناسب با r^{-2} و پتانسیل یک چهارقطبی خطی متناسب با r^{-3} تغییر میکند. بنابراین کاهش پتانسیل چهارقطبی به مراتب سریعتر از کاهش پتانسیل دوقطبی می باشد. اکنون که پتانسیل حاصل از دوقطبی و چهارقطبی را بدست آورده ایم، هر کدام از جملات رابطه (۲-۹۶) را می توانیم بخوبی تفسیر نماییم. اولین جمله پتانسیل حاصل از بار Q در مبدأ مختصات بوده و دومین جمله را میتوان پتانسیل حاصل از یک دوقطبی با گشتاور $Q\vec{r}$ دانست. سومین جمله را به مثابه پتانسیل ناشی از یک چهارقطبی تلقی میکنیم و جملات با درجات بالاتر را ممکن است منسوب به پتانسیل حاصل از چندقطبی ها نمود.

مثال (۲-۹) پتانسیل حاصل از یک خط بار به طول بینهایت با چگالی یکنواخت ρ_l را در نقطه ای به فاصله r از آن بدست آورید.

حل:

بطوری که خواهیم دید در این مثال نمی توان پتانسیل نقطه ای واقع در بینهایت را صفر فرض کرد. در نتیجه باید نقطه دیگری مانند A را بعنوان نقطه مبنا انتخاب نمود و پتانسیل نقطه دلخواه A را

برابر اختلاف پتانسیل بین A و A_0 تعریف کرد. با در نظر گرفتن شکل (۲-۲۴) پتانسیل حاصل از عنصر بار dq در نقطه A برابر است با:

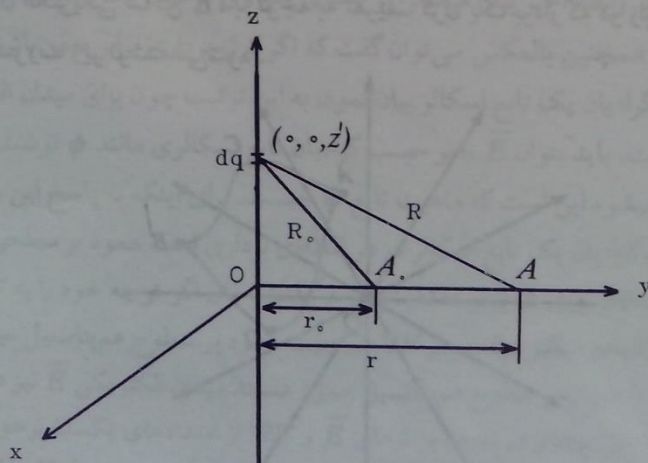
$$dv = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z'^2}} - \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r_0^2 + z'^2}} \quad (101-2)$$

پتانسیل حاصل از تمامی خط بار را با انتگرال گرفتن از رابطه (۲-۱۰۱) به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} - \frac{dz'}{\sqrt{r_0^2 + z'^2}} \right] = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} - \frac{dz'}{\sqrt{r_0^2 + z'^2}} \right] \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(\sqrt{r^2 + z'^2} + z') - \ln(\sqrt{r_0^2 + z'^2} + z') \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{\sqrt{r^2 + z'^2} + z'}{\sqrt{r_0^2 + z'^2} + z'} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} \quad (102-2) \end{aligned}$$

از رابطه (۲-۱۰۲) پیدا است که $r_0 = \infty$ انتخاب مناسبی برای نقطه مبنا نیست، زیرا در آن صورت پتانسیل تمام نقاط برابر بینهایت خواهد شد. همچنین از رابطه (۲-۱۰۲) می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که سطوح هم‌پتانسیل استوانه‌هایی هستند که محور آنها خط بار باشد.

□



شکل (۲-۲۴) خط بار به طول بینهایت و نحوه محاسبه پتانسیل حاصل از آن

۶-۲) معادله کول ماکسول برای میدان الکتریکی ساکن

در قسمت (۵-۲) نشان دادیم که اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B در میدان یک بار نقطه‌ای مستقل از مسیری است که دو نقطه A و B را به یکدیگر وصل میکند. حال اگر دو مسیر ACB و ADB را مطابق شکل (۲-۲۵) در میدان یک بار نقطه‌ای در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$V_{AB} = \int_{ACB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{ADB} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

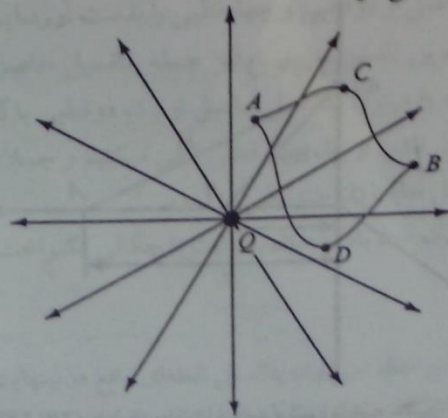
پس از منتقل کردن انتگرال روی مسیر ADB به سمت چپ داریم:

$$\int_{ACB} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{ADB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{ACBDA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (۲-۱۰۳)$$

حال اگر چندین بار نقطه‌ای یا توزیع پیوسته‌ای از بار الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا داشته باشیم با بکار بردن اصل جمع آثار می‌توان نتیجه گرفت که برای هر میدان الکتریکی ساکن داریم:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (۲-۱۰۴)$$

رابطه (۲-۱۰۴) بیان میکند که سیرکولاسیون میدان الکتریکی ساکن حول هر مسیر بسته همواره صفر است. بنابراین میدان الکتریکی ساکن یک میدان پایستار بوده و مقدار کار لازم برای حرکت دادن بار q در امتداد هر مسیر بسته در یک میدان الکتریکی ساکن همواره صفر می‌باشد. کول میدان الکتریکی ساکن \vec{E} ، با توجه به تعریف کول یک بردار که در رابطه (۱-۱۱۰) ارائه شده است، بصورت زیر نوشته می‌شود:



شکل (۲-۲۵) دو مسیر مختلف بین نقاط A و B در میدان بار نقطه‌ای Q

$$\nabla \times \bar{E} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta c} \bar{E} \cdot d\bar{l}}{\Delta s} \hat{a}_n \quad (105-2)$$

اما با توجه به رابطه (۱۰۴-۲) داریم:

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (106-2)$$

رابطه اخیر بعنوان معادله کرل ماکسول برای میدان الکتریکی ساکن شناخته می‌شود. این معادله بیان میکند که کرل یک میدان الکتریکی ساکن در هر نقطه از فضا همواره برابر صفر است.

تا به حال دو معادله ماکسول را برای میدان الکتریکی ساکن مطالعه کرده‌ایم که عبارت از $\nabla \cdot \bar{E} = \rho_v / \epsilon_0$ و $\nabla \times \bar{E} = 0$ می‌باشند. این دو معادله قادر به تشریح کامل خصوصیات و رفتار میدان الکتریکی ساکن می‌باشند. معادله دیورژانس ماکسول ارتباط بین میدان و مولد آن یعنی بار الکتریکی را بیان میکند و معادله کرل ماکسول مشخص میکند که آیا یک میدان برداری میتواند یک میدان الکتریکی ساکن باشد یا نه، به عبارت دیگر هر گونه جوابی که از حل معادله دیورژانس ماکسول برای توزیع بار معینی بدست آید باید در معادله کرل ماکسول نیز صدق نماید.

۷-۲) پتانسیل و شدت میدان الکتریکی

در مبحث گرادیان، در فصل اول، نشان دادیم که برای هر تابع اسکالر ϕ رابطه $\nabla(\nabla\phi) \cdot d\bar{l} = 0$ همواره برقرار است. با بکار بردن این نتیجه در رابطه (۱۱۰-۱)، تساوی $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ فوراً بدست خواهد آمد. رابطه اخیر بیان میکند اگر برداری مساوی گرادیان یک تابع اسکالر باشد کرل آن صفر خواهد بود. همچنین بالعکس می‌توان گفت که اگر کرل برداری برابر صفر باشد بتوان آن بردار را بر حسب گرادیان یک تابع اسکالر بیان نمود. به این ترتیب چون برای میدان الکتریکی ساکن $\nabla \times \bar{E} = 0$ است، باید بتوان \bar{E} را بر حسب گرادیان تابع اسکالری مانند ϕ نوشت. اما سؤالی که بلافاصله مطرح میشود این است که ماهیت تابع ϕ چیست. برای اینکه به پاسخ این سؤال پی ببریم باید بیاد آوریم که گرادیان یک تابع اسکالر در هر نقطه‌ای برداری است عمود بر سطحی که از آن نقطه میگذرد و تابع اسکالر روی آن برابر مقدار ثابتی می‌باشد. حال اگر توجه خود را به تابع پتانسیل V معطوف نماییم، نتیجه میگیریم که بردار ∇V در جهت عمود بر سطوح هم‌پتانسیل میباشد. از طرف دیگر چون خطوط میدان بر سطوح هم‌پتانسیل عمود هستند میدان الکتریکی \bar{E} نیز در جهت عمود بر سطوح هم‌پتانسیل بوده و در نتیجه بردارهای \bar{E} و ∇V از امتدادهای یکسان برخوردارند. برای اینکه رابطه دقیق بین \bar{E} و ∇V را بدست آوریم دو سطح هم‌پتانسیل V و $V + \Delta V$ را در میدان الکتریکی ساکن \bar{E} ، مطابق شکل (۲-۲۶)، در نظر میگیریم. اختلاف پتانسیل دو سطح

(یعنی ΔV) بینهایت کوچک فرض میشود. واضح است که جهت میدان \bar{E} باید در جهت کاهش پتانسیل باشد، زیرا اگر بار q از نقطه B به نقطه A در امتداد میدان تغییر مکان دهد و پتانسیل نقطه B بالاتر از پتانسیل نقطه A باشد کار لازم برای حرکت دادن بار q توسط میدان انجام میگیرد و لذا میدان باید در جهت تغییر مکان، یعنی در جهت کاهش پتانسیل، باشد. چون دو سطح هم پتانسیل V و $V + \Delta V$ خیلی به یکدیگر نزدیک هستند میدان الکتریکی بین آنها را در همسایگی نقطه A یکنواخت و برابر میدان در نقطه A فرض میکنیم. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B برابر است با:

$$V_{AB} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = \bar{E}_A \cdot \Delta\bar{l} = V - (V + \Delta V) = -\Delta V$$

اما از طرف دیگر:

$$\bar{E}_A \cdot \Delta\bar{l} = -E_A \Delta n = -\Delta V$$

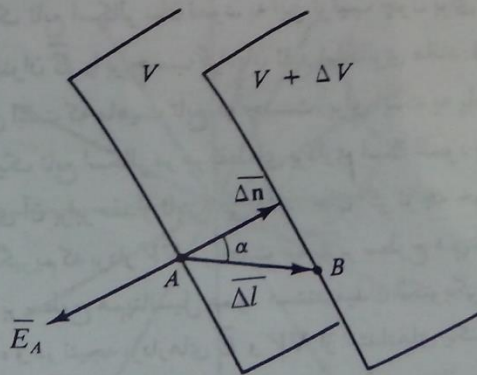
Δn تصویر $\Delta\bar{l}$ روی امتداد عمود بر سطح V می باشد. در نتیجه:

$$E_A = \frac{\Delta V}{\Delta n}$$

و:

$$\bar{E}_A = -\frac{\Delta V}{\Delta n} \hat{a}_n \quad (107-2)$$

که \hat{a}_n بردار واحدی در جهت Δn می باشد. در حد وقتی که Δn به سمت صفر میل کند،



شکل (۲۶-۲) دو سطح با پتانسیل های V و $V + \Delta V$ و به فاصله Δn از یکدیگر

θ $(\Delta V/\Delta n)$ برابر گرادیان تابع V در نقطه A میشود. اما چون A یک نقطه دلخواه است میتوان اندیس A را از رابطه (۱۰۷-۲) حذف نمود و رابطه بین میدان الکتریکی ساکن \vec{E} و پتانسیل V را در یک نقطه بصورت زیر نوشت:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (108-2)$$

با معلوم بودن پتانسیل می توان شدت میدان الکتریکی را به سادگی با استفاده از رابطه (۱۰۸-۲) محاسبه نمود.

مثال (۱۰-۲) مطلوب است محاسبه شدت میدان الکتریکی دوقطبی شکل (۲-۴) و چهارقطبی شکل (۲-۲۳) که پتانسیل آنها در فواصل دور به ترتیب از روابط (۲-۹۹) و (۲-۱۰۰) بدست می آید.

حل:

دوقطبی:

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla V &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi\right) \\ &= \frac{-Qd}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\hat{a}_\theta\right] \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(\cos\theta\hat{a}_r + \sin\theta\hat{a}_\theta) \end{aligned}$$

توجه کنید که این نتیجه همان رابطه (۲-۱۴) است که قبلاً به روش دیگری محاسبه شده بود.

چهارقطبی:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{-Q\left(\frac{d}{r}\right)^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3\cos^3\theta - 1}{r^3}\right)\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{3\cos^3\theta - 1}{r^3}\right)\hat{a}_\theta\right] \\ &= \frac{Qd^2}{16\pi\epsilon_0 r^5}\left[3(3\cos^3\theta - 1)\hat{a}_r + 9\sin\theta\cos\theta\hat{a}_\theta\right] \end{aligned}$$

□

■ خلاصه فصل

در این فصل میدانهای الکتریکی ساکن را که از توزیعهای بار الکتریکی معلومی در خلاء ناشی می‌شوند مورد بحث و بررسی قرار دادیم. کلیه مطالعات این فصل بر اساس قانون تجربی کولمب استوار می‌باشند. بطور خلاصه:

- قانون کولمب را بیان نموده و سپس کمیت شدت میدان الکتریکی (\vec{E}) حاصل از یک بار نقطه‌ای را تعریف نمودیم. این تعریف را به توزیعهای دیگر و از جمله چندین بار نقطه‌ای و توزیعهای پیوسته از نوع خطی، سطحی و حجمی گسترش دادیم. روابطی که میدان الکتریکی را بر حسب چگالی توزیع بار بیان می‌کنند بدست آوردیم.

- خطوط میدان و شیوه تعیین آنها را در دستگامهای مختصات مختلف بررسی نمودیم.

- قانون گوس را برای یک توزیع دلخواه بار الکتریکی مطالعه نموده و استفاده از آنرا جهت محاسبه میدان الکتریکی ناشی از برخی توزیعهای بار که ویژگیهای لازم را دارا باشند مورد بحث قرار دادیم. همچنین شکل نقطه‌ای قانون گوس را که بعنوان یکی از معادلات ماکسول شناخته میشود آموختیم ($\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$).

- پتانسیل را تعریف نموده و نحوه محاسبه آن را برای توزیعهای مختلف بار الکتریکی ارائه نمودیم.

- نشان دادیم که میدان الکتریکی ساکن یک میدان پاستار است و کرول آن همواره برابری صفر می‌باشد ($\nabla \times \vec{E} = 0$).

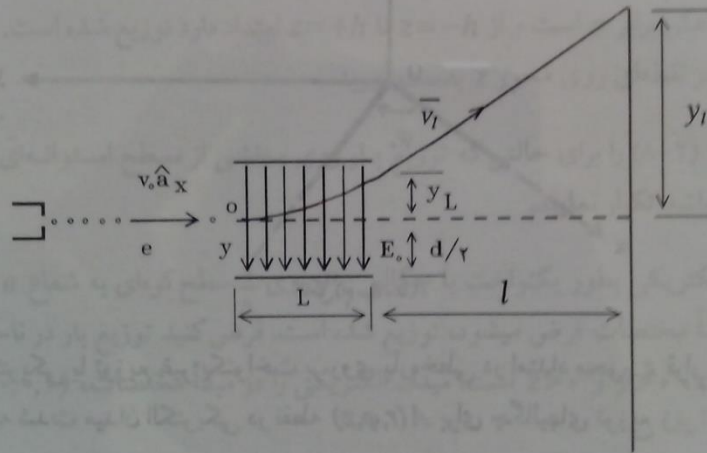
- ارتباط میدان الکتریکی با پتانسیل را تحلیلی کردیم و این نتیجه مهم را گرفتیم که:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

■ مسائل

۱-۲ اصول کار یک اسپلوسکوپ با انحراف میدان الکتریکی ساکن در شکل (م-۲-۱) نشان داده شده است. الکترونها پس از خارج شدن از تفنگ الکترونی با سرعت ثابت $\vec{v} = v_x \hat{a}_x$ وارد ناحیه بین صفحات انحراف دهنده میشوند. جهت سادگی، مطالعه خود را به حرکت یک الکترون با بار e و جرم m محدود مینماییم. اعمال ولتاژ V_x به صفحات انحراف دهنده تولید میدان الکتریکی $\vec{E} = E_x \hat{a}_x$ میکند که $E_x = V_x/d$ است.

الف) نشان دهید که مسیر حرکت الکترون در بین صفحات انحراف دهنده یک سهمی است و از آنجا فاصله y_L و نیز سرعت الکترون در لحظه خروج از بین دو صفحه، یعنی v_L ، را محاسبه کنید.
 ب) انحراف الکترون از محور لامپ اسپلوسکوپ یا به عبارت دیگر فاصله y_L را بدست آورید و ملاحظه کنید که این انحراف متناسب با ولتاژ اعمال شده یعنی V_x میباشد.



شکل (م-۲-۱)

۲-۲ بار الکتریکی $+Q$ در نقطه $(-a, 0, 0)$ و بار $-2Q$ در نقطه $(a, 0, 0)$ قرار دارد. نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که در آن شدت میدان الکتریکی حاصل از دو بار فوق صفر باشد.

۳-۲ چهار بار نقطه‌ای مساوی و هر یک به اندازه Q در چهار رأس یک مربع به ضلع a قرار دارند. میدان الکتریکی \vec{E} را در نقطه‌ای روی محور این مربع محاسبه نمایید. محور مربع را منطبق بر محور z فرض کنید.

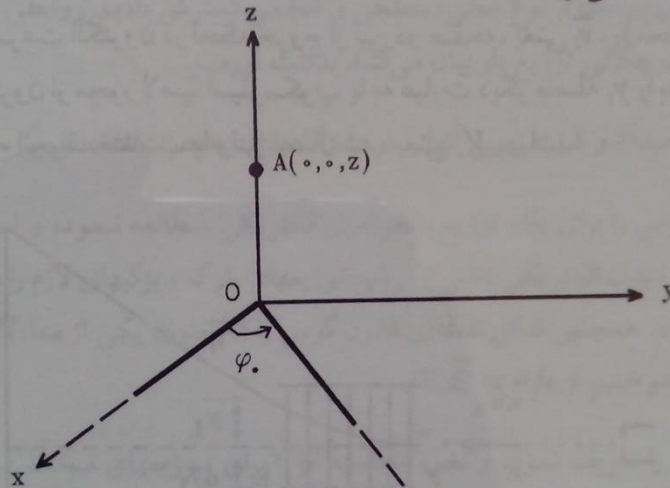
۴-۲ بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی ρ_L روی نیمه مثبت محور z ($z > 0$) توزیع شده

است. میدان الکتریکی \vec{E} را در نقطه $A(r, \varphi, 0)$ روی صفحه xy بدست آورید.

۵-۲ بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی ρ_l در امتداد دو نیم خط که زاویه بین آنها φ است توزیع شده است. دو نیم خط بار را، مطابق شکل (م-۲-۵)، در صفحه xy و یکی را منطبق بر محور x فرض می کنیم.

الف) میدان الکتریکی \vec{E} را در نقطه $A(0, 0, z)$ روی محور z محاسبه کنید.

ب) نشان دهید که نتیجه بدست آمده به ازای $\varphi = \pi$ به میدان الکتریکی ناشی از یک خط بینهایت بار ساده می گردد.



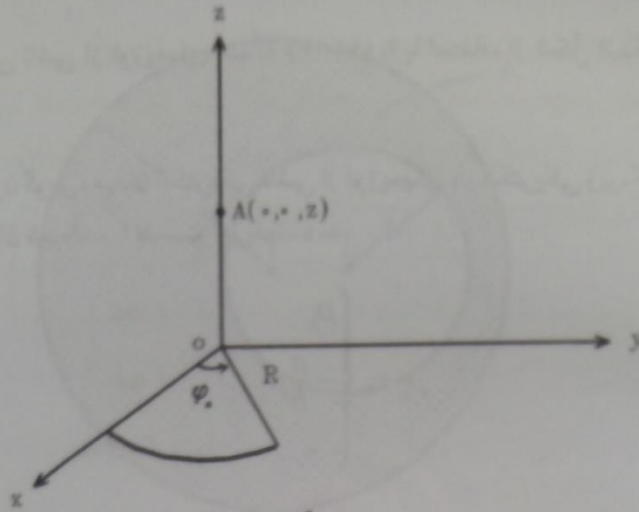
شکل (م-۲-۵)

۶-۲ بار الکتریکی با توزیع غیر یکنواخت بر روی پاره خطی در امتداد محور z قرار دارد. مطلوب است محاسبه شدت میدان الکتریکی در نقطه $A(r, \varphi, z)$ برای چگالیهای توزیع زیر:

$$\rho_l = \begin{cases} |z| & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$\rho_l = \begin{cases} z & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \quad \text{ب)}$$

۷-۲ بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی ρ_l در امتداد قوسی از یک دایره به شعاع R و محدود به $0 < \varphi < \varphi_0$ ، مطابق شکل (م-۲-۷)، توزیع شده است. میدان الکتریکی \vec{E} را در نقطه‌ای روی محور z محاسبه نمایید. توجه کنید که نتیجه به ازای $\varphi_0 = 2\pi$ به رابطه (۲-۲۸) ساده می شود.



شکل (۷-۲-۲)

۸-۲ بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی ρ_s روی یک سطح استوانه‌ای که محور آن بر محور z منطبق و شعاعش برابر a است و از $z = -h$ تا $z = +h$ امتداد دارد توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور z بدست آورید.

۹-۲ مسأله (۸-۲) را برای حالتی که توزیع بار روی بخشی از سطح استوانه‌ای محدود به $0 < \varphi < \varphi_0$ باشد تکرار نمایید.

۱۰-۲ بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی ρ_s روی $\frac{1}{8}$ سطح کره‌ای به شعاع a ، که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات فرض میشود، توزیع شده است. فرض کنید توزیع بار در ناحیه‌ای از فضا باشد که $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ است. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات، $\vec{E}(0, 0, 0)$ بدست آورید.

۱۱-۲ با استفاده از میدان الکتریکی یک صفحه بینهایت بار با توزیع یکنواخت، مندرج در رابطه (۳۶-۲)، میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای بار زیر را بدست آورید:

$$\rho_s = \begin{cases} \rho_s & z = a \\ -\rho_s & z = -a \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\rho_v = \begin{cases} a - |z| & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۱۲-۲ میدان الکتریکی ناشی از توزیعیهای مسأله (۱۱-۲) را با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس بدست آورید.

۱۳-۲ با استفاده از قانون گوس، میدان الکتریکی ناشی از توزیعیهای بار الکتریکی زیر، که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده‌اند، را بدست آورید :

$$\rho_s = \begin{cases} \rho_s & r=a \\ -\frac{a}{b}\rho_s & r=b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

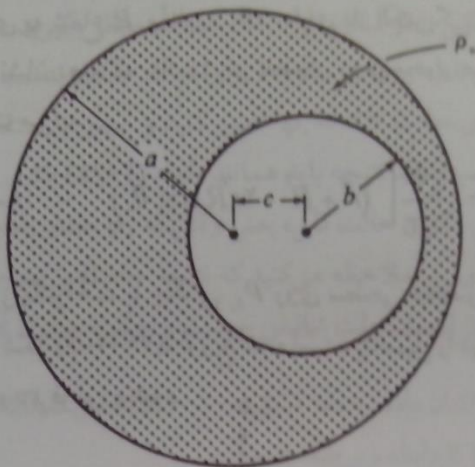
$$\rho_v = \begin{cases} \rho \cdot \frac{r}{a} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۱۴-۲ مسأله (۱۳-۲) را برای توزیعیهای بار الکتریکی زیر، که در دستگاه مختصات کروی بیان شده‌اند، تکرار نمایید :

$$\rho_s = \begin{cases} \rho_s & r=a \\ -\frac{a^2}{b^2}\rho_s & r=b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\rho_v = \begin{cases} \rho \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۱۵-۲ در فضای بین دو سطح استوانه‌ای به طول بینهایت بار الکتریکی با چگالی ρ بطور یکنواخت توزیع شده است. شعاعهای استوانه‌ها برابر a و b بوده و فاصله بین محورهای آنها مساوی مقدار ثابت c است که $c < a - b$ فرض میشود. میدان الکتریکی را در درون استوانه به شعاع b محاسبه نمایید. شکل (م-۱۵-۲) سطح مقطع توزیع بار را نشان میدهد. (راهنمایی: با استفاده از قانون گوس ابتدا میدان الکتریکی حاصل از یک استوانه بینهایت طویل بار با چگالی توزیع $\rho_v = \rho$ را بدست آورید و سپس از اصل جمع آثار استفاده نمایید.)



شکل (م-۶-۱۵)

۲-۱۶ مطلوب است محاسبه چگالی توزیع بار الکتریکی در تمام نقاط فضا برای میدانهای الکتریکی زیر:

الف) در دستگاه مختصات کروی:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\vec{E} = \frac{1-e^{-r}}{4\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$$

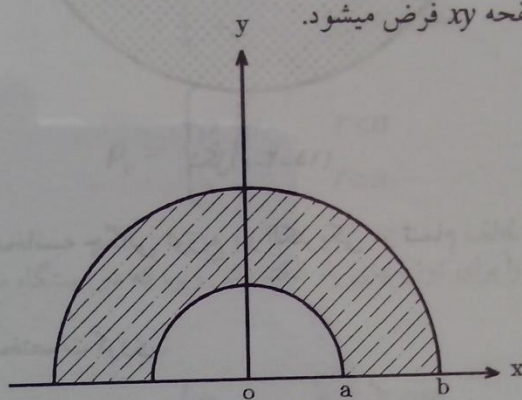
ج) در دستگاه مختصات مستطیلی:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z > a \\ -\frac{\rho_s}{4\epsilon_0} \hat{a}_z & 0 < z < a \\ -\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}$$

۱۷-۲ یک عرقچین کروی به شعاع R و زاویه 2θ دارای بار الکتریکی با چگالی ρ_s و توزیع سطحی یکنواخت است. نشان دهید که پتانسیل در نقطه‌ای روی محور عرقچین و به فاصله r از مرکز آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V(r) = \frac{\rho_s R}{2\epsilon_0 r} \left[(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2} - |r - R| \right]$$

۱۸-۲ بار الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی ρ_s روی سطحی محصور بین دو نیم‌دایره به شعاعهای a و b ، مطابق شکل (م-۲-۱۸)، توزیع شده است. پتانسیل را در مبدأ مختصات بدست آورید. توزیع بار در صفحه xy فرض میشود.



شکل (م-۲-۱۸)

۱۹-۲ برای توزیع بار الکتریکی مسأله (۲-۱۰)، پتانسیل را در مبدأ مختصات محاسبه کنید.

۲۰-۲ بار الکتریکی با چگالی ρ بطور یکنواخت در کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات فرض میشود. مطلوب است محاسبه پتانسیل حاصل از این توزیع بار در تمام نقاط فضا به دو روش زیر:

الف) محاسبه میدان الکتریکی \vec{E} (مثلاً با استفاده از قانون گوس) و بکار بردن رابطه (۲-۸۶)،
ب) مستقیماً با استفاده از رابطه (۲-۹۳).

۲۱-۲ پتانسیل ناشی از توزیعهای بار الکتریکی در مسائل (۲-۱۱)، (۲-۱۳) و (۲-۱۴) را بدست آورید. اگر بینهایت را نتوان بعنوان نقطه مبنا در نظر گرفت، نقطه مبنای مناسبی را خود انتخاب کنید (پتانسیل نقطه مبنا صفر فرض میشود). (راهنمایی: چون میدان الکتریکی برای این توزیعها قبلاً محاسبه شده است، از رابطه (۲-۸۶) برای تعیین پتانسیل استفاده کنید.)

۲۲-۲ توزیع بار الکتریکی را در شکل (م-۲-۷) مجدداً در نظر بگیرید.

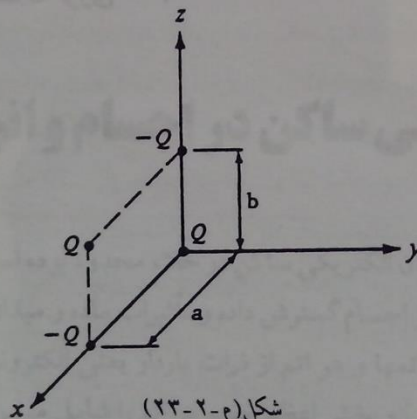
الف) پتانسیل را در نقطه‌ای روی محور z برای توزیع مذکور بدست آورید.

ب) پتانسیل را برای حالت $\varphi = 2\pi$ تعیین کنید و سپس با استفاده از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ میدان الکتریکی را محاسبه کنید. نتیجه باید همانند رابطه (۲-۲۸) باشد.

ج) میدان الکتریکی را برای حالت کلی، یعنی وقتی که φ مقدار دلخواهی دارد، مجدداً از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ بدست آورید. ملاحظه می‌کنید که نتیجه حاصله با نتیجه‌ای که در مسأله (۲-۷) بدست آمده است یکسان نیست. علت تناقض چیست و چگونه میتوان آن را برطرف کرد؟

۲۳-۲ برای چهار قطبی نشان داده شده در شکل (م-۲-۲۳) تحقیق کنید که تابع پتانسیل در نقاط دور ($r \gg a$ و $r \gg b$) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{3abQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$



شکل (م-۲-۲۳)

۲۴-۲ بار الکتریکی با چگالی ثابت ρ_{l_1} روی پاره خطی در امتداد محور z در فاصله $-a < z < a$ توزیع شده است. نشان دهید که خطوط میدان الکتریکی برای این توزیع بار هذلولی‌هایی هستند که کانون‌هایشان نقاط انتهایی پاره خط بار میباشند. همچنین نشان دهید که سطوح هم‌پتانسیل، سطوح بیضوی شکلی هستند که کانون‌هایشان همان نقاط انتهایی پاره خط بار می‌باشند.

۲۵-۲ دو خط بینهایت بار موازی یکدیگر بوده و دارای چگالیهای توزیع مساوی و مختلف‌العلامه هستند (یعنی $\rho_{l_1} = -\rho_{l_2}$ و $\rho_{l_1} = \rho_{l_2}$). نشان دهید که سطوح هم‌پتانسیل بصورت سطوح استوانه‌ای شکل موازی با خطوط بار می‌باشند.

۲-۲۶ تحقیق کنید کدامیک از میدانهای زیر شرایط یک میدان الکتریکی ساکن را دارا می باشد:

(الف) در دستگاه مختصات مستطیلی : $\bar{A} = \frac{1}{y} \hat{a}_x - \frac{x}{y^2} \hat{a}_y$

(ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای : $\bar{B} = \frac{1}{r} \hat{a}_\phi$

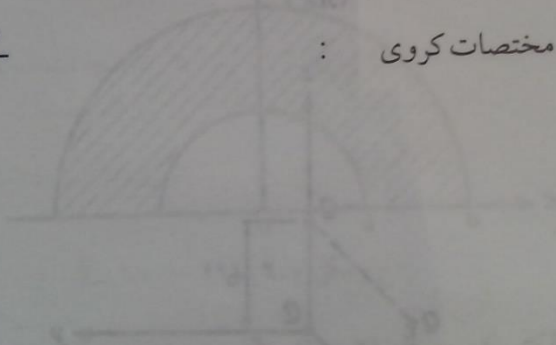
(ج) در دستگاه مختصات استوانه‌ای : $\bar{C} = \frac{1}{r^2} (\cos \phi \hat{a}_r + \sin \phi \hat{a}_\phi)$

(د) در دستگاه مختصات کروی : $\bar{D} = \left(3 + \frac{2}{r^2}\right) \cos \theta \hat{a}_r - \left(3 - \frac{1}{r^2}\right) \sin \theta \hat{a}_\theta$

۲-۲۷ مطلوب است محاسبه توزیع بار الکتریکی (ρ_v) که منجر به تولید هر یک از پتانسیلهای الکتریکی زیر گردیده است:

(الف) در دستگاه مختصات مستطیلی : $V = V_0 e^{-y} \sin y \sinh x$

(ب) در دستگاه مختصات کروی : $V = V_0 \frac{\sin \theta \cos \phi}{r^2}$





میدان الکتریکی ساکن در اجسام و انرژی الکتریکی

تاکنون مطالعه ما به میدان الکتریکی ساکن در خلاء محدود بوده است. در این فصل دامنه بحث خود را به میدان الکتریکی در اجسام گسترش داده و تأثیرات ماده و میدان بر یکدیگر را مورد بررسی قرار میدهیم. ماده از تجمع اتمها و هر اتم از ذرات باردار یعنی الکترونها و هسته تشکیل میشود. فضای بین الکترونها و هسته که بخش اعظم حجم هر اتم را شامل میشود خلاء بوده و بنابراین ماده را میتوان تجمعی از ذرات در خلاء دانست. تحت تأثیر یک میدان الکتریکی خارجی، ذرات باردار از خود عکس العمل نشان داده و میدانهای جدیدی را تولید می کنند. پدیده های ناشی از تأثیرات متقابل ماده و میدان بر یکدیگر بستگی به خواص و نوع ماده دارد. خواص ماده مانند هدایت الکتریکی و قطبی شدن^۱ را در مقیاس اتمی یا میکروسکوپی مطالعه و تشریح می کنیم، ولی بررسی رفتار میکروسکوپی میدانها کار آسانی نیست و خوشبختانه در بسیاری از کاربردهای مهندسی ضرورتی هم ندارد. مثلاً، مطالعه دقیق میدان و تغییرات آن از ذره ای به ذره دیگر در یک جسم اهمیتی در مسائل مورد علاقه ما نخواهد داشت. از اینرو کافی است میدانهای الکترومغناطیس در

اجسام را در مقیاس ماکروسکوپی، یعنی وقتی که ناشی از اثرات جمعی تعداد زیادی ذره باشد، تجزیه و تحلیل نماییم.

۳-۱) هدایت الکتریکی در ماده و دسته‌بندی اجسام

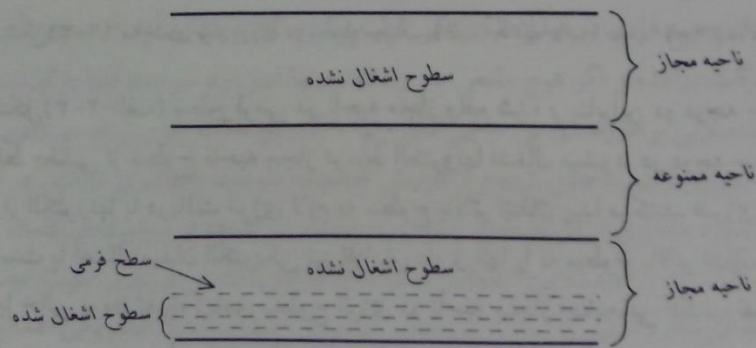
واحد ساختمانی ماده اتم است که متشکل از یک هسته با بار الکتریکی مثبت و تعدادی الکترون با بار منفی می‌باشد. مقدار کل بار الکترونیهای هر اتم با میزان بار هسته آن مساوی است، بطوری که اتم و ماده در حالت طبیعی از نظر بار الکتریکی خنثی هستند. الکترونها در لایه‌هایی به فواصل مختلف از هسته قرار می‌گیرند. الکترونهاى آخرین لایه که به عنوان الکترونهاى ظرفیت شناخته میشوند نقش اصلی را در فعل و انفعالات شیمیایی و هدایت الکتریکی بر عهده دارند. در برخی اجسام، الکترونهاى لایه آخر تحت تأثیر نیروی ضعیفی از سوی هسته بوده و با دریافت انرژی اندکی به سادگی از اتم خود جدا شده و به اتمهای دیگر می‌پیوندند. چنین الکترونهاىی که متعلق به اتم خاصی نیستند را **الکترونهاى آزاد** می‌نامند. فلزات دارای تعداد زیادی الکترون آزاد بوده که در اثر انرژی حرارتی محیط دارای حرکات مداوم ولی بدون نظم و ترتیب می‌باشند. سرعت متوسط الکترونها در مقیاس ماکروسکوپی صفر است و لذا از حرکات نامنظم آنها جریان الکتریکی به وجود نمی‌آید. اعمال یک میدان الکتریکی خارجی، الکترونهاى آزاد را با سرعت متوسطی به حرکت درآورده و در نتیجه جریانی که ناشی از جابجایی الکترونها است بوجود می‌آید. چنین پدیده‌ای را **هدایت الکتریکی** و جسمی را که قابلیت هدایت آن زیاد باشد، مانند اکثر فلزات، **هادی^۱** می‌نامند. در برخی از اجسام دیگر، الکترونهاى آخرین لایه را به سختی میتوان از هسته دور نمود و اعمال یک میدان الکتریکی خارجی فقط مرکز ثقل ابر الکترونی را نسبت به هسته اندکی جابجا میکند (الکترونهاى یک اتم را میتوان به مثابه یک ابر الکترونی کروی که مرکز آن بر هسته منطبق باشد تلقی نمود). در اینگونه اجسام الکترونهاى آخرین لایه همانند الکترونهاى نزدیک به هسته همیشه در مجاورت اتم خود باقی می‌مانند و از اینرو آنها را **الکترونهاى مقید** مینامند. به علت عدم قابلیت تحرک الکترونهاى مقید و ناچیز بودن تعداد الکترونهاى آزاد، هدایت الکتریکی در این قبیل اجسام بسیار اندک است و لذا آنها را **عایق^۲** نامند. جابجایی موضعی بارها در اجسام عایق پدیده دیگری موسوم به قطبی شدن را باعث میشود که حائز اهمیت زیادی بوده و بخشی از مطالعات ما در این فصل به آن اختصاص می‌یابد.

دسته سومى از اجسام وجود دارند که در حد میانى بین هادىها و عایقها قرار مى‌گیرند و به نام

1 - Conductor

2 - Dielectric (Insulator)

نیمه هادی^۱ شناخته میشوند. نیمه هادیها دارای تعدادی الکترون آزاد بوده و لذا تا حدودی قابلیت هدایت الکتريکی دارند. اما هدایت الکتريکی در نیمه هادیها بطوری که در ادامه روشن خواهد شد نه فقط توسط الکترونهاي آزاد بلکه از طریق حاملهای ديگري بنام حفره^۲ نیز انجام می پذیرد. برای آنکه تصویر روشنتری از نحوه هدایت در اجسام بدست آوریم، وضعیت الکترونهاي آخرین لایه را از نظر آزاد یا مقید بودن اجمالاً از دیدگاه نظریه کوانتم مورد بررسی قرار میدهیم. بر اساس این نظریه هر الکترون فقط مقادیر ناپيوسته معینی از انرژی را میتواند به خود اختصاص دهد. به عبارت ديگر، فقط سطوح معینی از انرژی وجود دارند که یک الکترون متناسب با اندازه انرژی اش یکی از آنها را اشغال میکند. طبق اصل پاولی^۳ هر سطح انرژی فقط توسط یک الکترون میتواند اشغال شود. در اجسام بلورین^۴ مانند الماس، سیلیسیم و اکثر فلزات، اتمها بطور منظم و فشرده در کنار یکدیگر قرار می گیرند. ساختمان سطوح انرژی در یک جسم بلورین، به علت تأثیر متقابل اتمها روی یکدیگر، به مراتب پیچیده تر از چنین ساختمانی در یک اتم تنها میباشد (منظور از اتم تنها حالتی است که اتمها را آنقدر از یکدیگر دور فرض کنیم تا تأثیر آنها روی همدیگر قابل اغماض شود). در یک جسم بلورین، چون طبق اصل پاولی الکترونهاي اتمها نباید سطوح انرژی یکسانی را اشغال کنند، هر سطح انرژی که اتمها به تنهایی می داشتند به تعداد زیادی سطح انرژی تقسیم شده و سطوح انرژی نهایتاً ساختمانی مطابق شکل (۱-۳) پیدا می کنند.



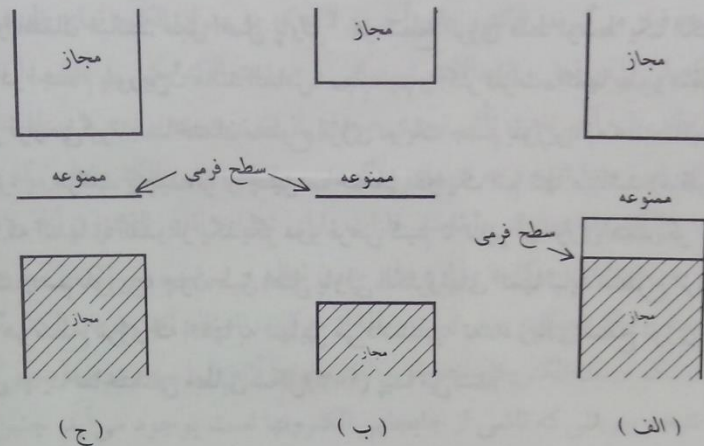
شکل (۱-۳) ساختمان نوار انرژی در اجسام بلورین

بطوری که ملاحظه می کنیم، ساختمان سطوح انرژی شامل دو ناحیه یا نوار مجاز و یک ناحیه ممنوعه است. هر کدام از نواحی مجاز دارای تعداد زیادی سطح انرژی نزدیک به هم است، بطوری

1 - Semiconductor
3 - Pauli's Principle

2 - Hole
4 - Crystalline

که میتوان تغییرات انرژی را در آنها تقریباً پیوسته در نظر گرفت. هیچ سطح انرژی در ناحیه ممنوعه نمی تواند توسط الکترونها اشغال گردد. الکترونها بطور طبیعی مایل به اشغال پایین ترین سطوح انرژی هستند. در درجه حرارت صفر مطلق تمام سطوح انرژی که پایین تر از سطحی بنام سطح فرمی^۱ قرار دارند اشغال شده و تمامی سطوحی که بالای سطح فرمی قرار می گیرند خالی باقی می مانند. برحسب موقعیت سطح فرمی، سه حالت مطابق شکل (۲-۳) رخ میدهد. (مناطق هاشور خورده در این شکل معرف سطوح انرژی اشغال شده اند.)



شکل (۲-۳) ساختمان نوار انرژی در اجسام مختلف (الف) هادیها (ب) عایقها (ج) نیمه هادیها

در شکل (الف-۲-۳) سطح فرمی در ناحیه مجاز واقع شده و بنابراین در درجه حرارت صفر مطلق فقط بخشی از سطوح ناحیه مجاز توسط الکترونها اشغال میشود. در درجه حرارت های بالاتر تعدادی از الکترونها با دریافت انرژی لازم به سطوح بالاتر انتقال پیدا میکنند. انرژی الکترونها را ممکن است با اعمال میدان الکتریکی نیز افزایش داد و آنها را به سطوح بالاتر انتقال داد. به این ترتیب با خالی بودن تعداد زیادی سطوح انرژی در ناحیه مجاز جابجایی الکترونها به سادگی امکان پذیر بوده و جسم را در این حالت هادی نامند.

اگر سطح فرمی مطابق شکل های (۲-۳-ب و ج) در ناحیه ممنوعه قرار بگیرد، در درجه حرارت صفر مطلق تمام ناحیه مجاز پایینی پر و ناحیه مجاز بالایی کاملاً خالی میباشد. حال چنانچه عرض ناحیه ممنوعه به اندازه ای زیاد باشد که انرژی زیادی برای عبور دادن الکترون از آن مورد نیاز باشد، وضعیت در درجه حرارت صفر مطلق و در درجه حرارت معمولی ۲۵ درجه سانتی گراد متفاوت

1 - Fermi Level

نخواهد بود. بنابراین، به علت در دسترس نبودن سطوح خالی انرژی امکان تحرک برای الکترونها وجود ندارد. تنها وقتی که انرژی لازم جهت عبور از ناحیه ممنوعه به الکترونها داده شود آنها به ناحیه مجاز بالایی راه یافته و هدایت امکان پذیر میشود. ولی چنین انرژی بزرگی را عموماً فقط توسط میدانهای الکتریکی بسیار قوی میتوان تأمین کرد. در این حالت جسم را عایق نامند. عرض ناحیه ممنوعه در عایقها متجاوز از چندین الکترون ولت (6 eV برای الماس) میباشد.

بالاخره اگر عرض ناحیه ممنوعه چندان زیاد نباشد (حدود 1 eV)، در درجه حرارت معمولی تعدادی از الکترونها به ناحیه مجاز بالایی راه یافته و با اعمال یک میدان الکتریکی خارجی هدایت انجام میگیرد. جای خالی الکترونها در ناحیه مجاز پایینی را حفره مینامند. برای هر حفره باری مثبت به اندازه بار الکترون در نظر گرفته می شود. حفره نیز تحت تأثیر میدان الکتریکی جابجا میشود و در فرایند هدایت شرکت میکند. چنین اجسامی را نیمه هادی نامند. در نیمه هادیهای خالص تعداد حفرهها و الکترونهاي آزاد با یکدیگر برابرند.

بطور خلاصه، اجسام از نظر هدایت الکتریکی به سه دسته هادی، نیمه هادی و عایق تقسیم می شوند که مطالعه میدان الکتریکی در هر دسته بطور جداگانه و عمدتاً در هادیها و عایقها در قسمتهایی که بدنبال می آیند انجام می پذیرد.

۲-۳) جریان الکتریکی و قانون اهم^۱

وقتی که یک جسم هادی در میدان الکتریکی قرار میگیرد، الکترونهاي آزاد آن تحت تأثیر نیروی کولمب به حرکت درآمده و اگر هیچ مانعی سر راه الکترونها نمی بود سرعت آنها با گذشت زمان افزایش می یافت. ولی برخوردهای پی در پی الکترونها با اتمهای شبکه بلورین جسم هادی همواره بصورت یک نیروی بازدارنده عمل کرده و از افزایش نامحدود سرعت جلوگیری میکند. هر الکترون پس از یک برخورد مقداری از انرژی خود را از دست داده و در نتیجه از سرعت آن کاسته میشود. اگرچه سرعت الکترون در فاصله بین اتمها مرتباً در حال افزایش، کاهش و تغییر جهت است، ولی الکترون در مقیاس ماکروسکوپی با سرعت متوسطی متناسب با شدت میدان الکتریکی اعمال شده و در امتداد آن جابجا میشود. برای تعیین سرعت متوسط حرکت الکترون، معادله حرکت آنرا به اختصار مورد مطالعه قرار می دهیم.

حرکت الکترون تحت تأثیر دو نیرو، یکی نیروی کولمب $\vec{F}_1 = e\vec{E}$ و دیگری نیروی بازدارنده \vec{F}_2 که متناسب با اندازه حرکت الکترون و همچنین متناسب با عکس متوسط زمان بین دو برخورد

میباشد، انجام می‌پذیرد. اگر سرعت جابجایی الکترون را با \bar{v}_d ، متوسط زمان برخورد را با τ ، بار الکترون را با e و جرم آن را با m_e نشان دهیم، معادله حرکت یک الکترون از یک جسم هادی که در میدان الکتریکی \bar{E} قرار گرفته باشد بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$m_e \frac{d\bar{v}_d}{dt} = \bar{F}_1 - \bar{F}_r = e\bar{E} - \frac{m_e \bar{v}_d}{\tau} \quad (1-3)$$

جواب معادله (۱-۳) برای میدان الکتریکی ساکن $\bar{E} = \bar{E}_0$ که در لحظه $t = 0$ به یک الکترون در حال سکون اعمال شود عبارت است از:

$$\bar{v}_d = \frac{e\tau}{m_e} \bar{E}_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (2-3)$$

مقدار τ برای هادیهای معمولی مانند مس از مرتبه 10^{-14} ثانیه است. بنابراین جمله نمایی در رابطه (۲-۳) بسرعت با زمان کاهش می‌یابد و میتوان از آن صرفنظر کرد. یعنی سرعت جابجایی الکترون پس از اعمال میدان \bar{E}_0 عملاً برابر $\bar{v}_d = \frac{e\tau}{m_e} \bar{E}_0$ میباشد. برای میدانهای متغیر با زمان و سینوسی تا وقتی که دوره تناوب از چندین برابر τ کوچکتر نباشد، یعنی تا وقتی که شرط $\omega \ll 2\pi/\tau$ برقرار است (فرکانس زاویه‌ای موج سینوسی است)، سرعت متوسط جابجایی الکترونها متناسب با شدت میدان اعمال شده خواهد بود. از آنجایی که $\tau^{-1} = 10^{14}$ است، شرط مذکور برای فرکانسهایی تا حدود چند صد گیگا هرتز برقرار میباشد و بنابراین برای اکثر موارد عملی میتوان نوشت:

$$\bar{v}_d = \left(\frac{e\tau}{m_e}\right) \bar{E} = -\mu_e \bar{E} \quad (3-3)$$

μ_e را در رابطه (۳-۳) قابلیت تحرک^۱ الکترون نامند. بدیهی است که الکترونها در خلاف جهت میدان اعمال شده حرکت میکنند و چون μ_e مثبت فرض میشود علامت منفی در رابطه (۳-۳) ضروری است.

جابجایی الکترونها در هادیها تولید جریان الکتریکی می‌نماید. این جریان را از نوع هدایتی^۲ گویند، ولی جریان الکتریکی ممکن است از حرکت بارهای الکتریکی آزاد در خلاء نیز ناشی شود که در آنصورت جریان را از نوع همرفتی^۳ نامند. بطور کلی جریان الکتریکی از حرکت بارهای الکتریکی از قبیل الکترونها، یونهای مثبت و منفی و حفره‌ها بوجود می‌آید و اندازه آن برابر مقدار بار گذرنده از سطحی معین در واحد زمان تعریف میشود. واحد اندازه‌گیری جریان در سیستم آحاد M.K.S.

کولمب بر ثانیه یا آمپر است. با توجه به تعریف جریان الکتریکی میتوان نوشت:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (4-3)$$

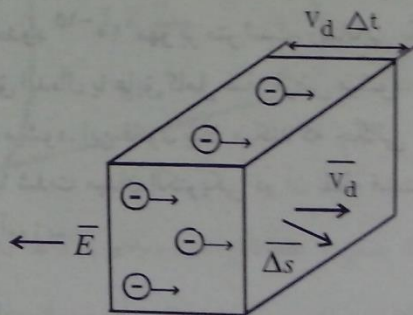
چگالی جریان الکتریکی برابر مقدار جریان در واحد سطح تعریف میشود. به بیان دقیقتر اگر جریان ΔI از عنصر سطح Δs عبور نماید و Δs عمود بر جهت بار در نظر گرفته شود، آنگاه چگالی جریان برابر است با:

$$J = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} \quad (5-3)$$

چگالی جریان در حقیقت یک کمیت برداری است که اندازه آن برابر حداکثر مقدار $\Delta I / \Delta s$ و جهت آن در هر نقطه همان جهت حرکت بار میباشد. در حالت کلی اگر Δs عمود بر جهت جریان نباشد، جریان گذرنده از Δs را باید از ضرب داخلی \bar{J} و $\bar{\Delta s}$ بدست آورد. لذا:

$$\Delta I = \bar{J} \cdot \bar{\Delta s} \quad (6-3)$$

توجه کنید که اگرچه معمولاً برای جریان الکتریکی جهت در نظر گرفته میشود ولی جریان یک کمیت برداری محسوب نمی شود. زیرا جریان نه یک کمیت نقطه ای بلکه یک کمیت انتگرالی است و برای کل جریان گذرنده از یک سطح مقطع نمیتوان جهت واحدی در تمام نقاط سطح مقطع داشت. برای محاسبه چگالی جریان الکتریکی در یک جسم هادی، عنصر حجم Δv ، که $\Delta v = \bar{\Delta s} \cdot (\bar{v}_d \Delta t)$ است، را مطابق شکل (۳-۳) در نظر می گیریم. $v_d \Delta t$ مسافتی است که بارهای الکتریکی واقع روی سطح Δs در لحظه t پس از گذشت زمان Δt با سرعت \bar{v}_d طی میکنند. اگر تعداد الکترونها ی آزاد در واحد حجم جسم هادی برابر N باشد، میزان بار الکتریکی که در فاصله زمانی Δt از سطح Δs



شکل (۳-۳) عنصر حجم Δv از یک جسم هادی و الکترونها ی آزاد در حال حرکت تحت نیروی میدان الکتریکی \bar{E}

میگذرد برابر است با :

$$\Delta Q = \rho \Delta v = (Ne)(\overline{\Delta s} \cdot \overline{v_d} \Delta t) \quad (7-3)$$

جریان حاصل از عبور بار ΔQ از سطح Δs عبارت است از :

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Ne \overline{\Delta s} \cdot \overline{v_d} = \overline{\Delta s} \cdot (Ne \overline{v_d}) \quad (8-3)$$

از طرف دیگر :

$$\Delta I = \overline{\Delta s} \cdot \overline{J} \quad (9-3)$$

از مقایسه روابط (۸-۳) و (۹-۳) نتیجه گرفته میشود که :

$$\overline{J} = Ne \overline{v_d} = \rho \overline{v_d} \quad (10-3)$$

در رابطه (۱۰-۳)، $\rho = Ne$ چگالی الکترونهاي آزاد در جسم هادی است. با جایگزین نمودن $\overline{v_d}$ از رابطه (۳-۳) داریم :

$$\overline{J} = -Ne \mu_e \overline{E} \quad (11-3)$$

با تعریف ضریب $\sigma = -Ne \mu_e$ ، رابطه ساده ولی مهم زیر را بین \overline{J} و \overline{E} بدست می آوریم :

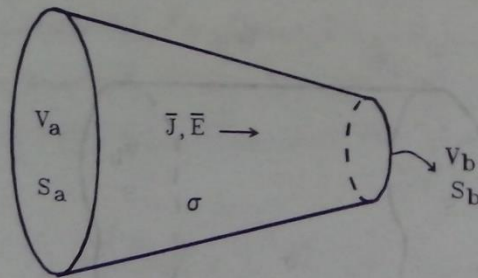
$$\overline{J} = \sigma \overline{E} \quad (12-3)$$

σ رسانایی^۱ یا قابلیت هدایت الکتریکی مینامند و با واحد «آمپر بر ولت بر متر» یا «مهو بر متر»^۲ اندازه گیری میشود. این ضریب برای اکثر فلزات در حدود 10^7 ، برای آب دریا برابر ۴ و برای یک عایق خوب مانند میکا در حدود 10^{-15} مهو بر متر است. رسانایی یک هادی ایده آل یا هادی کامل بینهایت و رسانایی یک عایق ایده آل یا عایق کامل صفر فرض میشود. رابطه (۱۲-۳) به عنوان شکل نقطه ای قانون اهم شناخته میشود. این قانون بیان میکند که چگالی جریان هدایتی در هر نقطه در یک جسم هادی متناسب با شدت میدان الکتریکی در آن نقطه است. شکل انتگرالی قانون اهم را ضمن تعریف مقاومت می آموزیم.

۳-۳) مقاومت الکتریکی

همانطور که ملاحظه گردید، میدان الکتریکی \vec{E} در یک جسم هادی ایجاد جریانی با چگالی $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ میکند. اجسام مختلف دارای رسانایی‌های متفاوتی هستند و به بیان دیگر مقاومت الکتریکی آنها در مقابل عبور بارهای الکتریکی متفاوت است. مقاومت اجسام نه تنها به رسانایی آنها بلکه به شکل و ابعاد هندسی آنها نیز بستگی دارد. در این قسمت به تشریح روش کلی محاسبه مقاومت می‌پردازیم. برای این منظور جسمی را با رسانایی σ و سطح مقطع متغیر، مطابق شکل (۳-۴)، در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی \vec{E} را از طریق اعمال ولتاژ V_{ab} بین دو سطح انتهایی S_a و S_b در جسم ایجاد می‌کنیم. میدان \vec{E} باعث بوجود آمدن جریانی با چگالی $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ در جسم میشود. چون فضای اطراف جسم عایق است (مثلاً هوا)، جریان بوجود آمده در داخل جسم محدود است. اندازه جریان گذرنده از جسم از رابطه $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ بدست می‌آید که در آن S هر سطح مقطع دلخواهی بین دو انتهای جسم است. با فرض اینکه سطوح S_a و S_b سطوح هم‌پتانسیل هستند، اختلاف پتانسیل بین دو سطح S_a و S_b را میتوان بر حسب شدت میدان الکتریکی \vec{E} بصورت $V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ نوشت. مقاومت الکتریکی بین دو سطح S_a و S_b برابر نسبت اختلاف پتانسیل بین آن دو سطح به جریان گذرنده از جسم تعریف میشود.

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \frac{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (۳-۱۳)$$



شکل (۳-۴) جسمی با سطح مقطع متغیر و رسانایی σ برای تعریف مقاومت

بنابراین با مشخص بودن شکل و ابعاد جسم و رسانایی آن میتوان مقاومت جسم را با استفاده از رابطه (۳-۱۳) به روشهای تحلیلی یا عددی محاسبه نمود. وجود \vec{E} در صورت و مخرج کسر سمت

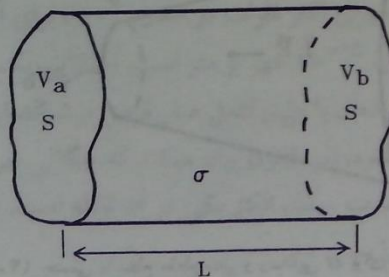
راست رابطه (۳-۱۳) حاکی از این حقیقت است که مقاومت یک جسم مستقل از جریان گذرنده از آن و ولتاژ اعمال شده به آن می باشد و فقط تابعی از رسانایی و ابعاد هندسی جسم است. رابطه $V_{ab} = RI$ در واقع شکل انتگرالی قانون اهم است. واحد اندازه گیری مقاومت، اهم می باشد.

بطور خلاصه، برای محاسبه مقاومت یک جسم محدود به دو سطح معین، ابتدا اختلاف پتانسیل ثابت V_{ab} را بین آن دو سطح در نظر می گیریم. سپس میدان الکتریکی \vec{E} حاصل از این اختلاف پتانسیل را بدست می آوریم. آنگاه انتگرال $I = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ، که در آن S سطح مقطع دلخواهی از جسم است، را محاسبه می کنیم. سرانجام نسبت V_{ab} به I ، مقاومت جسم را که بین دو سطح مذکور دیده می شود بدست می دهد. شاید مشکلترین مرحله در محاسبه مقاومت تعیین میدان الکتریکی \vec{E} باشد. استفاده از روش معادله لاپلاس که در فصل چهارم ارائه میشود به حل مسأله مقاومت کمک مؤثری می کند. از اینرو مبحث مقاومت الکتریکی در قسمت (۴-۴) کتاب مجدداً مورد بررسی قرار خواهد گرفت. ضمناً، در بحث کنونی، رفتارهای غیر خطی مقاومت و تأثیر درجه حرارت بر آن در نظر گرفته نمی شوند.

مثال (۳-۱) مقاومت یک میله هادی مستقیم به طول L ، سطح مقطع یکنواخت S و رسانایی σ را محاسبه کنید.

حل:

میله هادی را مطابق شکل (۳-۵) در نظر گرفته و اختلاف پتانسیل V_{ab} را بین دو سطح انتهایی آن به کمک یک مولد ولتاژ بوجود می آوریم. جریان ثابتی با چگالی یکنواخت در میله ایجاد میشود. چون چگالی جریان در تمام نقاط مقدار ثابتی است، شدت میدان نیز در همه نقاط هادی مقدار ثابتی دارد و میتوان نوشت:



شکل (۳-۵) میله هادی با سطح مقطع یکنواخت S و طول L

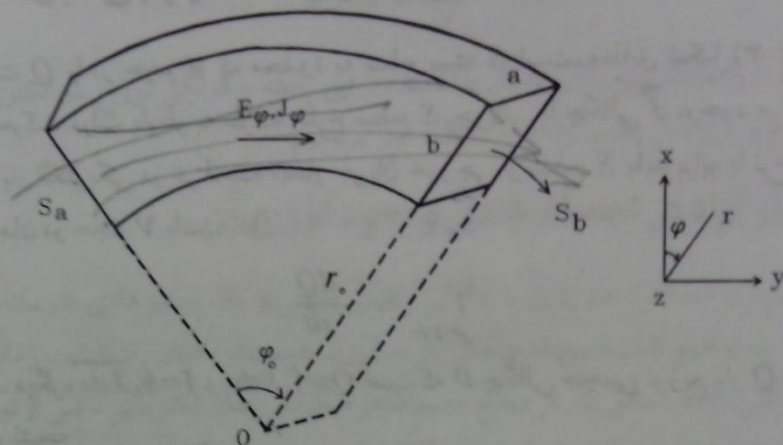
$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = EL, \quad I = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sigma ES$$

آنگاه:

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{L}{\sigma S} \quad (۱۴-۳)$$

□

مثال (۲-۳) مقاومت میله خمیده شکل (۶-۳) را محاسبه کنید.



شکل (۶-۳) میله خمیده به شعاع درونی r_0 ، شعاع بیرونی $r_0 + b$ ، ضخامت a و زاویه φ_0 .

حل:

واضح است که خطوط میدان الکتریکی بایستی به شکل قوسهایی به مرکز O باشند، زیرا خطوط میدان بر سطوح هم‌پتانسیل S_a و S_b عمود هستند. بنابراین میدان الکتریکی فقط مؤلفه E_φ خواهد داشت. چگالی جریان در سطح مقطع مستطیلی شکل میله یکنواخت نبوده، بلکه تابعی از r است. به منظور تعیین تغییرات چگالی جریان یا میدان الکتریکی نسبت به r اینطور استدلال میکنیم که اختلاف پتانسیل هر دو نقطه انتهایی روی قوسی به شعاع r باید مساوی V_{ab} ، یعنی اختلاف پتانسیل بین S_a و S_b باشد:

$$V_{ab} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{\varphi_0} E_\varphi r d\varphi = E_\varphi r \varphi_0$$

و:

$$E_\varphi = \frac{V_{ab}}{\varphi_0} \frac{1}{r} = \frac{K}{r}, \quad K = \frac{V_{ab}}{\varphi_0} = \text{مقدار ثابت}$$

حال با معلوم بودن تغییرات میدان نسبت به r ، مقاومت میله به شرح زیر محاسبه میشود:

$$V_{ab} = K\varphi_0$$

$$I = \int_s \sigma \bar{E} \cdot d\bar{s} = \sigma \int_{r_0}^{r_0+b} \int_0^a \frac{K}{r} dr dz = \sigma K a \ln \frac{r_0+b}{r_0}$$

در نتیجه:

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{\varphi_0}{\sigma a} \ln \frac{r_0+b}{r_0} \quad (۱۵-۳)$$

□

۳-۴) اصل بقای بار و معادله پیوستگی

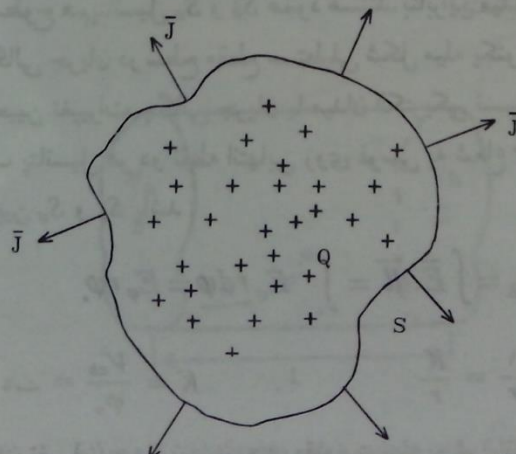
بار مثبت Q را در حجم V که محدود به سطح بسته S است، مطابق شکل (۷-۳)، در نظر می‌گیریم. حرکت ذرات باردار به طرف خارج سطح S جریانی با چگالی \bar{J} بوجود می‌آورد. طبق اصل بقای بار الکتریکی در هر لحظه مقدار جریان خروجی از سطح S باید برابر با نرخ کاهش بار نسبت به زمان در حجم V باشد، لذا:

$$I_{\text{خروجی}} = -\frac{dQ}{dt}$$

اما از طرف دیگر، $I = \oint_s \bar{J} \cdot d\bar{s}$ و $Q = \int_v \rho dv$ است که چگالی حجمی توزیع بار Q در حجم V میباشد. در نتیجه:

$$\oint_s \bar{J} \cdot d\bar{s} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv \quad (۱۶-۳)$$

انتگرال سمت چپ رابطه (۱۶-۳) را میتوان با استفاده از قضیه دیورژانس به انتگرال حجم تبدیل کرد:



شکل (۷-۳) بار مثبت Q و جریان ناشی از آن با چگالی \bar{J}

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (17-3)$$

برای حجم کوچک Δv رابطه (17-3) بصورت زیر نوشته میشود:

$$(\nabla \cdot \bar{J}) \Delta v = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta v$$

یا:

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18-3)$$

رابطه (18-3) را معادله پیوستگی نامند. با استفاده از این رابطه چگونگی توزیع بار الکتریکی آزاد در داخل اجسام و بویژه در هادیها را مورد مطالعه قرار میدهیم.

۵-۳) بار آزاد در اجسام هادی و نحوه توزیع آن

فرض کنید در لحظه $t=0$ باری با چگالی ρ در بخشی از یک جسم هادی با رسانایی ثابت σ ظاهر شود. میخواهیم نشان دهیم که چگالی بار در درون جسم بطور نمایی با گذشت زمان به سمت صفر کاهش می یابد و تمامی بار در سطح جسم ظاهر میگردد. میدان الکتریکی ناشی از توزیع اولیه، ذرات باردار را به حرکت درآورده و آنها را از مکان اولیه به سمت سطح جسم دور می نماید. حرکت ذرات باردار تولید جریان الکتریکی می نماید و نیز چگالی توزیع اولیه بارها را پسر هم می زند، بطوری که میدان الکتریکی \bar{E} ، چگالی بار ρ و چگالی جریان \bar{J} هر سه با زمان تغییر میکنند تا اینکه سرانجام هر یک مقدار نهایی پایدار خود را بدست آورند. در هر لحظه، میدان \bar{E} و چگالی بار ρ از طریق شکل نقطه ای قانون گوس به یکدیگر مربوط میشوند:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (19-3)$$

قابلیت گذردهی جسم هادی برابر σ فرض شده است. همچنین در هر لحظه باید معادله پیوستگی برقرار باشد:

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (20-3)$$

بالاخره بین \bar{J} و \bar{E} همواره رابطه $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ برقرار است. بنابراین با ترکیب روابط (19-3) و (20-3) میتوان نوشت:

$$\nabla \cdot \bar{J} = \nabla \cdot (\sigma \bar{E}) = \sigma \nabla \cdot \bar{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

یا:

$$\nabla \cdot \bar{E} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (21-3)$$

و:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad (22-3)$$

رابطه (۲۲-۳) یک معادله دیفرانسیل درجه یک است که جواب آن با در نظر گرفتن شرط اولیه $\rho(t=0) = \rho_0$ عبارت است از:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/T}, \quad T = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \quad (23-3)$$

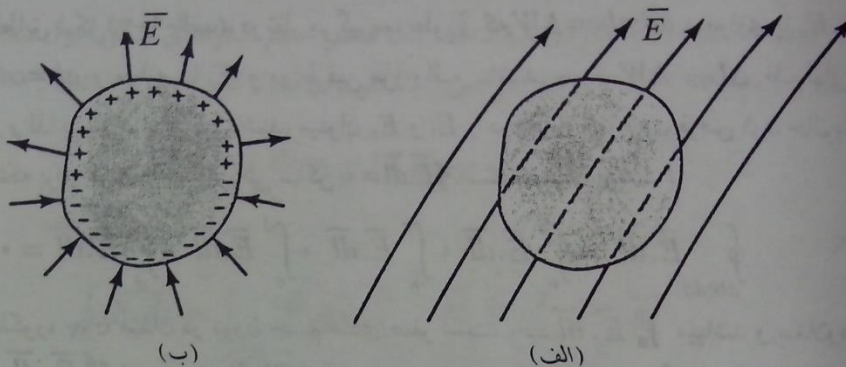
ملاحظه میشود که چگالی بار بطور نمایی با ثابت زمانی $T = \epsilon_0 / \sigma$ کاهش می یابد و سرانجام به صفر میرسد. بعلاوه، اگر چگالی اولیه ρ_0 در نقطه ای از جسم صفر باشد، مقدار آن همیشه صفر باقی خواهد ماند. به عبارت دیگر، هیچ بخشی از بار که در ناحیه ای در درون جسم کاهش می یابد نمیتواند در ناحیه دیگری در داخل آن ظاهر گردد. از طرف دیگر، طبق اصل بقای بار، بار در حال کاهش در درون جسم بایستی در جای دیگری از جسم ظاهر گردد و این جای دیگر جز سطح جسم نمی تواند باشد. برای اینکه ببینیم با چه سرعتی چگالی بار آزاد در درون یک جسم هادی کاهش می یابد و همزمان بصورت بار سطحی ظاهر میشود، مثال فلز مس را که یک هادی خوب محسوب میشود در نظر می گیریم. برای مس σ برابر $5/8 \times 10^7$ مهو بر متر است، لذا:

$$T = \frac{\epsilon_0}{\sigma} = \frac{10^{-9}}{36\pi \times 5/8 \times 10^7} = 1/5 \times 10^{-19} \text{ ثانیه}$$

یعنی پس از گذشت $1/5 \times 10^{-19}$ ثانیه چگالی بار به میزان e^{-1} یا ۳۷ درصد مقدار اولیه اش کاهش می یابد. واضح است که این زمان فوق العاده کوتاه است، بطوری که میتوان گفت هر بار آزادی که در درون یک جسم هادی بوجود آید تقریباً بلافاصله از مکان اولیه اش ناپدید شده و در سطح جسم ظاهر می شود. پس بطور خلاصه چنین نتیجه گرفته میشود که چگالی حجمی بار آزاد در درون اجسام هادی صفر است. برای اجسام عایق که σ بسیار کوچک است، T ممکن است تا حدود چندین ساعت و حتی چندین روز باشد.

۳-۶) میدان الکتریکی در حضور اجسام هادی و شرایط مرزی

قبلاً دیدیم که الکترونهاى آزاد در یک جسم هادی تحت تأثیر یک میدان الکتریکی با سرعت متوسطی جابجا میشوند و چنانچه جسم هادی در یک مدار بسته قرار گرفته باشد حرکت الکترونها ادامه یافته و یک جریان الکتریکی بطور پیوسته بوجود می‌آید. جزئیات این مبحث را در قسمت (۲-۳) بررسی نمودیم. اکنون میخواهیم به مطالعه این مسأله بپردازیم که اگر یک جسم هادی با شکلی نامشخص و رسانایی σ ، مطابق شکل (۳-۸-الف)، در معرض میدان الکتریکی ساکن \vec{E} قرار بگیرد چه تغییراتی در جسم هادی و میدان پدید می‌آید.



شکل (۳-۸) نمایش تأثیر جسم هادی و میدان الکتریکی بر یکدیگر (الف) جسم هادی در معرض میدان الکتریکی \vec{E} (ب) بارهای سطحی مثبت و منفی القاى روی سطح جسم هادی

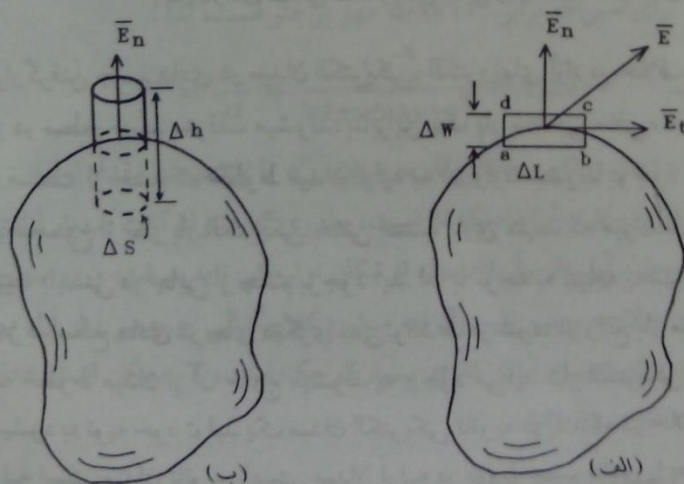
پس از قرار گرفتن جسم هادی در میدان الکتریکی، الکترونهاى آزاد در خلاف جهت میدان به حرکت درآمده و در سطح جسم متوقف میشوند. بنابراین یک بار سطحی منفی، مطابق شکل (۳-۸-ب)، روی آن قسمت از جسم که خطوط میدان اولیه به آن وارد میشوند بوجود می‌آید. حال از آنجا که جسم در مجموع از نظر بار الکتریکی خنثی است، باری مثبت که میزان آن دقیقاً برابر بار سطحی منفی است بایستی در جایی از جسم بوجود آید. اما با توجه به نتیجه بحث قسمت (۳-۵)، این بار مثبت جز در سطح هادی در جای دیگری نمی‌تواند ظاهر شود. در واقع بار مثبت در بخشی از سطح جسم که خطوط میدان از آن خارج میشوند به وجود می‌آید. بار الکتریکی سطحی که بدین گونه ایجاد میشود به نوبه خود تولید یک میدان الکتریکی ثانویه می‌کند که در خلاف جهت میدان اعمال شده اولیه است. میدان ثانویه بایستی میدان اولیه در درون جسم هادی را بطور کامل خنثی سازد، بطوری که میدان درون هادی صفر گردد. چه در غیر اینصورت حرکت الکترونها به سمت سطح ادامه می‌یابد تا چنان توزیعی حاصل شود که میدان داخل هادی سرانجام صفر گردد. زمان لازم برای تغییر

و تنظیم بارها به ثابت زمانی T جسم هادی بستگی دارد. بنابراین با توجه به اینکه T از مرتبه 10^{-19} ثانیه است، میتوان نتیجه گرفت که تشکیل بار سطحی و کاهش یافتن میدان درون جسم هادی به صفر تقریباً آنی صورت می‌پذیرد. توزیع بار سطحی عموماً میدانی در خارج جسم هادی نیز بوجود می‌آورد که منجر به تغییر یافتن میدان اعمال شده اولیه می‌گردد.

تاکنون به این نتیجه رسیده‌ایم که میدان الکتریکی در درون یک جسم هادی که محدود به سطح بسته‌ای باشد صفر است. حال به بررسی میدان در سطح جسم، یعنی در مرز جسم و فضای اطراف آن، می‌پردازیم. برای این منظور فرض می‌کنیم که میدان الکتریکی \vec{E} در سمت فضای آزاد مرز دارای مؤلفه مماسی E_t و مؤلفه عمودی E_n باشد. مسیر بسته مستطیلی شکل $abcd$ را حول مبدأ بردار \vec{E} ، مطابق شکل (۳-۹-الف)، در نظر می‌گیریم، بطوری که $ad=bc=\Delta W$ و موازی با E_n و نیز $ab=cd=\Delta L$ و موازی با E_t و در طرفین مرز واقع باشند. چون ΔW و ΔL طولهای دیفرانسیلی و لذا بسیار کوچک می‌باشند، میتوان E_t و E_n را در امتداد آنها ثابت فرض کرد. حال با توجه به اینکه برای هر میدان الکتریکی ساکن $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ است، میتوان نوشت:

$$\oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

در رابطه مذکور، چون میدان در درون جسم هادی صفر است، $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ میباشد و بعلاوه $\int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_t \Delta L$ است. حال اگر ΔW به سمت صفر میل داده شود، دو انتگرال دیگر نیز صفر میشوند و داریم:



شکل (۳-۹) شرایط مرزی در سطح اجسام هادی (الف) مؤلفه مماسی میدان الکتریکی (ب) مؤلفه عمودی میدان الکتریکی

$$E_t \Delta L = 0$$

یا:

$$E_t = 0 \quad (24-3)$$

رابطه (۲۴-۳) بیان میکند که مؤلفه مماسی میدان الکتريکی ساکن در سطح جسم هادی برابر صفر است. به عبارت دیگر میدان الکتريکی در مرز جسم هادی فقط ممکن است مؤلفه عمودی داشته باشد. این نتیجه گرچه برای حالت میدان ساکن بدست آمده است، ولی بطوری که بعداً خواهیم دید برای میدانهای متغیر با زمان نیز صادق خواهد بود.

برای مطالعه مؤلفه عمودی میدان \vec{E} ، یک عنصر حجم استوانه‌ای شکل حول مبدأ بردار \vec{E} ، مطابق شکل (۳-۹-ب)، در نظر می‌گیریم. با بکار بردن قانون گوس میتوان نوشت:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (S \text{ بار محصور در } S)$$

اما:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{قاعده فوقانی}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{قاعده تحتانی}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{سطح جانبی}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

انتگرال دوم در سمت راست این رابطه صفر است، زیرا میدان الکتريکی در درون جسم هادی همواره صفر است. حال اگر ارتفاع استوانه (Δh) را به سمت صفر میل دهیم انتگرال سوم نیز به سمت صفر میل خواهد کرد، در حالیکه انتگرال اول تغییری نمیکند و مقدار آن عبارت است از:

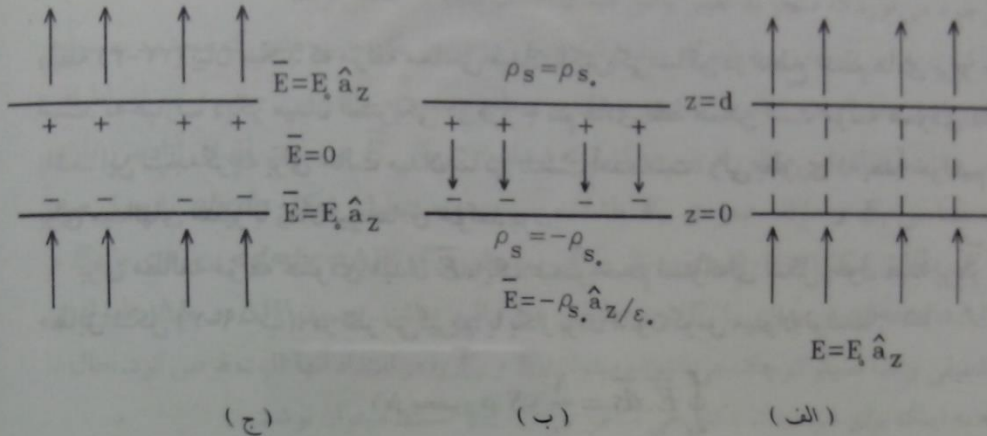
$$E_n \Delta s = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_s \Delta s$$

یا:

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (25-3)$$

روابط (۲۴-۳) و (۲۵-۳) به عنوان شرایط مرزی برای یک جسم هادی شناخته میشوند. از آنجا که \vec{E} در کلیه نقاط درون جسم هادی و E_t در سطح آن صفر است، برای جابجا نمودن بار Q از نقطه‌ای به نقطه دیگر در درون و روی سطح جسم کاری نباید انجام گیرد. به عبارت دیگر کلیه نقاط واقع در درون و روی سطح یک جسم هادی هم پتانسیل هستند. این نتیجه را میتوان از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ نیز بدست آورد، زیرا لازمه صفر بودن \vec{E} آن است که V مقدار ثابتی باشد.

مثال (۳-۳) ناحیه $0 < z < d$ از فضا را یک ماده هادی، مطابق شکل (۳-۱۰-الف)، اشغال میکند. میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = E_0 \hat{a}_z$ به جسم هادی اعمال میگردد. چگالی بار القا شده روی سطوح جسم هادی در $z=d$ و $z=0$ و نیز میدان الکتریکی در کلیه نقاط فضا را محاسبه نمایید.



شکل (۳-۱۰) یک جسم هادی در معرض میدان الکتریکی (الف) جسم هادی سطح به ضخامت d در معرض میدان یکنواخت (ب) بارهای القایی روی سطوح جسم هادی و میدان ثانویه حاصل از آنها (ج) میدان کل در همه نقاط فضا

حل:

چون میدان الکتریکی یکنواخت و در جهت z میباشد، بار منفی با چگالی یکنواخت روی سطح $z=0$ ، که ناشی از تجمع الکترونهاى آزاد روی آن سطح است، بوجود می آید. همچنین، بارى مثبت با چگالی یکنواخت روی سطح $z=d$ ، که ناشی از کمبود الکترون در آن سطح است، ظاهر میگردد. یادآوری میشود که اینگونه بارهای سطحی را که در اثر اعمال یک میدان الکتریکی خارجی پدید می آید **بارهای القایی** می نامند. چون میدان الکتریکی کل در ناحیه $0 < z < d$ ، که درون جسم هادی است، باید صفر باشد میدان ثانویه حاصل از توزیع بارهای القایی بایستی مساوی و در خلاف جهت میدان اولیه \vec{E} باشد. در فصل قبل میدان یک صفحه بینهایت بار با چگالی سطحی ρ_s را محاسبه نموده ایم. این میدان برابر $\rho_s / 2\epsilon_0$ و در جهت \hat{a}_z در بالای صفحه ($z > 0$) و در جهت $-\hat{a}_z$ در پایین صفحه ($z < 0$) است (صفحه بار را $z=0$ فرض میکنیم). به سادگی میتوان نشان داد که میدان دو صفحه بینهایت بار، که موازی با یکدیگر و دارای توزیعهای یکنواخت بار با چگالیهای مساوی و مختلفالعلامه، مطابق شکل (۳-۱۰-ب)، باشند، برابر $(\rho_s / \epsilon_0) \hat{a}_z$ در ناحیه بین دو صفحه و برابر صفر در سایر نواحی میباشد. بنابراین، برای آنکه میدان در ناحیه هادی صفر باشد باید داشته باشیم:

$$-\frac{\rho_{s_2}}{\epsilon_0} \hat{a}_z = -E_0 \hat{a}_z$$

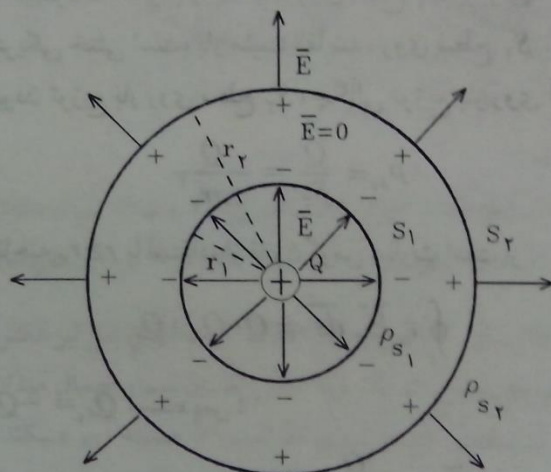
یا:

$$\rho_{s_2} = \epsilon_0 E_0 \quad (26-3)$$

میدان در خارج ناحیه $0 < z < d$ برابر میدان اعمال شده، یعنی $E_0 \hat{a}_z$ ، است. زیرا میدان ثانویه حاصل از بارهای القایی در آنجا صفر است. بارهای القایی و میدان در داخل و خارج جسم هادی در شکل (۳-۱۰-ج) نشان داده شده‌اند. بطوری که رابطه (۳-۲۶) نیز نشان میدهد، شرط مرزی $E_n = \rho_s / \epsilon_0$ روی هر دو سطح $z=0$ و $z=d$ برقرار است.

□

مثال (۳-۴) در مرکز یک محفظه کروی از جنس هادی و به ضخامت d بار نقطه‌ای مثبت Q ، مطابق شکل (۳-۱۱)، قرار می‌گیرد. چگالی بارهای القایی روی سطوح داخلی و خارجی محفظه کروی و میدان الکتریکی را در تمام نواحی بدست آورید.



شکل (۳-۱۱) بار مثبت Q در مرکز یک محفظه کروی به ضخامت $d=r_2-r_1$

حل:

میدان الکتریکی اولیه در ناحیه $r \leq r_1$ با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس برابر است با:

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad r \leq r_1 \quad (27-3)$$

این میدان با به حرکت درآوردن الکترونهاى آزاد محفظه کروی به سوى مرکز، باری منفی روی سطح

داخلی S_1 و باری مثبت روی سطح خارجی S_2 القا میکند. بدلیل وجود تقارن کروی، توزیع بارهای القایی روی سطوح مزبور بطور یکنواخت صورت می‌پذیرد. چون میدان کل در ناحیه $r_1 < r < r_2$ باید صفر باشد، طبق قانون گوس میزان کل بار محصور در سطح گوسی کروی S_1^+ به شعاع r_1^+ نیز بایستی صفر باشد ($r_1 < r_1^+ < r_2$). به بیان دیگر:

$$\oint_{S_1^+} \epsilon_0 \bar{E} \cdot d\bar{s} = Q + \oint_{S_1} \rho_{s_1} ds = 0$$

که ρ_{s_1} چگالی بار منفی القا شده روی سطح S_1 است. چون توزیع بارهای القایی یکنواخت است، ρ_{s_1} مقدار ثابتی دارد و میتوان نوشت:

$$Q + \rho_{s_1} \oint_{S_1} ds = 0$$

$$\rho_{s_1} = -\frac{Q}{S_1} = -\frac{Q}{4\pi r_1^2} \quad (28-3)$$

بدین ترتیب ملاحظه میشود که اندازه بار القا شده روی سطح S_1 برابر $-Q$ است و چون محفظه کروی از نظر بار الکتریکی خنثی است، بار مثبت القا شده روی سطح S_2 باید برابر $+Q$ باشد. با توجه به یکنواخت بودن توزیع بار روی سطح S_2 ، چگالی توزیع بار روی آن برابر است با:

$$\rho_{s_2} = \frac{Q}{S_2} = \frac{Q}{4\pi r_2^2} \quad (29-3)$$

میدان الکتریکی در ناحیه $r \geq r_2$ با استفاده از قانون گوس عبارت است از:

$$\oint_S \epsilon_0 \bar{E} \cdot d\bar{s} = Q - Q_{s_1} + Q_{s_2}$$

اما چون $Q_{s_1} = -Q_{s_2} = -Q$ است، پس:

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad r \geq r_2 \quad (30-3)$$

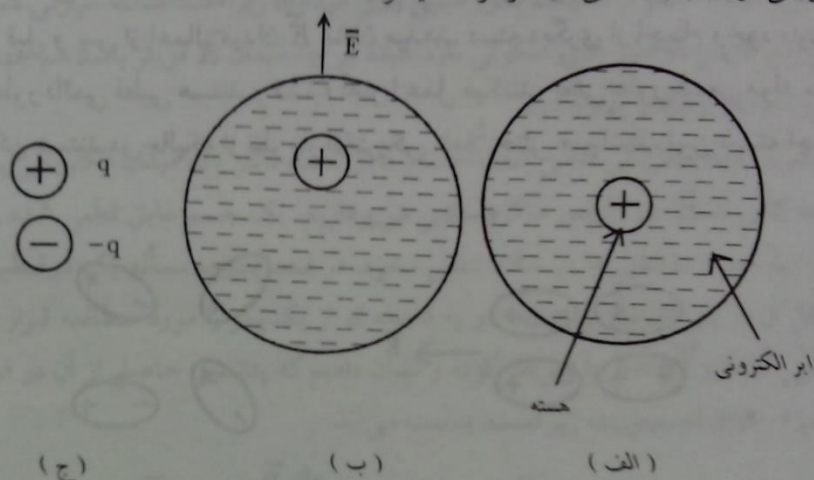
□

۷-۳ اجسام عایق در میدان الکتریکی ساکن

همانگونه که در مقدمه این فصل بیان گردید، عایقها دسته‌ای از اجسام هستند که تعداد الکترونهاى آزاد آنها بسیار ناچیز است و عملاً قابلیت هدایت الکتریکی ندارند. ثابت زمانی بسیار طولانی T در اجسام عایق (که شرح آن در قسمت (۵-۳) آمد) نیز مؤید این حقیقت است که

هدایت الکتريکی در عایقها فوق العاده ناچیز است. در اینجا نیز پدیده ناشی از تأثیر میدان الکتريکی بر عایقها را که «قطبی شدن» نامیده میشود بطور کیفی در مقیاس میکروسکوپی (در مقیاس اتم و ملکول) بررسی نموده، ولی نتایج و روابط کاربردی را در مقیاس ماکروسکوپی مورد مطالعه قرار میدهیم.

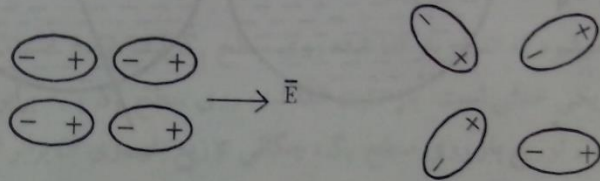
بررسی پدیده قطبی شدن را میتوان از مدل ابتدایی اتم شروع کرد. در این مدل که در شکل (۳-۱۲-الف) نمایش داده شده است، یک اتم بصورت هسته‌ای با بار مثبت در مرکز یک ابر الکترونی کروی با بار منفی در نظر گرفته میشود.



شکل (۳-۱۲) تأثیر میدان بر جسم عایق در مقیاس میکروسکوپی (الف) مدل ابتدایی اتم متشکل از هسته و ابر الکترونی (ب) جابجایی مرکز ثقل ابر الکترونی پس از اعمال میدان الکتريکی \vec{E} (ج) دوقطبی معادل اتم شکل (ب)

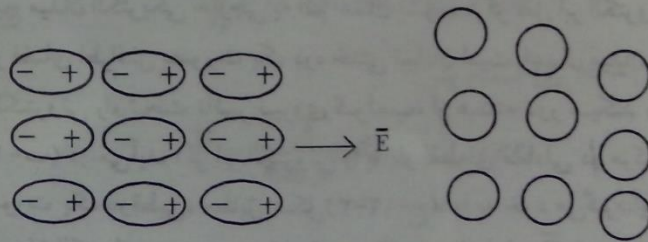
تا زمانیکه هیچ میدان الکتريکی خارجی به اتم اعمال نشود، مرکز ثقل ابر الکترونی بر هسته منطبق بوده و اتم در فضای اطرافش بصورت یک ذره خنثی نمایان است. اعمال میدان الکتريکی \vec{E} مرکز ثقل ابر الکترونی را، تحت تأثیر نیروی کولمب، از هسته دور میکند و اتم به صورت شکل (۳-۱۲-ب) در می‌آید. اگر ابر الکترونی را با بار نقطه‌ای معادلی در مرکز ثقل آن جایگزین کنیم، اتم بصورت یک دوقطبی، مطابق شکل (۳-۱۲-ج)، را به خود می‌گیرد. این دوقطبی به نوبه خود تولید میدان الکتريکی جدیدی می‌کند که مخالف میدان اولیه \vec{E} است. این پدیده را قطبی شدن نامیده و این نوع قطبی شدن را که ناشی از جابجایی مرکز ثقل ابر الکترونی نسبت به هسته اتم است، **قطبی شدن الکترونیکی** گویند. دسته‌ای از اجسام عایق از ملکولهای مرکب از یونهاى مثبت و منفی تشکیل یافته‌اند و اعمال یک میدان الکتريکی خارجی یونها را از یکدیگر دور نموده و هر ملکول به یک دوقطبی تبدیل میشود. این نوع قطبی شدن را **قطبی شدن یونی** گویند. در اجسام

عایقی که ساختار ملکولی دارند، ملکولها ممکن است غیرقطبی یا بطور طبیعی و در غیاب یک میدان الکتریکی خارجی قطبی باشند. در جسمی مانند نمک طعام ملکولها بطور دائمی قطبی هستند ولی چون آرایش آنها بدور از نظم و ترتیب است، جسم در مجموع قطبی شده نیست. اعمال یک میدان الکتریکی خارجی ملکولهای قطبی را بطور نسبی در امتداد میدان قرار داده و جسم را قطبی میکند. در واقع، میدان الکتریکی هر ملکول را تحت یک گشتاور قرار داده و آن را می چرخاند تا در امتداد خود قرار دهد. در عایقهایی که ملکولها غیرقطبی هستند، میدان خارجی با جابجایی یونهای مثبت و منفی نسبت به یکدیگر موجب قطبی شدن میگردد. شکل (۳-۱۳) ملکولهای قطبی و غیرقطبی را قبل و پس از اعمال میدان \vec{E} نشان میدهد. دسته دیگری از اجسام وجود دارند که خودبخود و بطور دائمی قطبی هستند و مشابه آهنربا عمل میکنند، یعنی بطور طبیعی مولد میدان الکتریکی ساکن هستند در حالیکه از نظر بار الکتریکی کاملاً خنثی میباشند. این دسته اجسام



(ب)

(الف)



(د)

(ج)

شکل (۳-۱۳) قطبی شدن اجسام عایق تحت تأثیر میدان الکتریکی (الف) ملکولهای قطبی فاقد آرایش منظم (ب) هم جهتی میدان \vec{E} با ملکولهای قطبی شده (ج) ملکولهای غیر قطبی (د) قطبی شدن ملکولهای غیر قطبی توسط میدان الکتریکی \vec{E}

فروالکتریک^۱ نامیده میشوند. باریم نیات^۲ نمونه‌ای از یک جسم فرو الکتریک میباشد. بدین ترتیب ملاحظه میشود که یک جسم عایق اهم از اینکه ساختاری اتمی یا ملکولی داشته باشد و اعم از اینکه ملکولهای قطبی یا غیرقطبی باشند، تحت تأثیر یک میدان الکتریکی خارجی قطبی میشود. البته، مکانیزم قطبی شدن در همه اجسام یکسان نیست ولی همواره نتیجه این است که هر اتم یا ملکول بصورت یک دوقطبی در می‌آید، همانگونه که در شکل‌های (۳-۱۳-ج) و (۳-۱۳-ب) و (د) نشان داده شده‌اند. لازم به یادآوری است که هم جهتی ملکولهای قطبی با میدان \vec{E} در شکل (۳-۱۳-ب) در حقیقت بطور نسبی روی میدهند، زیرا اغتشاشات حرارتی همواره سعی در برهم زدن آرایش دوقطبی‌های ملکولی دارد. البته هر چه میدان \vec{E} قویتر باشد هم جهتی ملکولهای قطبی با میدان بیشتر و بهتر است.

اکنون که به چگونگی قطبی شدن اجسام عایق تحت تأثیر یک میدان الکتریکی پی بردیم، به مطالعه کمی مسأله در مقیاس ماکروسکوپی می‌پردازیم. یک جسم عایق قطبی شده را میتوان به منزله اتباره‌ای از دوقطبی‌ها در خلاء تلقی نمود. در فصل دوم، مسأله یک دوقطبی الکتریکی متشکل از دو بار نقطه‌ای q و $-q$ و به فاصله d از یکدیگر را مورد مطالعه قرار دادیم. برای دوقطبی گشتاور $\vec{p} = qd$ را تعریف کرده و نشان دادیم که پتانسیل حاصل از آن در فواصل دور از رابطه (۲-۹۹)، که بصورت زیر است، بدست می‌آید.

$$V(\vec{R}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|^2} \quad |\vec{R}| \gg d \quad (۳-۳۱)$$

برای بیان میزان قطبی شدن اجسام مختلف مبادرت به تعریف برداری موسوم به بردار قطبی‌شدگی یا بردار پلاریزاسیون، که با حرف \vec{P} نمایش داده میشود، میکنیم. این بردار برابر میزان گشتاور دوقطبی الکتریکی در واحد حجم یا چگالی گشتاور دوقطبی الکتریکی تعریف میشود. اگر تعداد اتمها (یا ملکولها) در واحد حجم برابر N و گشتاور اتم (یا ملکول) نام در عنصر حجم Δv برابر \vec{p}_i باشد، آنگاه بردار \vec{P} عبارت است از:

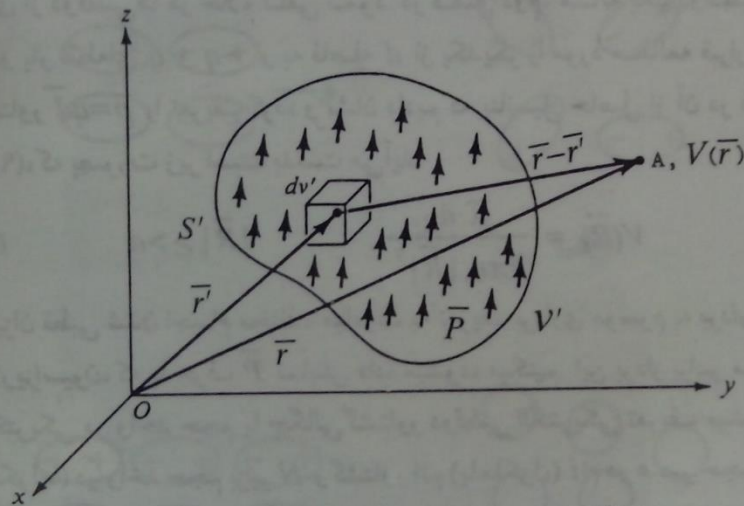
$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N\Delta v} \vec{p}_i / \Delta v = N\vec{p} \quad (۳-۳۲)$$

که \vec{p} گشتاور متوسط به ازای یک اتم (یا ملکول) و Δv عنصر حجم حول نقطه‌ای است که بردار \vec{P} در آن مورد نظر است. توجه کنید که چون Δv یک عنصر حجم ماکروسکوپی است، تعداد کثیری اتم (یا ملکول) قطبی شده را در بر می‌گیرد. بردار \vec{P} منشأ میدان الکتریکی ثانویه‌ای در درون و اطراف

جسم میشود که در خلاف جهت میدان اعمال شده است. میدان کل در هر نقطه از فضا از حاصل جمع میدانهای اولیه و ثانویه بدست می آید.

برای مطالعه میدان ثانویه، جسمی را با حجم V' و محدود به سطح بسته S' ، مطابق شکل (۳-۱۴)، در نظر گرفته و فرض می کنیم که چگالی گشتاور دوقطبی الکتریکی در آن با تابع معلوم $\bar{P}(\bar{r}')$ مشخص شده باشد. گشتاور الکتریکی \bar{P} ممکن است در اثر قرار گرفتن جسم در یک میدان الکتریکی خارجی و یا به دلیل فروالکتریک بودن خود جسم باشد. عنصر حجم dv' را در نقطه دلخواهی در درون جسم در نظر میگیریم. این عنصر حجم را میتوان به منزله یک دوقطبی ماکروسکوپی با گشتاور $\bar{P}dv'$ دانست که \bar{P} بردار پلاریزاسیون در محل عنصر حجم است. پتانسیل ناشی از این عنصر در نقطه A ، خارج از جسم عایق، با استفاده از رابطه (۳-۳۱)، عبارت است از:

$$dV = \frac{\bar{P}dv' \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R}|^2}, \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \quad (3-33)$$



شکل (۳-۱۴) میدان ثانویه ناشی از یک عایق قطبی شده

اما اگر در عبارت $\bar{R}, \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$ ثابت \bar{r}' و متغیر فرض شود جمله \hat{a}_R/R^2 مساوی گرادیان $1/R$ خواهد بود، یعنی $\hat{a}_R/R^2 = \nabla'(1/R)$ که علامت پریم به معنای مشتق گرفتن نسبت به مختصات پریم دار (\bar{r}') است. به این ترتیب رابطه (۳-۳۳) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P} \cdot \nabla'(1/R) dv' \quad (3-34)$$

با بکار بردن اتحاد برداری:

$$\nabla \cdot (f\bar{A}) = f \nabla \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \nabla f \quad (۳۵-۳)$$

که در آن \bar{A} و f بترتیب توابع برداری و اسکالر میباشند، میتوان نشان داد که:

$$\bar{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\bar{P}}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \bar{P} \quad (۳۶-۳)$$

سپس با استفاده از رابطه (۳۶-۳) در رابطه (۳۴-۳) میتوان نوشت:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\bar{P}}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \bar{P} \right] dv' \quad (۳۷-۳)$$

سرانجام، پتانسیل حاصل از تمامی جسم قطبی شده در نقطه \bar{A} با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۳۷-۳) در حجم V' بدست می آید.

$$V = \int_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla' \cdot \left(\frac{\bar{P}}{R} \right) dv' + \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \bar{P}}{4\pi\epsilon_0 R} dv' \quad (۳۸-۳)$$

اکنون، با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال اول در سمت راست رابطه (۳۸-۳) را به یک انتگرال سطح تبدیل میکنیم:

$$V = \oint_{S'} \frac{\bar{P} \cdot d\bar{s}'}{4\pi\epsilon_0 R} + \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \bar{P}}{4\pi\epsilon_0 R} dv' \quad (۳۹-۳)$$

قبلاً دیده ایم که پتانسیل ناشی از یک توزیع سطحی بار الکتریکی با چگالی ρ_s از رابطه (۹۲-۲) و پتانسیل ناشی از یک توزیع حجمی بار الکتریکی با چگالی ρ_v از رابطه (۹۳-۲) بدست می آید. مقایسه انتگرالهای سمت راست رابطه (۳۹-۳) با انتگرالهای روابط (۹۲-۲) و (۹۳-۲) به روشنی نشان میدهد که پتانسیل حاصل از بردار پلاریزاسیون \bar{P} را میتوان به دو چگالی بار، یکی توزیع سطحی با چگالی $\rho_{ps} = \bar{P} \cdot \hat{a}_n$ ، که بردار واحد عمود بر سطح S' و به طرف خارج آن است و دیگری یک توزیع حجمی بار با چگالی $\rho_p = -\nabla' \cdot \bar{P}$ ، منسوب نمود. این دو توزیع بار در حقیقت عملاً در جسم عایق بوجود می آیند، زیرا میدان قطبی کننده \bar{P} که در حالت کلی غیر یکنواخت است دو قطبی هایی با گشتاورهای متفاوت در نقاط مختلف جسم پدید می آورد، بطوری که در هر نقطه به علت جابجایی بارهای ملکولها یا اتمها مقدار خالص غیر صفر بار الکتریکی ظاهر میشود. این بارها گرچه آزاد نیستند (مقیدند) ولی همانند بارهای آزاد تولید میدان الکتریکی میکنند. به عبارت دیگر، در هر عنصر کوچک حجم، تعداد کثیری دو قطبی های اتمی (یا ملکولی) با گشتاورهای متفاوت وجود دارند که حاصل جمع بارهای آنها در حالت کلی صفر نخواهد بود. البته اگر میدان قطبی کننده

میدان قطبی کننده در هر نقطه در درون جسم مجموع میدان خارجی و میدان ثانویه یعنی همان میدان کل است.

کل یکنواخت باشد، گشتاورهای همه دوقطبی‌ها برابر بوده و چون مقدار خالص بار هر دوقطبی صفر است، مقدار کل بار مجموعه دوقطبی‌های یکسان موجود در هر عنصر حجم نیز صفر خواهد بود، یعنی چگالی حجمی بار پلاریزاسیون صفر است. رابطه $\rho_p = -\nabla' \cdot \bar{P}$ نیز این ادعا را تأیید میکند، زیرا اگر میدان قطبی کننده یکنواخت باشد بردار \bar{P} مقدار ثابتی خواهد داشت و دیورژانس آن صفر خواهد بود. گرچه چگالی حجمی بارهای مقید ممکن است مقداری غیر صفر یا صفر داشته باشد، چگالی سطحی بارهای مقید همواره مقداری غیر صفر و برابر $\rho_{ps} = \bar{P} \cdot \hat{a}_n$ دارد. بارهای سطحی از قطبی شدن اتمها (یا ملکولها) در سطح جسم عایق پدید می‌آیند. پس بطور خلاصه، پس از حذف علامت پریم از ∇' داریم:

$$\rho_{ps} = \bar{P} \cdot \hat{a}_n \quad (3-40)$$

$$\rho_p = -\nabla' \cdot \bar{P} \quad (3-41)$$

چون جسم قطبی شده در مجموع از نظر بار الکتریکی خنثی است، مقدار کل بارهای مقید در درون و روی سطح جسم بایستی برابر صفر باشد. برای اثبات این نکته میتوان نوشت:

$$Q_p = \int_{v'} \rho_p dv' + \oint_{s'} \rho_{ps} ds' = \int_{v'} -\nabla' \cdot \bar{P} dv' + \oint_{s'} \bar{P} \cdot \hat{a}_n ds' = 0$$

زیرا:

$$\oint_{s'} \bar{P} \cdot \hat{a}_n ds' = \int_{v'} \nabla' \cdot \bar{P} dv$$

اندیس p در کمیت‌های ρ_p ، ρ_{ps} و Q_p برای منسوب نمودن آنها به پدیده قطبی شدن بکار رفته است. حال با توجه به اینکه نتایج بدست آمده در روابط (۳-۳۹) تا (۳-۴۱) را با رابطه (۳-۴۱) آغاز نمودیم که توأم با محدودیت $|R| \gg d$ بود، ممکن است سؤال شود که آیا برای نتایج مذکور نیز محدودیتی وجود دارد یا آنها در همه نقاط، در درون و بیرون جسم، معتبرند؟ خوشبختانه این نتایج برای کلیه نقاط معتبرند، زیرا در رابطه (۳-۳۳) وقتی که عنصر حجم dv' در حد به سمت صفر میل میکند فاصله d در دوقطبی مربوط به عنصر گشتاور $\bar{P} dv'$ نیز به سمت صفر میل میکند و این رابطه برای هر مقدار دلخواه $|R|$ همچنان معتبر باقی می‌ماند و از چگالیهای سطحی و حجمی که در روابط (۳-۴۰) و (۳-۴۱) داده شده‌اند میتوان برای محاسبه میدان الکتریکی ثانویه، هم در نقاط بیرون و هم در نقاط درون جسم، استفاده کرد.

همانطور که قبلاً نیز گفته شد، بارهای مقید همانند بارهای آزاد تولید میدان الکتریکی میکنند. بنابراین، شکل نقطه‌ای قانون گوس در یک نقطه در درون جسم به شرح زیر نوشته میشود:

$$\nabla \cdot \bar{E} = (\rho + \rho_p) / \epsilon_0 \quad (42-3)$$

که ρ چگالی بار الکتریکی آزاد در صورت موجود بودن است. با جایگزین نمودن ρ_p با $-\nabla \cdot \bar{P}$ در رابطه (42-3) داریم:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E}) = \rho - \nabla \cdot \bar{P}$$

یا:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho \quad (43-3)$$

در اینجا برداری موسوم به چگالی شار الکتریکی^۱ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (44-3)$$

تعریف بردار \bar{D} بگونه‌ای است که دیورژانس آن همیشه برابر چگالی بار آزاد است، یعنی:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (45-3)$$

اهمیت بردار \bar{D} در آن است که دیورژانس آن مستقل از بارهای مقید است و همانطور که رابطه (45-3) نشان می‌دهد فقط به چگالی بار آزاد بستگی دارد. رابطه (45-3) صورت کلی تری از شکل نقطه‌ای قانون گوس است و بعنوان یکی از روابط اساسی در مطالعه مسائل الکترومغناطیس مورد توجه قرار می‌گیرد. در اجسام خطی و همسانگرد^۲ بردار \bar{P} را میتوان بر حسب \bar{E} توسط یک رابطه خطی بصورت زیر بیان داشت:^۳

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi_e \bar{E} \quad (46-3)$$

که χ_e را ضریب حساسیت الکتریکی^۳ یا پذیرفتاری الکتریکی مینامند. با استفاده از رابطه (46-3) در رابطه (44-3) داریم:

1 - Electric Flux Density

2 - Isotropic

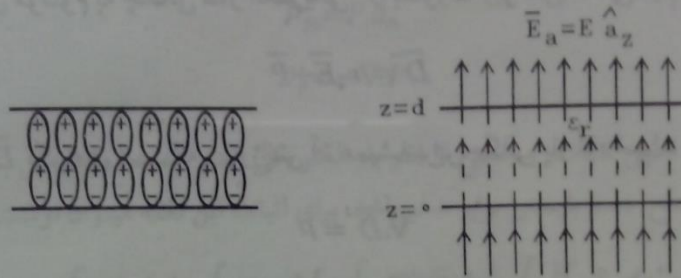
3 - Electric Susceptibility

۱- یک جسم از نظر الکتریکی خطی است اگر اندازه بردار \bar{P} ایجاد شده در آن در هر نقطه متناسب با اندازه میدان الکتریکی کل در آن نقطه باشد و یک جسم از نظر الکتریکی همسانگرد است وقتی که بردار \bar{P} در هر نقطه آن موازی بردار میدان کل در آن نقطه باشد.

$$\bar{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\bar{E} = \epsilon_0\epsilon_r\bar{E} = \epsilon\bar{E} \quad (27-3)$$

در رابطه (27-3)، $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ را قابلیت گذردهی نسبی و $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ را قابلیت گذردهی جسم عایق می‌نامند.

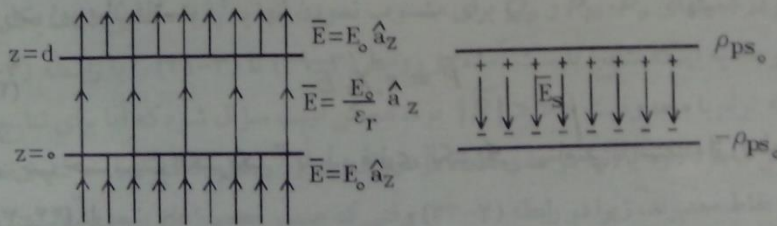
مثال (3-5) فضای بین دو صفحه موازی از ماده عایقی با قابلیت گذردهی نسبی ϵ_r پر شده است. میدان الکتریکی یکنواخت $\bar{E}_a = E_0\hat{a}_z$ ، مطابق شکل (3-15 الف)، به ماده عایق اعمال می‌گردد. بردار پلازاسیون \bar{P} ، چگالی بارهای القاشده در درون ماده عایق و روی سطوح آن ($z=d$ و $z=0$) و نیز میدان الکتریکی کل در تمام نقاط فضا را بدست آورید.



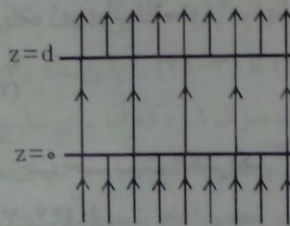
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل (3-15) یک جسم عایق در معرض میدان الکتریکی (الف) میدان الکتریکی یکنواخت \bar{E}_a و ماده عایقی محصور بین دو صفحه موازی بینهایت در معرض آن (ب) ملکولهای قطبی شده ماده عایق (ج) بارهای مقید القایی روی صفحات مرزی و میدان ثانویه حاصل از آنها (د) میدان الکتریکی کل در درون عایق و در خارج آن

حل:

اعمال میدان الکتريکی ملکولهای جسم را مطابق شکل (۳-۱۵-ب) قطبی میکند. چون میدان اعمال شده یکنواخت است، همه دو قطبی‌های ایجاد شده از حیث جهت و مقدار گشتاور یکسانند. بنابراین در همه نقاط ناحیه $0 < z < d$ ، بجز در صفحات مرزی، بارهای مثبت و منفی مقید کاملاً یکدیگر را خنثی میکنند و جسم عایق را میتوان با دو صفحه بینهایت بار با چگالیهای ρ_{ps} و $-\rho_{ps}$ ، مطابق شکل (۳-۱۵-ج)، جایگزین نمود. به علت یکنواخت بودن میدان \vec{E}_a ، چگالیها مقادیر ثابتی دارند و چون ماده عایق مجموعاً از نظر بار الکتريکی خنثی است اندازه‌های آنها مساوی است. این دو صفحه بار، میدانی فقط در ناحیه ماده عایق و در خلاف جهت میدان اولیه \vec{E}_a بوجود می‌آورند. این میدان را میدان ثانویه نامیده و با \vec{E}_s نمایش میدهیم. چون قطبی شدن ماده بصورت یکنواخت صورت می‌گیرد، میتوان نوشت:

$$\vec{P} = P_0 \hat{a}_z$$

حال با استفاده از روابط (۳-۴۰) و (۳-۴۱)، چگالیهای حجمی و سطحی بارهای القایی عبارتند از:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n = \begin{cases} P_0 \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = P_0 = \rho_{ps}, & z = d \\ P_0 \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_z) = -P_0 = -\rho_{ps}, & z = 0 \end{cases} \quad (48-3)$$

میدان ثانویه بر حسب P_0 عبارت است از:

$$\vec{E}_s = \begin{cases} -\frac{\rho_{ps}}{\epsilon_0} \hat{a}_z = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \hat{a}_z & 0 < z < d \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (49-3)$$

بدین ترتیب میدان کل در ناحیه ماده عایق برابر است با:

$$\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_s = (E_0 - P_0/\epsilon_0) \hat{a}_z \quad (50-3)$$

اما از طرف دیگر \vec{E} و \vec{P} توسط رابطه (۳-۴۶) نیز به یکدیگر مربوط میشوند:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) (E_0 - P_0/\epsilon_0) \hat{a}_z = P_0 \hat{a}_z \quad (51-3)$$

پس از حل این معادله برای P_0 داریم :

$$P_0 = E_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) / \epsilon_r \quad (52-3)$$

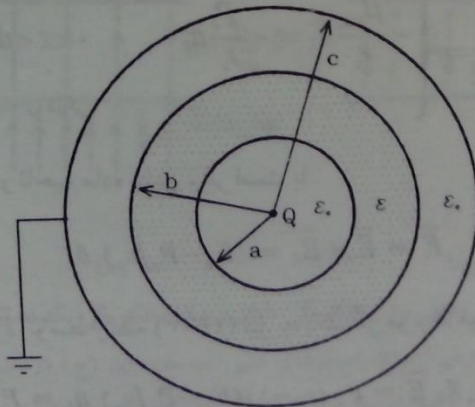
با در دست داشتن P_0 ، بردار پلاریزاسیون و چگالی سطحی بارهای القایی نیز معین میباشند. با استفاده از روابط (۴۹-۳)، (۵۰-۳) و (۵۲-۳) میدان الکتریکی کل که خطوط شار آن در شکل (۱۵-۳) د) نمایش داده شده اند، محاسبه و به شرح زیر خلاصه میشود :

$$\bar{E} = \begin{cases} E_0 \hat{a}_z & z < 0 \\ \frac{E_0}{\epsilon_r} \hat{a}_z & 0 < z < d \\ E_0 \hat{a}_z & z > d \end{cases} \quad (53-3)$$

□

مثال (۶-۳) بار نقطه‌ای Q در مرکز یک لایه کروی که از جنس عایقی با قابلیت گذردهی ϵ است قرار می‌گیرد. شعاع درونی لایه کروی برابر a و شعاع بیرونی آن برابر b است. این مجموعه را، مطابق شکل (۱۶-۳)، در یک سطح کروی هادی زمین شده به شعاع c قرار می‌دهیم، بطوری که لایه عایق کروی و کره هادی هم‌مرکز باشند. میدانهای \bar{E} و \bar{D} در نواحی $0 < r < a$ ، $a < r < b$ و $b < r < c$ همچنین چگالیهای سطحی و حجمی بارهای القایی در ناحیه $a \leq r \leq b$ را بدست آورید.
حل :

با استفاده از تقارن مسأله و بکار بردن شکل انتگرالی قانون گوس بر حسب \bar{D} میتوان نوشت :



شکل (۱۶-۳) سیستمی مرکب از بار نقطه‌ای Q در مرکز یک لایه کروی عایق و یک کره هادی زمین شده

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho dv = Q = S \text{ بار آزاد محصور در سطح بسته } S \quad (54-3)$$

که S سطح کره‌ای به شعاع دلخواه r میباشد. چون برای تمام مقادیر r در فاصله $0 < r < c$ بار آزاد محصور در سطح گوسی S همان Q است و با توجه به ثابت بودن بردار \bar{D} روی سطح گوسی میتوان نوشت:

$$D(4\pi r^2) = Q \quad 0 < r < c$$

و از آنجا که \bar{D} فقط مؤلفه شعاعی دارد، بردار \bar{D} عبارت میشود از:

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r \quad 0 < r < c \quad (55-3)$$

بردار شدت میدان الکتریکی \bar{E} را میتوان به سادگی از رابطه $\bar{E} = \bar{D}/\epsilon$ در هر ناحیه محاسبه کرد:

$$\bar{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{a}_r & 0 < r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{a}_r & b < r < c \end{cases} \quad (56-3)$$

برای محاسبه بردار \bar{P} در ناحیه $a < r < b$ از رابطه (۴۴-۳) استفاده میکنیم:

$$\bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0 \bar{E} = \left(\frac{Q}{4\pi r^2} - \frac{\epsilon_0 Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) \hat{a}_r$$

$$\bar{P} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \hat{a}_r \quad a < r < b \quad (57-3)$$

چگالی‌های بارهای القایی پلاریزاسیون روی سطوح کره‌ای $r=a$ و $r=b$ عبارتند از:

$$\rho_{ps1} = \bar{P} \cdot \hat{a}_n = \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \hat{a}_r \cdot (-\hat{a}_r) = -\frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon a^2} \quad \text{روی سطح } r=a \quad (58-3)$$

$$\rho_{ps2} = \bar{P} \cdot \hat{a}_n = \frac{Q}{4\pi b^2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = +\frac{Q(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon b^2} \quad \text{روی سطح } r=b \quad (59-3)$$

و چگالی حجمی بارهای القایی پلاریزاسیون در ناحیه $a < r < b$ عبارت است از:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \bar{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{Q(r - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon r^2} \right) = 0 \quad (60-3)$$

میدان الکتریکی \bar{E} باعث جذب بار آزادی به مقدار $-Q$ توسط کره هادی از زمین می‌گردد. این بار طبیعتاً بطور یکنواخت روی سطح هادی توزیع میشود و لذا چگالی آن برابر $-Q/4\pi C^2$ است. توجه کنید که چون بار آزاد محصور در سطح گوسی با شعاع $r > C$ صفر است، میدان الکتریکی در ناحیه $r > C$ همواره صفر میباشد.

□

۳-۸) جریان پلاریزاسیون

اگر میدان الکتریکی قطبی کننده تابعی از زمان باشد، پلاریزاسیون ایجاد شده در ماده نیز به همان شکل تابعی از زمان است. تغییرات پلاریزاسیون نسبت به زمان به مثابه حرکت بارهای مقید است و حرکت این بارها منجر به ایجاد جریانی موسوم به جریان پلاریزاسیون میشود. بعنوان مثال، اگر میدان الکتریکی خارجی تغییراتی سینوسی نسبت به زمان داشته باشد، دو قطبی‌های اتمی (یا ملکولی) ایجاد شده در ماده عایق در هر دوره تناوب دو بار تغییر جهت میدهند. یعنی جای بارهای مثبت و منفی هر دو قطبی عوض میشود و به عبارت دقیقتر گشتاور هر دو قطبی تغییرات میدان الکتریکی را دنبال میکند (البته اگر فرکانس خیلی زیاد باشد، دو قطبی‌ها ممکن است نتوانند تغییرات میدان را دنبال نمایند و این پدیده به منزله کاهش قابلیت گذردهی جسم است). چون تغییر دو قطبی‌ها به منزله حرکت بارهای مقید است، یک جریان پلاریزاسیون نوسانی سینوسی بوجود می‌آید. برای یافتن چگالی جریان پلاریزاسیون (\bar{J}_p) از معادله پیوستگی، که در رابطه (۳-۱۶) بیان شده است، استفاده میکنیم:

$$\oint_s \bar{J}_p \cdot \bar{ds} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho_p dv \quad (61-3)$$

با جایگزین نمودن ρ_p با $-\nabla \cdot \bar{P}$ در سمت راست رابطه (۳-۱۶)، داریم:

$$-\frac{d}{dt} \int_v \rho_p dv = \frac{d}{dt} \int_v (\nabla \cdot \bar{P}) dv = \frac{d}{dt} \oint_s \bar{P} \cdot \bar{ds}$$

بنابراین:

$$\oint_s \bar{J}_p \cdot \bar{ds} = \frac{d}{dt} \oint_s \bar{P} \cdot \bar{ds} \quad (62-3)$$

چون رابطه (۳-۶۲) باید برای هر سطح بسته دلخواه S صادق باشد، کمتهای زیر انتگرال در طرفین این رابطه باید برابر باشند، آنگاه:

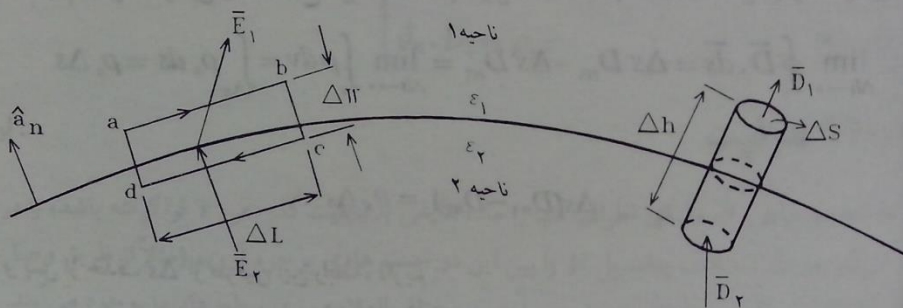
$$\bar{J}_p = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \quad (۳-۶۳)$$

بدیهی است که برای میدانهای الکتریکی ساکن، بردار پلاریزاسیون \bar{P} تغییراتی نسبت به زمان ندارد و جریان پلاریزاسیون صفر است. چنانچه از طرفین رابطه (۳-۶۳) دیورژانس گرفته شود، شکل نقطه‌ای معادله پیوستگی بدست می‌آید.

$$\nabla \cdot \bar{J}_p = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{P} = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \quad (۳-۶۴)$$

۹-۳) شرایط مرزی در سطح مشترک دو عایق

دو ناحیه عایق کامل را با مرز مشترکی مطابق شکل (۳-۱۷) در نظر می‌گیریم. برای تعیین شرایط مرزی عیناً از همان روشی که در اجسام هادی استفاده نمودیم پیروی میکنیم. برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های مماسی میدانها در دو ناحیه مسیر بسته مستطیلی شکل $abcd$ را با ابعاد $ab=cd=\Delta L$ و $ad=bc=\Delta W$ ، مطابق شکل (۳-۱۷)، در نظر می‌گیریم.



شکل (۳-۱۷) شرایط مرزی در سطح مشترک دو عایق

چون ΔL و ΔW بسیار کوچک فرض میشوند، در هر ناحیه از مستطیل $abcd$ میدانهای \bar{E}_1 و \bar{E}_2 ثابت هستند. حال با توجه به اینکه میدانهای الکتریکی ساکن میباشند، میتوان نوشت:

$$\oint_{abcd} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

اما:

$$\lim_{\Delta W \rightarrow 0} \oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = E_{1\parallel} \Delta L - E_{2\parallel} \Delta L = 0$$

یا:

$$\Delta L(E_{1\parallel} - E_{2\parallel}) = 0$$

و چون $\Delta L \neq 0$ است، پس:

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (65-3)$$

رابطه (۶۵-۳) بیان میکند که مؤلفه‌های مماسی میدانهای الکتریکی در مرز دو عایق با یکدیگر برابرند. به عبارت دیگر «مؤلفه مماسی میدان الکتریکی در مرز دو ناحیه عایق همواره پیوسته است». برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های عمودی، سطح گوسی استوانه‌ای شکلی به ارتفاع Δh و قاعده Δs ، مطابق شکل (۳-۱۷)، را در نظر گرفته و قانون گوس را بکار می‌بریم:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dv = S$$

بار آزاد محصور در سطح

V حجم استوانه گوسی و S سطح کل آن است. با میل دادن Δh به سمت صفر میتوان نوشت:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Delta s D_{n1} - \Delta s D_{n2} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dv = \int_{\Delta s} \rho_s ds = \rho_s \Delta s$$

یا:

$$\Delta s(D_{n1} - D_{n2}) = \rho_s \Delta s$$

و پس از حذف Δs از طرفین این رابطه، داریم:

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (66-3)$$

در رابطه (۶۶-۳)، ρ_s چگالی سطحی بار آزاد در سطح مرزی بین دو عایق است. ولی ρ_s غالباً برابر صفر است که در آنصورت:

$$D_{n1} = D_{n2}$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

شرایط مرزی (۳-۶۵) و (۳-۶۶) را میتوان بصورت روابط برداری زیر نیز بیان داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_n \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \\ \hat{a}_n \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s \end{array} \right. \quad (۳-۶۷)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_n \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \\ \hat{a}_n \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s \end{array} \right. \quad (۳-۶۸)$$

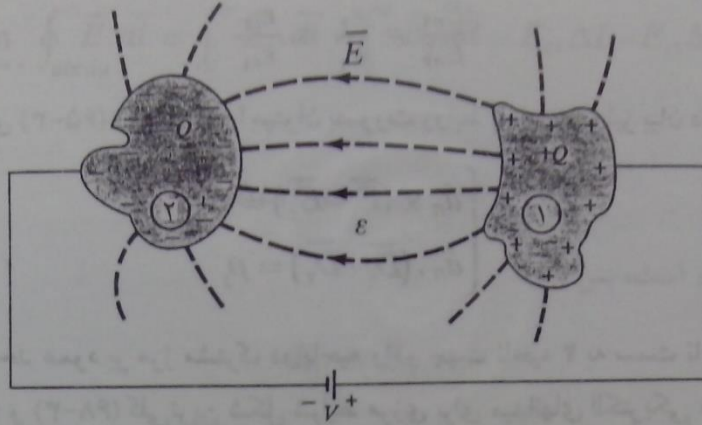
که \hat{a}_n بردار واحد عمود بر مرز مشترک دو ناحیه و در جهت ناحیه ۲ به سمت ناحیه ۱ میباشد. روابط (۳-۶۷) و (۳-۶۸) کلی‌ترین شکل شرایط مرزی برای میدانهای الکتریکی هستند و حتی برای میدانهای متغیر با زمان نیز صادقند. شرایط مرزی در سطح مشترک یک ناحیه هادی و یک ناحیه عایق با قابلیت گذردهی ϵ همان روابط (۳-۲۴) و (۳-۲۵) هستند که در آنها ϵ_0 با ϵ جایگزین گردد. شرایط مرزی اخیر را میتوان در شکل برداری خود از روابط (۳-۶۷) و (۳-۶۸) نیز نتیجه گرفت. اگر یکی از نواحی مثلاً ناحیه ۲ هادی باشد، در آنصورت \bar{E}_2 و \bar{D}_2 برابر صفر بوده و آنگاه داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_n \times \bar{E}_1 = 0 \\ \hat{a}_n \cdot \bar{D}_1 = \rho_s \end{array} \right. \quad (۳-۶۹)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_n \times \bar{E}_1 = 0 \\ \hat{a}_n \cdot \bar{D}_1 = \rho_s \end{array} \right. \quad (۳-۷۰)$$

۳-۱۰ ظرفیت

دو جسم هادی، که فضای اطراف آنها را ماده عایقی با قابلیت گذردهی ϵ فراگرفته باشد، را در نظر می‌گیریم. اگر اختلاف پتانسیل V را بین این دو جسم هادی بوجود آوریم (مثلاً از طریق وصل یک باتری V ولتی بین آنها)، بارهای مساوی و مختلف‌العلامه روی سطح هادیها بوجود می‌آیند. بارهای سطحی بوجود آمده روی سطوح هادیها، میدان الکتریکی \bar{E} را تولید میکنند که با اختلاف پتانسیل V از طریق $V = -\int \bar{E} \cdot d\bar{l}$ مربوط میشود. چون سطوح هادیها سطوح هم‌پتانسیل هستند، خطوط میدان الکتریکی بر آنها عمود بوده و با توجه به شرایط مرزی در سطح مشترک عایق و هادی، $E_n = \rho_s / \epsilon$ است که ρ_s چگالی توزیع بار روی سطح و E_n میدان الکتریکی در سطح هر یک از هادیها میباشد. شکل (۳-۱۸) دو جسم هادی، بارهای بوجود آمده روی آنها و خطوط میدان الکتریکی را نشان میدهد. مقدار کل بار بوجود آمده روی سطح هر هادی (Q) متناسب با ولتاژ



شکل (۳-۱۸) خازنی متشکل از دو جسم هادی و ماده عایقی با قابلیت گذردهی ϵ

بین دو هادی است، بطوری که میتوان نوشت:

$$Q = CV \quad (۳-۷۱)$$

ضریب تناسب C را ظرفیت سیستم متشکل از دو جسم هادی، که عموماً از آن به عنوان خازن نام برده میشود، گویند. C در واقع شاخصی است برای مقدار باری که هر یک از دو جزء سیستم تحت ولتاژ V میتواند در خود نگهدارد. چون Q و V هر دو به میدان الکتریکی \bar{E} مربوطند، میتوان ظرفیت را بر حسب میدان الکتریکی بصورت زیر نوشت:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\int_s \epsilon \bar{E} \cdot d\bar{s}}{\int_+^- \bar{E} \cdot d\bar{l}} \quad (۳-۷۲)$$

صورت کسر سمت راست رابطه (۳-۷۲) یک انتگرال سطح است که روی سطح هر کدام از هادیها ممکن است محاسبه شود. در این انتگرال $\bar{E} = E_n \hat{a}_n$ و $d\bar{s} = ds \hat{a}_n$ است، لذا $\bar{E} \cdot d\bar{s} = E_n ds$ بوده و با در نظر گرفتن شرط مرزی (۳-۷۰)، $\epsilon E_n ds = \rho_s ds$ است. بدین ترتیب مقدار این انتگرال برابر بار Q خواهد بود. انتگرال $\int_+^- \bar{E} \cdot d\bar{l}$ در مخرج کسر، یک انتگرال خط است که در امتداد یک مسیر دلخواه، که نقطه‌ای از هادی با بار مثبت را به نقطه‌ای از هادی با بار منفی وصل کند، محاسبه میشود. ظرفیت یک خازن فقط به شکل و ابعاد هندسی آن و قابلیت گذردهی عایق بکار رفته در آن بستگی

دارد و مستقل از اختلاف پتانسیل V است. وجود \vec{E} هم در صورت و هم در مخرج کسر سمت راست رابطه (۷۲-۳) نیز این خصوصیت را بطور ضمنی تفهیم میکند. واحد اندازه گیری ظرفیت «فاراد» نام دارد.

برای محاسبه ظرفیت یک خازن، ابتدا بارهای Q و $-Q$ را روی سطوح دو هادی آن در نظر گرفته و نحوه توزیع آنها را بررسی می‌کنیم. سپس، میدان الکتریکی \vec{E} حاصل از توزیعهای سطحی بوجود آمده را بدست می‌آوریم. آنگاه، انتگرال $V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l}$ را در امتداد یک مسیر دلخواه، که دو هادی را به هم وصل کند، محاسبه می‌کنیم. سرانجام، نسبت Q به V ظرفیت خازن را بدست می‌دهد. چنانچه اختلاف پتانسیل بین دو هادی معلوم فرض شود با استفاده از روش معادله لاپلاس، که در فصل چهارم مطالعه خواهد شد، ابتدا تابع پتانسیل را بدست آورده و از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ میدان الکتریکی را محاسبه می‌کنیم. با داشتن میدان الکتریکی و استفاده از شرط مرزی (۷۰-۳)، چگالی سطحی بار روی یک هادی و آنگاه Q بدست می‌آید.

مثال (۷-۳) مطلوب است محاسبه ظرفیت خازنی متشکل از دو سطح کروی هادی هم مرکز به شعاعهای a و b ($b > a$) که فضای بین آنها را ماده عایقی با قابلیت گذردهی ϵ پر کرده باشد.
حل:

اعمال ولتاژ V به دو کره، بارهای Q و $-Q$ را روی آنها ایجاد میکند که بطور یکنواخت روی سطوح آنها توزیع میشوند. میدان الکتریکی در فاصله $a < r < b$ شعاعی بوده و با استفاده از قانون گوس محاسبه می‌شود:

$$\vec{E} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{a}_r \quad a < r < b$$

اختلاف پتانسیل بین دو کره به شرح زیر محاسبه میگردد:

$$V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^a \frac{-Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_r dr) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \Big|_b^a = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon ab}$$

آنگاه:

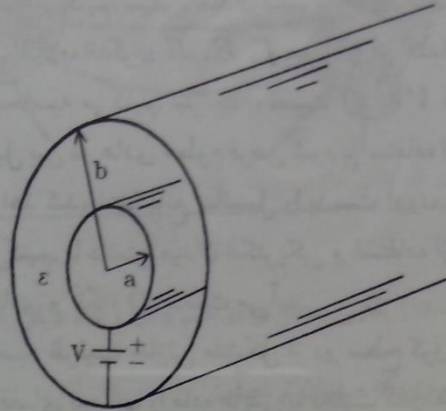
$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a} \quad (۷۳-۳)$$

چنانچه شعاع کره بیرونی (b) به سمت بینهایت میل داده شود، ظرفیت یک کره تنها به شعاع a بدست می‌آید:

$$C = 4\pi\epsilon a \quad (۷۴-۳)$$

□

مثال (۳-۸) کابل هم محور در انتقال علائم الکتریکی کاربردهای فراوانی دارد. این کابل از دو استوانه هم محور، مطابق شکل (۳-۱۹)، تشکیل میشود که فضای بین آنها را ماده عایقی پر نماید. مطلوب است محاسبه ظرفیت در واحد طول یک کابل هم محور به طول بینهایت که شعاعهای استوانه‌های درونی و بیرونی آن به ترتیب برابر a و b و قابلیت گذردهی عایق بین آنها برابر ϵ باشد.



شکل (۳-۱۹) کابل هم محور متشکل از دو استوانه هادی هم محور با ماده عایقی در بین آنها

حل:

فرض کنید که اعمال ولتاژ V بین دو استوانه هادی، بارهای Q و $-Q$ را روی سطوح استوانه‌ها به ازای واحد طول بوجود آورد. توزیع بارها روی سطوح هادیها کاملاً یکنواخت است، لذا با توجه به تقارن استوانه‌ای کابل میدان الکتریکی در ناحیه $a < r < b$ فقط مؤلفه شعاعی دارد و ضمناً روی یک سطح گوسی استوانه‌ای شکل به شعاع r ، مقداری ثابت دارد. این میدان با استفاده از قانون گوس بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r} \hat{a}_r$$

اختلاف پتانسیل V را میتوان با انتگرال گرفتن \vec{E} در امتداد یک مسیر شعاعی که استوانه درونی را به استوانه بیرونی وصل کند بدست آورد.

$$V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon r} \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_r dr) = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln r \Big|_a^b = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

آنگاه:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (۳-۷۵)$$

□

۳-۱۱) میدان الکتریکی در اجسام نیمه هادی

همانگونه که در قسمت (۳-۱) بیان گردید، در نیمه هادیا علاوه بر الکترونهاى آزاد حاملهاى دیگری موسوم به حفره با بار الکتریکی مثبت نیز وجود دارند. وقتی که یک جسم نیمه هادی در معرض میدان الکتریکی قرار می‌گیرد، حفره‌ها نیز مانند الکترونهاى آزاد جابجا میشوند و در فرایند هدایت الکتریکی شرکت میکنند. مشابه قابلیت تحرک μ_e در رابطه (۳-۳) برای الکترونها، میتوان قابلیت تحرک μ_h را برای حفره‌ها تعریف کرد. این ضریب برابر نسبت سرعت متوسط حفره‌ها (\bar{v}_d) به میدان الکتریکی اعمال شده (\bar{E}) میباشد ($\bar{v}_d = \mu_h \bar{E}$). مقدار μ_h عموماً از مقدار μ_e کوچکتر است و این بدان معنی است که حفره‌ها کندتر از الکترونهاى آزاد در یک نیمه هادی جابجا میشوند. اگر در یک جسم نیمه هادی، تعداد الکترونهاى آزاد و حفره‌ها در واحد حجم بترتیب برابر N_h و N_e باشند، چگالی جریان الکتریکی ناشی از اعمال میدان \bar{E} به نیمه‌هادی عبارت است از:

$$\bar{J} = (\mu_e N_e |e| + \mu_h N_h |e|) \bar{E} \quad (۳-۷۶)$$

نحوه استخراج رابطه مزبور مشابه یافتن رابطه (۳-۱۱) در اجسام هادی است. به این ترتیب برای نیمه‌هادیا میتوان رسانایی σ را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\sigma = (\mu_e N_e + \mu_h N_h) |e| \quad (۳-۷۷)$$

در نیمه هادیاى خالص $N_e = N_h$ است. بنابراین ملاحظه میشود که شکل نقطه‌ای قانون اهم، $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ ، برای نیمه هادیا نیز صادق است. به عبارت دیگر، نیمه هادیا وقتی که در معرض میدان الکتریکی قرار بگیرند مشابه هادیا، لیکن با رسانایی به مراتب کوچکتر، رفتار میکنند. البته نباید فراموش شود که چنین تشابهی در موارد دیگر وجود ندارد. مثلاً σ در هادیا با افزایش درجه حرارت کاهش می‌یابد، در حالی که در نیمه هادیا σ با افزایش درجه حرارت افزایش نشان میدهد (البته در نیمه هادیا نیز اگر درجه حرارت از حد معینی تجاوز کند، σ رو به کاهش می‌نهد).

۳-۱۲) انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

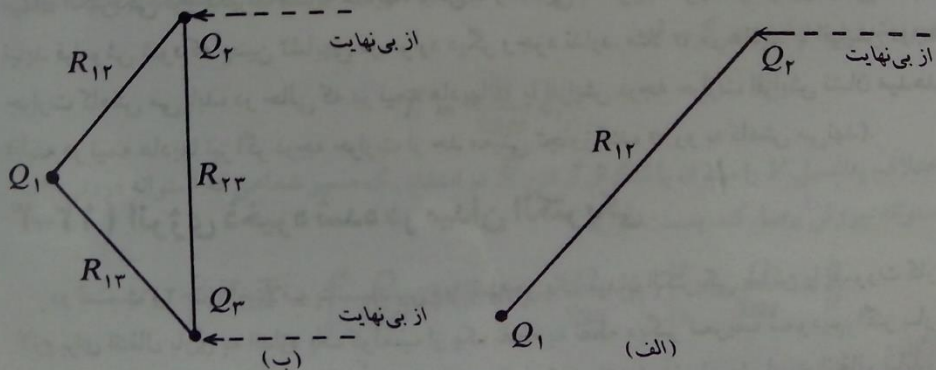
در قسمت (۲-۵)، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در یک میدان الکتریکی ساکن را بصورت کار لازم برای انتقال باری به اندازه یک کولمب از یک نقطه به نقطه دیگر تعریف نمودیم. اگر بار الکتریکی از یک نقطه با پتانسیل بالاتر به نقطه دیگری که پتانسیل آن پایین‌تر است انتقال یابد، میدان کار انجام میدهد و لذا بایستی کاهشی در انرژی سیستم بوجود آید. اکنون میتوان سؤال کرد که

این انرژی را سیستم چگونه تأمین میکند؟ بطور عکس اگر باری از نقطه‌ای با پتانسیل پایین تر به نقطه دیگری با پتانسیل بالاتر انتقال یابد، یک عامل خارجی باید کار انجام دهد و مجدداً میتوان سؤال کرد که کار انجام شده که بصورت افزایش انرژی پتانسیل سیستم بروز میکند در کجا نهفته میشود؟ برای پاسخگویی به این سؤالات میتوان اینطور تصور کرد که در میدان الکتریکی انرژی ذخیره میشود. در حالت اول قدری از انرژی ذخیره شده در میدان صرف انتقال بار به نقطه با پتانسیل پایین تر میشود، در صورتی که در حالت دوم انرژی صرف شده توسط عامل خارجی باعث افزایش انرژی ذخیره شده در میدان میگردد.

برای محاسبه انرژی ذخیره شده در یک میدان الکتریکی، ابتدا از سیستمی مرکب از دو بار نقطه‌ای Q_1 و Q_2 که به فاصله بینهایت از یکدیگر قرار دارند شروع می‌کنیم. برای انتقال Q_2 از بینهایت به مجاورت Q_1 ، بترتیبی که در شکل (۳-۲۰-الف) نشان داده شده است، باید کاری به اندازه حاصل ضرب Q_2 در پتانسیل ناشی از Q_1 در محل Q_2 توسط یک عامل خارجی انجام گیرد. بنابراین انرژی پتانسیل سیستم به اندازه W_p افزایش می‌یابد:

$$W_p = Q_2 V_p^1 \quad (۷۸-۳)$$

در این رابطه، V_p^1 پتانسیل ناشی از Q_1 در محل Q_2 است (یعنی $V_p^1 = Q_1 / 4\pi\epsilon_0 R_{12}$). حال اگر سیستمی مرکب از سه بار نقطه‌ای را در نظر بگیریم، کار لازم برای انتقال Q_3 و Q_2 از بینهایت به مجاورت Q_1 ، بگونه‌ای که در شکل (۳-۲۰-ب) نشان داده شده است، را میتوان در دو مرحله محاسبه نمود. ابتدا Q_2 را از بینهایت به مجاورت Q_1 آورده که کار لازم در این مرحله از رابطه (۷۸-۳) بدست می‌آید. سپس Q_3 را از بینهایت به مجاورت Q_1 و Q_2 می‌آوریم. در مرحله



شکل (۳-۲۰) انتقال بارهای نقطه‌ای از بینهایت به مجاورت بار Q_1 برای محاسبه انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی
(الف) انرژی حاصل از دو بار نقطه‌ای (ب) انرژی حاصل از سه بار نقطه‌ای

دوم نه تنها به نیروی ناشی از Q_1 بلکه به نیروی ناشی از Q_2 نیز باید غلبه شود. بنابراین کار لازم در این مرحله عبارت است از:

$$W_2 = Q_2 V_2^1 + Q_2 V_2^2 \quad (79-3)$$

آنگاه، مقدار کل کار لازم برای انتقال Q_2 و Q_3 به مجاورت Q_1 برابر است با:

$$W_e = W_1 + W_2 = Q_1 V_1^1 + Q_2 V_2^1 + Q_2 V_2^2 \quad (80-3)$$

اگر به همین ترتیب ادامه داده بر تعداد بارها بیفزاییم و سرانجام سیستمی مرکب از N بار نقطه‌ای، که فواصل دو به دوی آنها در بدو امر بینهایت است، را در نظر بگیریم، کار لازم برای انتقال بارهای $Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_n$ به مجاورت بار Q_1 عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} W_e &= W_1 + W_2 + \dots + W_N \\ &= Q_1 V_1^1 + (Q_2 V_2^1 + Q_2 V_2^2) + (Q_3 V_3^1 + Q_3 V_3^2 + Q_3 V_3^3) + \dots \\ &= \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} Q_i V_i^j \end{aligned} \quad (81-3)$$

که V_i^j پتانسیل ناشی از بار Q_j در محل بار Q_i است. اما جمله $Q_i V_i^j$ را میتوان بصورت زیر تغییر داد:

$$Q_i V_i^j = Q_i \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ji}} = Q_j \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = Q_j V_j^i \quad (82-3)$$

اکنون با استفاده از رابطه (82-3)، W_e در رابطه (81-3) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$W_e = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} Q_j V_j^i \quad (83-3)$$

پس از جمع طرفین روابط (81-3) و (83-3) داریم:

$$\begin{aligned} 2W_e &= Q_1 (V_1^1 + V_1^2 + V_1^3 + \dots + V_1^N) + Q_2 (V_2^1 + V_2^2 + V_2^3 + \dots + V_2^N) + \\ & Q_3 (V_3^1 + V_3^2 + V_3^3 + \dots + V_3^N) + \dots + Q_N (V_N^1 + V_N^2 + V_N^3 + \dots + V_N^{N-1}) \\ &= Q_1 (\text{پتانسیل در محل } Q_1 \text{ ناشی از سایر بارها}) + Q_2 (\text{پتانسیل در محل } Q_2 \text{ ناشی از سایر بارها}) + \dots \end{aligned}$$

(۸۴-۳) (پتانسیل در محل Q_N ناشی از سایر بارها) $+ \dots +$ (پتانسیل در محل Q_M ناشی از سایر بارها) Q_M

یا:

$$2W_e = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \dots + Q_N V_N = \sum_{i=1}^N Q_i V_i \quad (85-3)$$

که V_i پتانسیل در محل بار Q_i ناشی از سایر بارها (یعنی $N-1$ بار دیگر به غیر از خود Q_i) میباشد. پس از تقسیم طرفین رابطه (۸۵-۳) بر ۲ داریم:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i \quad (86-3)$$

رابطه (۸۶-۳) انرژی پتانسیل ذخیره شده در میدان الکتریکی سیستمی مرکب از N بار نقطه‌ای را بدست میدهد.

در صورتی که توزیع پیوسته‌ای از بار الکتریکی با چگالی حجمی ρ_v در حجم V ، که محدود به سطح بسته S است، داشته باشیم، این بار را میتوان به منزله مجموعه‌ای از بارهای کوچک نقطه‌ای تلقی نمود که اندازه هر یک برابر $\rho_v \Delta v$ باشد. آنگاه، انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم مرکب از بارهای بینهایت کوچک، با استفاده از رابطه (۸۶-۳)، برابر است با:

$$\begin{aligned} W_e &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_i [\rho_v \Delta v]_i V_i \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho_v V dv \end{aligned} \quad (87-3)$$

به همین ترتیب میتوان نشان داد که برای یک توزیع سطحی بار با چگالی ρ_s ، انرژی ذخیره شده در میدان عبارت است از:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_s V ds \quad (88-3)$$

در آغاز این قسمت بیان نمودیم که انرژی پتانسیل سیستمی مرکب از بارهای الکتریکی را میتوان بصورت انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی آن پنداشت. از اینرو باید بتوان انرژی سیستم را بر حسب میدان الکتریکی بیان کرد. برای رسیدن به چنین نتیجه‌ای ابتدا ρ_v در رابطه (۸۷-۳) را با $\epsilon_0 \nabla \cdot \bar{E}$ جایگزین می‌نماییم:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 \nabla \cdot \bar{E}) V dv \quad (89-3)$$

چون در نقاطی از فضا که بار الکتریکی وجود ندارد $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ است، اگر حجم انتگرال‌گیری در رابطه (۳-۸۹) از V به تمام فضا تغییر یابد، مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند. بنابراین، میتوان نوشت:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{تمام فضا}} (\epsilon \nabla \cdot \bar{E}) V dv \quad (۳-۹۰)$$

اکنون از اتحاد برداری $\nabla \cdot (V\bar{E}) = V \nabla \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \nabla V$ استفاده نموده و در رابطه (۳-۹۰)، $V \nabla \cdot \bar{E}$ را با $\nabla \cdot (V\bar{E}) - \bar{E} \cdot \nabla V$ جایگزین می‌نماییم:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \epsilon \int_{\text{تمام فضا}} [\nabla \cdot (V\bar{E}) - \bar{E} \cdot \nabla V] dv \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \int_{\text{تمام فضا}} \nabla \cdot (V\bar{E}) dv + \frac{1}{2} \epsilon \int_{\text{تمام فضا}} \bar{E} \cdot \bar{E} dv \end{aligned} \quad (۳-۹۱)$$

در انتگرال دوم رابطه (۳-۹۱) از رابطه $\bar{E} = -\nabla V$ استفاده شده است. با بکار بردن قضیه دیورژانس، انتگرال اول در رابطه مذکور را به یک انتگرال سطح تبدیل میکنیم:

$$\int_{\text{تمام فضا}} \nabla \cdot (V\bar{E}) dv = \oint_{\text{سطح تمام فضا}} V\bar{E} \cdot \bar{ds} \quad (۳-۹۲)$$

که منظور از سطح تمام فضا، سطح کره‌ای به شعاع بینهایت است. اما روی چنین سطحی هر توزیع بار محدودی به مقدار کل Q بصورت یک بار نقطه‌ای بنظر میرسد، بطوری که وقتی r به سمت بینهایت میل کند میدان \bar{E} و پتانسیل V ، صرفنظر از چگونگی توزیع باری که منشأ \bar{E} و V است، به سمت حدود زیر میل خواهند کرد:

$$\bar{E} \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

$$V \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

و حد رابطه انتگرالی (۳-۹۲) عبارت میشود از:

$$\begin{aligned} \oint_{\text{سطح فضای بینهایت}} V\bar{E} \cdot \bar{ds} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{r} \right) \sin\theta d\theta d\phi = 0 \end{aligned} \quad (۲-۹۳)$$

نتیجه بدست آمده حتی برای یک توزیع بار بینهایت نیز صادق خواهد بود، مشروط بر آنکه وقتی

میدان الکتریکی \bar{E} حداقل با نرخ r^{-2} و پتانسیل V حداقل با نرخ r^{-1} کاهش یابد. بدین ترتیب رابطه (۳-۹۱) بصورت زیر خلاصه میگردد:

$$W_e = \frac{1}{4\pi} \epsilon_0 \int_{\text{تمام فضا}} \bar{E} \cdot \bar{E} \, dv = \int_{\text{تمام فضا}} \left(\frac{1}{4\pi} \epsilon_0 E^2 \right) dv \quad (۳-۹۴)$$

رابطه (۳-۹۴) بوضوح نشان میدهد که تصور ذخیره شدن انرژی در میدان الکتریکی کاملاً صحیح است و کمیت $w_e = \frac{1}{4\pi} \epsilon_0 E^2$ محققاً چگالی انرژی الکتریکی محسوب میشود. چنانچه فضایی که بارهای الکتریکی میدان \bar{E} را در آن بوجود می‌آورند به جای خلاء ماده عایقی با قابلیت گذردهی ϵ بوده و ماده عایق همچنین از نظر الکتریکی خطی باشد، چگالی انرژی الکتریکی از رابطه $w_e = \frac{1}{4\pi} \epsilon E^2 = \frac{1}{4\pi} \bar{E} \cdot \bar{D}$ بدست می‌آید. چگالی انرژی الکتریکی در محیطهای غیر خطی از رابطه $w_e = \int^D \bar{E} \cdot d\bar{D}$ بدست می‌آید که به اثبات آن نمی‌پردازیم. بطور خلاصه میتوان نوشت:

$$W_e = \frac{1}{4\pi} \int_V \bar{E} \cdot \bar{D} \, dv \quad (۳-۹۵)$$

مثال (۳-۹) انرژی ذخیره شده در سیستم خازنی شکل (۳-۱۸) را بر حسب ظرفیت C و اختلاف پتانسیل V محاسبه کنید.

حل:

در این سیستم دو بار مساوی و مختلف‌العلامه $+Q$ و $-Q$ روی سطوح S_1 و S_2 دو جسم هادی توزیع میشوند. اگر پتانسیل هادی حاوی بار $+Q$ را با V_1 و پتانسیل هادی حاوی بار $-Q$ را با V_2 نشان دهیم، آنگاه با استفاده از رابطه (۳-۸۸) میتوان نوشت:

$$W_e = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \rho_s V_1 \, ds + \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \rho_s V_2 \, ds$$

اما چون S_1 و S_2 سطوح هم پتانسیل هستند، V_1 روی S_1 و V_2 روی S_2 ثابت است. لذا میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{4\pi} V_1 \int \rho_s \, ds + \frac{1}{4\pi} V_2 \int \rho_s \, ds = \frac{1}{4\pi} V_1 Q - \frac{1}{4\pi} V_2 Q \\ &= \frac{1}{4\pi} Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{4\pi} QV \end{aligned}$$

اما از طرفی طبق تعریف ظرفیت $Q = CV$ است، در نتیجه:

$$W_e = \frac{1}{4\pi} CV^2 \quad (۳-۹۶)$$

□

مثال (۳-۱۰) بار Q بطور یکنواخت روی سطح کره‌ای هادی به شعاع R توزیع شده است. انرژی الکتریکی ذخیره شده در میدان حاصل از این توزیع بار را به دو روش زیر محاسبه کنید:

الف) با استفاده از رابطه (۳-۸۸)،

ب) با استفاده از رابطه (۳-۹۴).

حل:

الف)

$$W_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_s V ds = \frac{1}{\epsilon_0} V \int_s \rho_s ds = \frac{1}{\epsilon_0} VQ$$

اما پتانسیل V روی سطح کره عبارت است از:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

در نتیجه:

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

ب) برای محاسبه انرژی با استفاده از رابطه (۳-۹۴) ابتدا عبارت میدان الکتریکی را می‌نویسیم:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > R \end{cases}$$

آنگاه:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{تمام فضا}} \epsilon_0 E^2 dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r=R}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

□

۳-۱۳) نیرو و گشتاور در سیستم‌های الکتریکی ساکن

سیستمی مرکب از تعدادی از اجسام عایق و هادی را در نظر بگیرید که هر یک دارای مقدار معینی بار الکتریکی باشد. فرض کنید پس از تأثیرات متقابل میدانهای الکتریکی و اجسام بر یکدیگر بارهای الکتریکی توزیع نهایی خود را یافته باشند. بدیهی است که بر اساس قانون کولمب

این بارهای الکتریکی و لذا اجسام حاوی این بارها بر یکدیگر نیرو اعمال می‌کنند. مطالعه چنین نیروهایی با استفاده از قانون کولمب عموماً کار آسانی نیست. در این قسمت روش انرژی را برای بررسی نیروهای الکتریکی می‌آموزیم.

برای روشن شدن مطلب مثال ساده یک خازن با صفحات موازی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید این خازن از دو صفحه موازی هر یک به مساحت A ، که فضای بین آنها را عایقی با قابلیت گذردهی ϵ پر کرده است، تشکیل شده باشد. فاصله صفحات از یکدیگر x فرض میشود. بارهای $+Q$ و $-Q$ روی صفحات خازن گذاشته میشوند. طبعاً دو صفحه هادی یکدیگر را تحت تأثیر نیروی جاذبه قرار می‌دهند. در حقیقت اگر صفحات خازن مجاز به حرکت کردن بودند به یکدیگر می‌چسبیدند. اما چون سیستم ساکن فرض میشود حرکتی صورت نمی‌پذیرد. هدف ما محاسبه نیروی جاذبه مزبور می‌باشد. برای این منظور تصور کنید که یکی از صفحات به اندازه Δx از صفحه دیگر تغییر فاصله بدهد. کار لازم برای این جابجایی مجازی برابر است با:

$$\Delta W = F_x \Delta x \quad (98-3)$$

که F_x همان نیروی مطلوب است. اگر این خازن با دنیای خارج از خودش ارتباطی نداشته باشد، انرژی مورد نیاز باید از خود سیستم تأمین شود. اما از طرف دیگر چون انرژی کل سیستم ثابت است (زیرا سیستم با دنیای خارج ارتباط ندارد)، پس:

$$\Delta W + \Delta W_e = 0 \quad (99-3)$$

که ΔW_e تغییر بوجود آمده در انرژی الکتریکی ذخیره شده در سیستم است اگر جابجایی Δx بوقوع می‌پیوست. از روابط (۹۸-۳) و (۹۹-۳) و در حد وقتی که Δx به سمت صفر میل کند، نتیجه زیر را بدست می‌آوریم:

$$F_x = -\frac{dW_e}{dx} \quad (100-3)$$

برای خازن با صفحات موازی، $W_e = Q^2 x / 2\epsilon A$ و لذا $F_x = -Q^2 / 2\epsilon A$ می‌باشد. در حالت کلی و برای یک سیستم دلخواه که حاوی بار معینی باشد، بردار نیروی \bar{F} و جابجایی $\bar{\Delta l}$ را در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\Delta W_e = -\bar{F} \cdot \bar{\Delta l} \quad (101-3)$$

پس از بکار بستن تعریف گرادیان یک تابع اسکالر خواهیم داشت:

$$\bar{F} = -\nabla W_e \quad | \quad Q = \text{ثابت} \quad (102-3)$$

در حالت دیگری فرض می‌کنیم سیستم با دنیای خارج ارتباط داشته باشد و اجسام هادی در این سیستم دارای پتانسیل ثابتی باشند. مثلاً میتوان تصور کرد که صفحات خازن فوق به یک باتری با ولتاژ ثابت وصل باشند. در این حالت انرژی مورد نیاز برای جابجایی Δx از منبع یا منابع خارجی تأمین شده و انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی خازن تغییری به اندازه $\Delta W_e = \Delta W$ می‌نماید که ΔW از رابطه (۹۸-۳) بدست می‌آید. لذا $F_x = \Delta W_e / \Delta x$ و در حد وقتی که Δx به سمت صفر میل میکند:

$$F_x = \frac{dW_e}{dx} \quad | \quad V = \text{ثابت} \quad (103-3)$$

انرژی ذخیره شده در خازن را میتوان بصورت $W_e = \frac{1}{2} \frac{V^2 \epsilon A}{x}$ نوشت، لذا:

$$F_x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{V^2 \epsilon A}{x} \right) = -\frac{1}{2} \frac{V^2 \epsilon A}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon A}$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلاً محاسبه شده بود (از فرمول ظرفیت خازن با صفحات موازی، $C = \epsilon A/x$ ، در آخرین مرحله محاسبات فوق استفاده شده است). در حالت کلی و برای یک سیستم دلخواه که شامل اجسام هادی با پتانسیل ثابت است، داریم:

$$\bar{F} = \nabla W_e \quad | \quad V = \text{ثابت} \quad (104-3)$$

اگر سیستم مورد مطالعه طوری طرح شده باشد که قابلیت چرخش حول محوری (مثلاً محور z) را داشته باشد، کار مورد نیاز برای جابجایی زاویه‌ای $\Delta \varphi$ برابر است با $\Delta W = T_z \Delta \varphi$ ، که T_z مؤلفه گشتاور در امتداد محور چرخش (z) است. اگر سیستم حاوی بار ثابتی باشد، به همان ترتیب که در مطالعه نیرو دیدیم:

$$T_z = -\frac{\partial W_e}{\partial \varphi} \quad | \quad Q = \text{ثابت} \quad (105-3)$$

و چنانچه سیستم شامل هادیهایی با پتانسیل ثابت باشد:

$$T_z = \frac{\partial W_e}{\partial \varphi} \quad | \quad V = \text{ثابت} \quad (106-3)$$

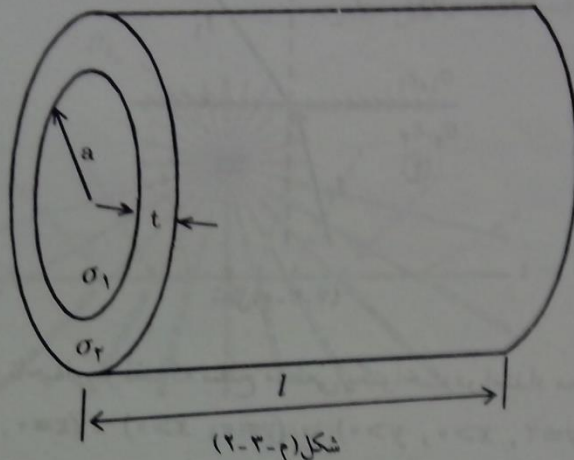
■ خلاصه فصل

- در این فصل میدانهای ساکن در حضور اجسام را مطالعه کرده و تأثیرات ماده و میدان بر یکدیگر و نتایج حاصله را در مقیاس ماکروسکوپی بررسی نمودیم. بطور خلاصه:
- هدایت الکتریکی در اجسام را به اختصار بررسی کرده و آنها را به هادی، نیمه هادی و عایق دسته‌بندی نمودیم.
 - اصل بقای بار الکتریکی را مطالعه نموده و آن را بر حسب چگالیهای جریان (\bar{J}) و بار (ρ) بیان داشتیم ($\Delta \cdot \bar{J} = -\partial\rho/\partial t$).
 - مقاومت الکتریکی را تعریف نموده و آن را با استفاده از میدان الکتریکی محاسبه کردیم همچنین قانون اهم را در شکل‌های انتگرالی ($V=IR$) و نقطه‌ای ($\bar{J}=\sigma\bar{E}$) مطالعه نمودیم.
 - میدان الکتریکی در حضور اجسام هادی و شرایط مرزی را بررسی کرده و نتیجه گرفتیم که:
 - (الف) میدان الکتریکی در درون هادیها همواره صفر است، (ب) میدان الکتریکی بر سطوح هادیها همواره عمود است، (ج) بارهای الکتریکی فقط روی سطوح هادیها میتوانند توزیع شوند.
 - قطبی شدن عایقها را تحت تأثیر میدان الکتریکی و پدید آمدن بارهای القایی مقید را مورد بررسی قرار دادیم.
 - کمیت‌های برداری \bar{P} و \bar{D} ، که به ترتیب بردار پلاریزاسیون و بردار چگالی شار الکتریکی نام دارند، را تعریف کردیم. بردار \bar{P} میزان قطبی شدن جسم عایق را بیان میکند، در حالی که بردار \bar{D} بگونه‌ای تعریف میشود که دیورژانس آن مستقل از بارهای القایی مقید است ($\nabla \cdot \bar{D} = \rho$).
 - برای اجسام عایق قابلیت گذردهی (ϵ) را تعریف نمودیم که در صورت همسانگرد بودن عایق ارتباط بین \bar{E} و \bar{D} را به شکل ساده $\bar{D}=\epsilon\bar{E}$ بیان می‌کند.
 - شرایط مرزی بین دو جسم عایق را بررسی نمودیم. مؤلفه عمودی میدان \bar{D} و مؤلفه مماسی میدان \bar{E} در مرز بین دو عایق باید پیوسته باشند.
 - ظرفیت بین دو جسم هادی را تعریف نموده و آن را با استفاده از میدان الکتریکی محاسبه کردیم.
 - انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی را بررسی کرده و نیرو و گشتاور را به اختصار مورد مطالعه قرار دادیم.

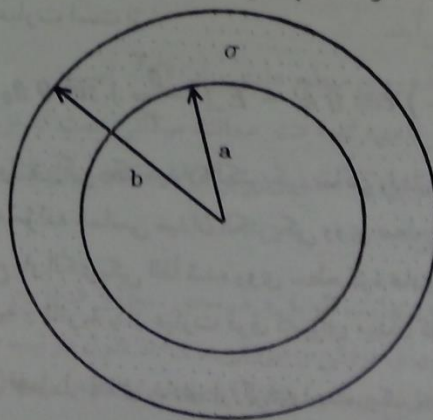
■ مسائل

۱-۳ از یک سیم مسی با سطح مقطع یک میلیمتر مربع جریان مستقیم ۱ آمپر میگذرد. اگر تعداد الکترونهاي آزاد مس در متر مکعب برابر $N = 8/3 \times 10^{28}$ باشد، سرعت متوسط حرکت الکترونها را محاسبه کنید. چه زمانی طول میکشد تا یک الکترون مسافتی برابر ۱۰۰ کیلومتر را طی کند؟

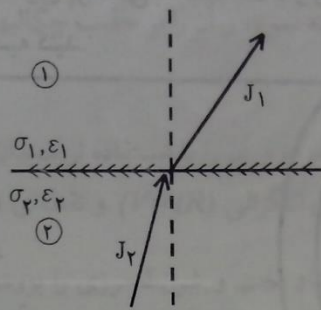
۲-۳ استوانه‌ای به شعاع a و طول l از یک ماده هادی با رسانایی σ_1 تشکیل شده است. این استوانه، مطابق شکل (م-۳-۲)، دارای پوششی به ضخامت t و رسانایی σ_2 است. مقاومت استوانه را بین دو سطح انتهایی آن محاسبه کنید.



۳-۳ یک مقاومت از جسمی با رسانایی σ و به شکل یک لایه کروی، مانند شکل (م-۳-۳)، ساخته شده است. اگر شعاعهای داخلی و خارجی این لایه کروی بترتیب برابر a و b باشند، مقاومت بین سطوح $r=a$ و $r=b$ را محاسبه کنید.



۴-۳ دو ناحیه با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 و رسانایی‌های σ_1 و σ_2 ، مطابق شکل (م-۳-۴)، را در نظر بگیرید. فرض کنید یک جریان الکتریکی که چگالی آن در ناحیه ۱ برابر \bar{J}_1 و در ناحیه ۲ برابر \bar{J}_2 است، از ناحیه ۱ به سوی ناحیه ۲ برقرار باشد. نشان دهید که شرط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی چگالی جریان بصورت $J_{1\parallel}/\sigma_1 = J_{2\parallel}/\sigma_2$ و برای مؤلفه‌های عمودی آن بصورت $J_{n1} = J_{n2}$ بیان میشود. همچنین نشان دهید که در مرز مشترک دو ناحیه باری با چگالی سطحی $\rho_s = J_n(\epsilon_1/\sigma_1 - \epsilon_2/\sigma_2)$ وجود دارد.



شکل (م-۳-۴)

۵-۳ تابع پتانسیل در ناحیه‌ای از فضا که سطح مقطعی یکنواخت در امتداد محور z دارد و به سه سطح هادی $(x=0, y>0)$ ، $(x>0, y=0)$ و $(xy=2, x>0, y>0)$ محدود می‌باشد توسط رابطه $V = V_0 xy$ بیان میشود. چگالی توزیع بار الکتریکی روی این سه سطح هادی را بدست آورید.

۶-۳ میدان الکتریکی در فضای اطراف یک کره هادی به شعاع a که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات فرض میشود عبارت است از:

$$\bar{E} = E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \cos \theta \hat{a}_r - E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \theta \hat{a}_\theta \quad r \geq a$$

- الف) آیا میدان مزبور ویژگی یک میدان الکتریکی ساکن را دارا است؟
- ب) نشان دهید که مؤلفه مماسی میدان الکتریکی روی سطح کره هادی صفر است.
- ج) چگالی توزیع بار الکتریکی القا شده روی سطح کره هادی را بدست آورید.
- د) میدانهای اولیه و ثانویه را از عبارت فوق که برای میدان کل میباشد محاسبه کنید.

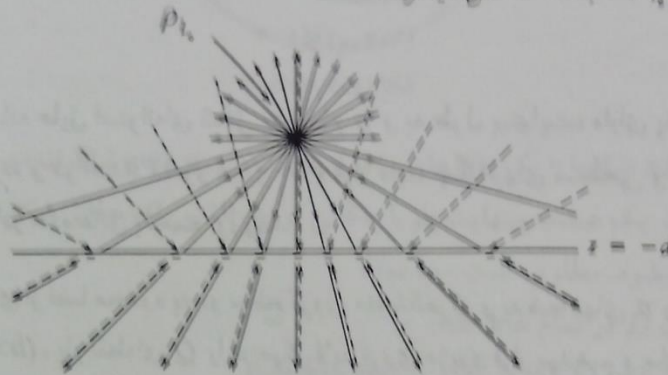
۷-۳ ناحیه $z < -d$ از فضا را ماده‌ای هادی فراگرفته است. یک خط بینهایت بار با چگالی

یکنواخت ρ_1 ، مطابق شکل (م-۳-۷)، در امتداد محور z قرار دارد. با استفاده از میدان ثانویه مورد نیاز برای آنکه میدان الکتریکی کل در ناحیه هادی صفر شود و با استفاده از تقارن میدان ثانویه نسبت به $z = -d$ نشان دهید که:

الف) چگالی بارهای القا شده روی سطح هادی از رابطه $-\rho_1 d / \pi(x^2 + d^2)$ در دستگاه مختصات مستطیلی بدست می‌آید.

ب) مقدار بار القایی به ازای واحد طول در امتداد محور z برابر $-\rho_1$ است.

ج) میدان الکتریکی در ناحیه $z \geq -d$ همانند میدانی است که از خط بینهایت بار در امتداد محور x و یک خط بار تصویر که موازی با محور z بوده، از نقطه $(0, 0, -2d)$ بگذرد و دارای چگالی یکنواخت $-\rho_1$ باشد حاصل میشود.



شکل (م-۳-۷)

۸-۳ در مسأله (۷-۳) فرض کنید بجای خط بینهایت بار، بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات قرار دارد. نشان دهید که:

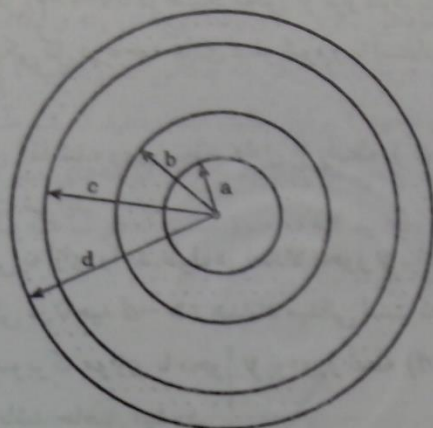
الف) چگالی بارهای القا شده روی سطح هادی از رابطه $-Qd / 2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای بدست می‌آید.

ب) مقدار کل بار القا شده روی سطح هادی برابر $-Q$ است.

ج) میدان الکتریکی در ناحیه $z \geq -d$ همانند میدانی است که از بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات و یک بار نقطه‌ای تصویر، که مقداری برابر $-Q$ داشته و در نقطه $(0, 0, -2d)$ واقع باشد، حاصل میشود.

۹-۳ دو لایه هادی استوانه‌ای، بینهایت طویل و هم‌محور، مطابق شکل (م-۳-۹)، مفروضند. مقدار خالص بار الکتریکی روی هادیهای درونی و بیرونی در واحد طول بترتیب برابر ρ_1 و ρ_2 می‌باشد. توزیع بار الکتریکی را روی سطوح $r=a, r=b, r=c, r=d$ بدست آورید. فضای بین هادیها

خلأ است.



شکل (۲-۳-۹)

۱۰-۳ یک ماده عایق استوانه‌ای شکل به شعاع a و به طول بینهایت، دارای پلاریزاسیون دائمی $\vec{P} = \vec{P}_0 \hat{a}_y$ بوده و در امتداد محور z در خلأ قرار دارد. چگالیهای سطحی و حجمی بارهای مقید القایی را در ماده عایق بدست آورید.

۱۱-۳ ناحیه‌ای از فضا محدود به دو سطح کره‌ای متحدالمركز و به شعاعهای a و b را ماده عایقی پر میکند ($b > a$). بار نقطه‌ای Q را در مرکز لایه کره‌ای مزبور قرار میدهیم و ملاحظه می‌کنیم که شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق عبارت است از:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \hat{a}_r \quad a < r < b$$

الف) قابلیت‌گذردهی ماده عایق را بدست آورید.

ب) چگالی بارهای سطحی پلاریزاسیون روی سطوح $r=a$ و $r=b$ را محاسبه نمایید.

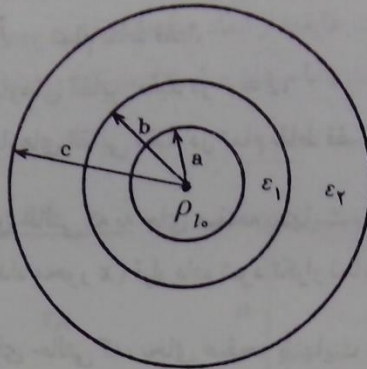
ج) چگالی حجمی بار ناشی از پلاریزاسیون در ناحیه $a < r < b$ را بدست آورید.

۱۲-۳ دو لایه عایق استوانه‌ای بینهایت طویل را با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 ، مطابق شکل (۲-۳-۱۲)، در نظر می‌گیریم. قابلیت‌گذردهی لایه درونی ثابت و برابر $\epsilon_1 = \epsilon_2 \frac{c}{b}$ میباشد، ولی قابلیت‌گذردهی لایه بیرونی غیر یکنواخت و بصورت $\epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{c}{r}$ تغییر می‌کند. یک خط بار بینهایت طویل با چگالی ثابت ρ_l هم محور با استوانه‌های عایق قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان \vec{D} در تمام نقاط فضا،

ب) میدان \vec{E} در تمام نقاط فضا،

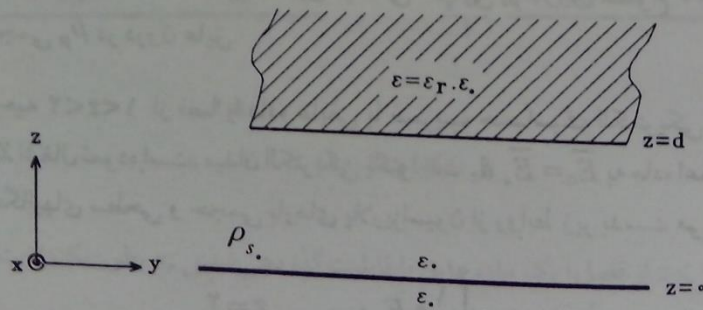
- ج (چگالی حجمی بارهای القایی مقید در هر دو عایق،
 د (چگالی سطحی بارهای القایی مقید روی سطوح $r=a$ و $r=b$ و $r=c$.)



شکل (م-۳-۱۲)

۱۳-۳ ناحیه $z > d$ از فضا را یک ماده عایق با قابلیت گذردهی $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ فراگرفته، در حالی که ناحیه $z < d$ خلاء است. یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت ρ_s ، مطابق شکل (م-۳-۱۳)، در $z=0$ قرار داده میشود. مطلوب است محاسبه:

- الف (میدان \vec{D} در تمام نقاط فضا،
 ب (میدان الکتریکی کل (\vec{E}) در تمام نقاط فضا،
 ج (چگالیهای سطحی و حجمی بارهای القایی مقید در ناحیه عایق.)



شکل (م-۳-۱۳)

۱۴-۳ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_0 در کره‌ای از جنس عایق با قابلیت گذردهی $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ توزیع شده است. نشان دهید که پتانسیل در مرکز این کره برابر است با $V = \rho_0 a^2 (2\epsilon_r + 1) / 6\epsilon_r \epsilon_0$ که در آن a شعاع کره عایق است.

۱۵-۳ ناحیه $z > 0$ از فضا را عایقی با قابلیت گذردهی ϵ_1 و ناحیه $z < 0$ را عایق دیگری با قابلیت گذردهی ϵ_2 اشغال نموده است. یک صفحه بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت ρ_s در $z = 0$ قرار داده میشود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای \vec{D} و \vec{E} در تمام نقاط فضا،

ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید در $z = 0$ ،

ج) چگالی حجمی بارهای القایی مقید در تمام نقاط فضا.

۱۶-۳ مسأله (۱۵-۳) را برای حالتی که به جای صفحه بینهایت بار، یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع ثابت ρ_l (مثلاً در امتداد محور x) قرار داده شود تکرار نمایید.

۱۷-۳ مسأله (۱۵-۳) را برای حالتی که، بجای صفحه بینهایت بار، یک بار نقطه‌ای Q (مثلاً در مبدأ مختصات) قرار داده شود تکرار نمایید.

۱۸-۳ فضای محصور بین $z = d$ و $z = 0$ را ماده عایقی فراگرفته است. قابلیت گذردهی این ماده غیر یکنواخت بوده و طبق رابطه زیر تغییر میکند:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{(1+z/d)^2}$$

میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = E_0 \hat{a}_z$ به این ماده اعمال میشود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان \vec{D} در درون و بیرون عایق،

ب) میدانهای \vec{E} و \vec{P} در درون عایق، چگالی سطحی ρ_{ps} روی سطوح $z = d$ و $z = 0$ و نیز

چگالی حجمی ρ_p در درون عایق.

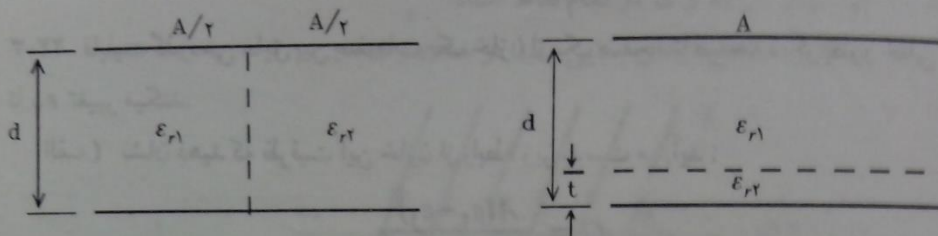
۱۹-۳ ناحیه $1 < z < 2$ از فضا را ماده عایقی با ضریب حساسیت الکتریکی غیر یکنواخت $\epsilon = \frac{z}{4-z}$ اشغال نموده است. میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_0 = E_0 \hat{a}_z$ به ماده اعمال میشود. نشان دهید که چگالیهای سطحی و حجمی بارهای پلاریزاسیون از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\rho_{ps} = \begin{cases} \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0 & z = 2 \\ -\frac{1}{4} \epsilon_0 E_0 & z = 1 \end{cases}$$

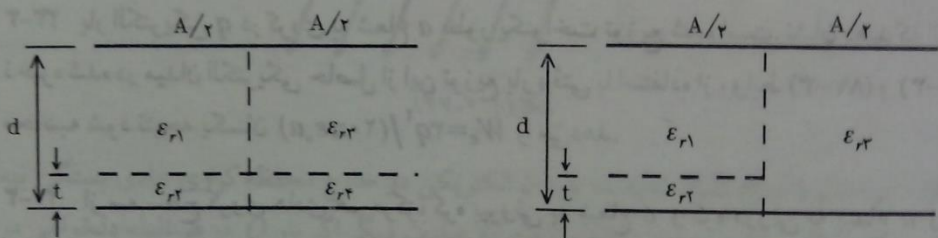
$$\rho_p = -\frac{1}{4} \epsilon_0 E_0 \quad 1 < z < 2$$

میدان الکتریکی ثانویه و میدان کل را در درون و بیرون ماده عایق بدست آورید.

۲۰-۳ مطلوب است محاسبه ظرفیت هر یک از خازنهای با صفحات موازی که در شکل (م-۳-۲۰) نشان داده شده‌اند. فرض کنید ضخامت عایقها از ابعاد صفحات هادی بسیار کوچکتر بوده، آنگاه میدان الکتریکی را در بین صفحات هر خازن با میدان صفحات موازی و بینهایت تقریب بزنید.



(الف) (ب)



(ج) (د)

شکل (م-۳-۲۰)

۲۱-۳ ناحیه $z < -d$ از فضا را یک ماده عایق با قابلیت گذردهی نسبی ϵ_r بطور یکنواخت فراگرفته است. بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات قرار داده میشود. الف) نشان دهید که چگالی سطحی بارهای پلاریزاسیون القایی روی سطح عایق عبارت است از:

$$\rho_{ps} = -\frac{Q(\epsilon_r - 1)d}{2\pi(\epsilon_r + 1)(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

و چگالی حجمی بارهای پلاریزاسیون صفر است.

ب) نشان دهید که شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق ($z < -d$) همانند میدان حاصل از یک بار نقطه‌ای به مقدار $2Q/(ε_r + 1)$ است که در مبدأ مختصات واقع باشد.

ج) نشان دهید که شدت میدان الکتریکی در ناحیه $z > -d$ همانند میدانی است که از بار نقطه‌ای Q در مبدأ مختصات و یک بار نقطه‌ای تصویر که مقداری برابر $-Q(ε_r - 1)/(ε_r + 1)$ داشته و در نقطه $(0, 0, -2d)$ واقع باشد حاصل میشود.

۲۲-۳ قابلیت گذردگی عایق بین صفحات یک خازن از یک صفحه تا صفحه دیگر بطور خطی از $ε_1$ تا $ε_2$ تغییر میکند.

الف) نشان دهید که ظرفیت این خازن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C = \frac{A(ε_2 - ε_1)}{d \ln(ε_2/ε_1)}$$

که d فاصله دو صفحه و A مساحت هر یک از صفحات است.

ب) چگالی حجمی بار پلاریزاسیون در عایق خازن را بدست آورید.

۲۳-۳ بار الکتریکی q در کره‌ای به شعاع a بطور یکنواخت توزیع شده است. نشان دهید که انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار وقتی با استفاده از روابط (۳-۸۷) و (۳-۹۴) محاسبه شود نتیجه یکسان $W_e = 3q^2/(20πε_0 a)$ را می‌دهد.

۲۴-۳ از سه سطح کره‌ای هم‌مركز، کره بیرونی به شعاع c و کره درونی به شعاع a زمین شده‌اند و روی کره میانی به شعاع b بار q قرار داده شده است. نشان دهید که انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم برابر است با:

$$W_e = \frac{q^2}{4πε_0} \frac{(c-b)(b-a)}{b^2(c-a)}$$

۲۵-۳ از سه کره هادی هم‌مركز، کره میانی به شعاع b زمین گردیده، روی کره درونی به شعاع a بار مثبت Q_1 و روی کره بیرونی به شعاع c بار منفی $-Q_2$ قرار داده شده است. فضای اطراف کره‌ها در همه جا خلاء است. مطلوب است:

الف) محاسبه پتانسیل در تمام نقاط فضا،

ب) انرژی الکتریکی ذخیره شده در این سیستم.

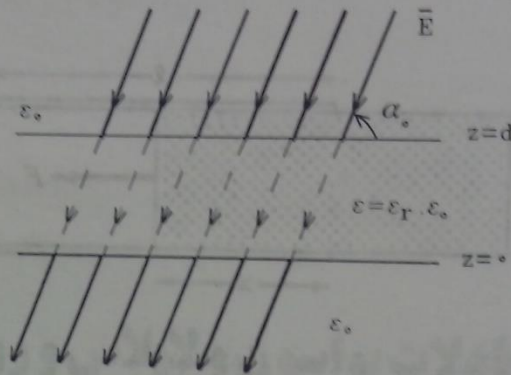
۲۶-۳ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت $ρ_s$ روی یک سطح کره‌ای به شعاع a توزیع شده است.

چه مقدار کار باید انجام گیرد تا توزیع بار متراکم شده و روی سطح کره‌ای به شعاع b ($b < a$) قرار گیرد؟ توزیع جدید یکنواخت فرض میشود.

۲۷-۳ میدان الکتریکی یکنواختی با شدت \vec{E}_0 تحت زاویه α_0 ، مطابق شکل (م-۳-۲۷)، به یک جسم عایق محدود به صفحات $z=d$ و $z=0$ اعمال می‌گردد. قابلیت گذردگی عایق $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ است. فضای اطراف عایق خلاء می‌باشد. مطلوب است محاسبه:

الف) میدانهای کل \vec{D} و \vec{E} در تمام نقاط فضا،

ب) چگالی سطحی بارهای القایی مقید در $z=d$ و $z=0$.



شکل (م-۳-۲۷)

۲۸-۳ در مثال (۳-۴) نشان دهید که میدان الکتریکی در خارج محفظه کروی هادی بستگی به موقعیت بار نقطه‌ای Q در درون محفظه ندارد. به عبارت دیگر اگر بار Q در هر نقطه دلخواهی در درون محفظه کروی باشد، میدان \vec{E} در خارج آن کماکان برابر $\hat{a}_r (Q/4\pi\epsilon r^2)$ میباشد.

۲۹-۳ سیستمی مرکب از دو هادی کامل که فضای بین آنها را ماده‌ای با قابلیت گذردگی ϵ و رسانایی σ پر کرده باشد، مطابق شکل (۳-۱۸)، را در نظر بگیرید. چنین سیستمی هم دارای مقاومت و هم دارای ظرفیت است. نشان دهید که رابطه زیر بین مقاومت R و ظرفیت C برقرار میباشد. ϵ و σ مقادیر ثابتی فرض میشوند.

$$RC = \epsilon/\sigma$$

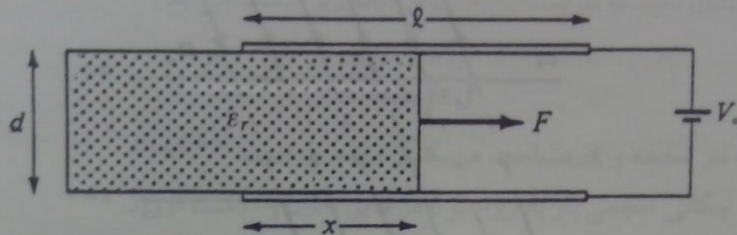
۳۰-۳ بار الکتریکی Q روی سطح یک کره هادی به شعاع a توزیع شده است. مطلوب است محاسبه نیرویی که سعی در منبسط نمودن کره هادی دارد. آیا مثبت یا منفی بودن بار Q تأثیری در

جهت این نیرو دارد؟

۳۱-۳ در یک خازن با صفحات موازی، بنحوی که در شکل (م-۳-۳۱) نشان داده شده است، بخشی از عایق بیرون از ناحیه بین دو صفحه قرار داده میشود. به خازن اختلاف پتانسیل ثابت V_0 اعمال میشود. نشان دهید که به جسم عایق نیرویی برابر F اعمال می‌گردد که عبارت است از:

$$F = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1) a V_0^2}{2d}$$

در این رابطه d ضخامت، a عرض و ϵ_r قابلیت گذردهی نسبی عایق میباشد.



شکل (م-۳-۳۱)

۳۲-۳ یک خازن متشکل از دو سطح هادی کروی متحدالمرکز و به شعاعهای a و b مفروض است. فضای بین دو کره هادی محدود به $a < r < c$ را عایقی با قابلیت گذردهی ϵ_r اشغال کرده است. بقیه فضای بین دو کره محدود به $c < r < b$ خلاء فرض میشود. بارهای Q و $-Q$ روی هادیها قرار داده می‌شوند. مطلوب است محاسبه نیرویی که به هادی بیرونی وارد می‌آید.



معادلات پواسون و لاپلاس و روشهای حل آنها

مسائلی که تا کنون مورد مطالعه قرار داده‌ایم به محاسبه میدانهای الکتریکی ساکن که از توزیعیهای بار معلومی ناشی می‌شوند محدود بوده است. در این مسائل به علت وجود تقارنهای گوناگون یا ویژگیهای دیگری در توزیع بار الکتریکی، تغییرات میدانها اغلب تابعی از یک مختصه بوده و لذا محاسبات میدانها به روش تحلیلی عموماً از نوعی سهولت برخوردار بوده است. در پاره‌ای مسائل ممکن است توزیع بار الکتریکی در بدو امر نامعلوم باشد و لذا بکار بستن روشهای مبتنی بر قانون کولمب، که تا کنون آموخته‌ایم، عملی نخواهد بود. به عنوان مثال وقتی یک جسم هادی در معرض میدان الکتریکی اولیه معلومی قرار بگیرد، توزیع بارهای القایی روی سطح جسم هادی ممکن است قبل از حل کامل مسأله به سهولت قابل محاسبه نباشد. به عبارت دیگر، توزیع بار الکتریکی خود به عنوان مجهولی از مسأله مطرح است. مورد مهم دیگر مربوط به سیستمهایی است که متشکل از تعدادی هادی با پتانسیلهای معلوم می‌باشند و مطالعه آنها نیازمند روشهای جدیدی است. در این فصل دو روش جدید برای مطالعه میدانهای الکتریکی ساکن می‌آموزیم. روش اول مبتنی بر معادلات لاپلاس و پواسون است که از نوع دیفرانسیل پاره‌ای بوده و بر تابع

پتانسیل حاکم می‌باشند. در این روش، حل مسأله منوط به یافتن پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر پتانسیل که شرایط مرزی معینی را برآورده سازد می‌شود. بخش عمده مطالب این فصل به حل معادله لاپلاس در دستگاههای مختلف مختصات اختصاص می‌یابد. روش دوم موسوم به روش تصویر است و برای مطالعه سیستمهایی بکار میرود که شامل توزیعیهای بار معلومی در مجاورت اجسام هادی باشند. تأکید میشود که تابع پتانسیل صرفنظر از اینکه با استفاده از چه روشی بدست آمده باشد (روش تصویر، روش مبتنی بر قانون کولمب یا روشهای دیگر) همواره پاسخ معادله پواسون یا لاپلاس خواهد بود.

۴-۱) معادلات پواسون و لاپلاس

چنانچه در رابطه $\nabla \cdot \bar{E} = \rho / \epsilon$ ، بردار \bar{E} را با $-\nabla V$ جایگزین کنیم و بخاطر آوریم دیورژانس گرادینان یک کمیت اسکالر را لاپلاسیان آن کمیت نامیده و با ∇^2 نمایش می‌دهند، داریم:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon}$$

یا:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-4)$$

معادله اخیر را معادله پواسون نامند. در این معادله که از نوع دیفرانسیل پاره‌ای است، ρ چگالی حجمی بار الکتریکی آزاد در محیطی با قابلیت گذردهی ϵ است. یادآوری می‌شود که قابلیت گذردهی ϵ در استخراج رابطه (۴-۱) ثابت فرض شده است. در صورتی که $\rho = 0$ باشد، رابطه (۴-۱) به شکل ساده‌تر زیر در می‌آید:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2-4)$$

معادله اخیر به نام معادله لاپلاس شناخته می‌شود. معادلات لاپلاس و پواسون معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هستند که توأم با شرایط مرزی معینی باید حل شوند. شرایط مرزی عموماً بصورت پتانسیلهای معلومی روی سطوح هادی و صفر بودن پتانسیل در بینهایت برای توزیعیهای بار محدود بیان می‌شوند. قبل از آنکه به بررسی روشهای حل این معادلات بپردازیم، قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم مبنی بر اینکه اگر جوابی یافت شود که در معادله لاپلاس یا پواسون صدق نماید و شرایط مرزی را نیز برآورده سازد، آن جواب تنها جواب ممکن مسأله است. با اثبات این قضیه، که آن را قضیه یگانگی جواب می‌نامیم، میتوان اطمینان حاصل کرد که هر گاه جوابی به هر ترتیب، حتی از روی

حدس، برای معادله لاپلاس و یا پواسون بیابیم که شرایط مرزی را نیز برآورده سازد، آن جواب تنها جواب ممکن مسأله است و اگر جوابهای دیگری به طرق دیگر یافت شوند با این جواب مساوی خواهند بود.

۲-۴ قضیه یگانگی جواب

فرض کنید برای یک مسأله با شرایط مرزی معلوم دو جواب V_1 و V_2 یافت شده باشند. هر یک از جوابها باید در معادله پواسون (یا در معادله لاپلاس اگر $\rho = 0$ باشد) صدق کند، لذا میتوان نوشت:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۳-۴ \text{ الف})$$

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۳-۴ \text{ ب})$$

اکنون توجه خود را به تفاوت V_1 و V_2 یعنی $V_d = V_1 - V_2$ معطوف نموده و لاپلاسیان V_d را محاسبه می‌کنیم:

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 (V_1 - V_2) = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} - \left(-\frac{\rho}{\epsilon}\right) = 0 \quad (۴-۴)$$

از طرف دیگر چون V_1 و V_2 هر دو جواب یک مسأله فرض می‌شوند باید شرایط مرزی یکسانی را برآورده سازند. به عبارت دیگر باید $[V_1]_S = [V_2]_S$ باشد که S بیانگر یک سطح مرزی است. آنگاه برای V_d میتوان نوشت:

$$[V_d]_S = [V_1 - V_2]_S = [V_1]_S - [V_2]_S = 0 \quad (۵-۴)$$

حال با استفاده از اتحاد برداری $\nabla \cdot (\bar{A} + \bar{A} \cdot \nabla V) = V \nabla \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \nabla V$ ، میتوان با جایگزین نمودن V با V_d و \bar{A} با ∇V_d چنین نوشت:

$$\nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + |\nabla V_d|^2 \quad (۶-۴)$$

با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۶-۴) در حجم V که محدود به سطح S باشد، داریم:

$$\int_V \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) dv = \int_V (V_d \nabla^2 V_d) dv + \int_V |\nabla V_d|^2 dv \quad (۷-۴)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس انتگرال سمت چپ رابطه (۷-۴) را به یک انتگرال سطح تبدیل

می‌کنیم:

$$\int_V \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) dv = \oint_S (V_d \nabla V_d) \cdot d\bar{s} = 0 \quad (۸-۴)$$

سمت راست رابطه (۸-۴) به این دلیل صفر است که V_d ، طبق رابطه (۵-۴)، روی سطح S برابر صفر می‌باشد. حال با توجه به اینکه $\nabla^2 V_d = 0$ است، انتگرال اول سمت راست رابطه (۷-۴) نیز صفر است و در نتیجه:

$$\int_V |\nabla V_d|^2 dv = 0 \quad (۹-۴)$$

اما از آنجا که $|\nabla V_d|^2$ همه جا مثبت است، برقراری رابطه (۹-۴) فقط وقتی امکان پذیر است که ∇V_d در همه جای حجم V برابر صفر باشد. بنابراین:

$$\nabla V_d = 0$$

$$V_d = V_1 - V_2 = \text{مقدار ثابت} \quad (۱۰-۴)$$

اما چون V_d روی سطح مرزی صفر است، مقدار ثابت در سمت راست رابطه (۱۰-۴) نیز باید برابر صفر باشد و در نتیجه در کلیه نقاط حجم مورد نظر $V_1 = V_2$ است و قضیه یگانگی جواب اثبات شده است.

۴-۳) معادله لاپلاس و حل آن در دستگاه‌های مختلف مختصات

دسته مهمی از مسائل میدانهای الکتریکی ساکن که ممکن است دارای کاربرد عملی نیز باشد مربوط است به یافتن پتانسیل ناشی از سیستمی از بارهای الکتریکی که به سطوح اجسام هادی محدود می‌شوند. در این دسته مسائل، توزیع بار روی سطوح هادیا، پتانسیل هادیا و یا ترکیبی از آن دو معلوم بوده و هدف عبارت است از یافتن پتانسیل و آنگاه میدان الکتریکی در ناحیه‌ای بدون بار از فضا که به هادیا محدود گردد. واضح است که پتانسیل در ناحیه بدون بار در معادله لاپلاس صدق میکند و بنابراین حل مسأله موکول به یافتن جواب معادله لاپلاس تحت شرایط مرزی معین می‌شود. ابتدا حل معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات مستطیلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

■ حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات مستطیلی

با استفاده از رابطه (۱-۱۳۱)، معادله لاپلاس در دستگاه مختصات مستطیلی بصورت زیر نوشته

می شود:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (11-4)$$

یک روش که اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بکار گرفته می‌شود به روش جداسازی متغیرها موسوم است. در این روش تابع V بصورت حاصلضرب سه تابع $X(x)$ ، $Y(y)$ و $Z(z)$ ، که برترتیب توابعی فقط از x ، y و z هستند، در نظر گرفته میشود.

$$V(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (12-4)$$

با جایگزین نمودن $V=XYZ$ در معادله لاپلاس داریم:

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + ZX \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (13-4)$$

در رابطه (۱۳-۴) بجای مشتقات جزئی از مشتقات کامل استفاده شده است، زیرا X ، Y و Z هر یک تابعی فقط از یک متغیر است. با تقسیم طرفین رابطه (۱۳-۴) به XYZ معادله لاپلاس به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (14-4)$$

بررسی رابطه (۱۴-۴) نشان میدهد که جملات دوم و سوم در سمت چپ آن مستقل از x هستند و چون مجموع سه جمله در کلیه نقاط باید همواره برابر صفر باشد، جمله اول نیز باید مستقل از x باشد. بنابراین جمله اول برابر مقدار ثابتی خواهد بود:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_1 = \text{مقدار ثابت} \quad (15-4)$$

با استدلالهای مشابهی میتوان نتیجه گرفت که جملات دوم و سوم نیز هر یک باید برابر مقدار ثابتی باشند:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_2 = \text{مقدار ثابت} \quad (16-4)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_3 = \text{مقدار ثابت} \quad (17-4)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0. \quad (18-4)$$

بدین ترتیب مسأله به حل سه معادله دیفرانسیل معمولی درجه دوم با رعایت شرط (۴-۱۸) ساده می‌شود. معادلات (۴-۱۵) تا (۴-۱۷) هر سه مشابه یکدیگرند. لذا کافی است فقط حل یکی از آنها، مثلاً (۴-۱۵)، را مورد بررسی قرار دهیم. جواب این معادله برای هر یک از حالاتی که k_1 صفر، مثبت یا منفی باشد شکل خاصی به خود می‌گیرد. در مسائل یک بعدی، یعنی وقتی که پتانسیل تابعی فقط از یک مختصه، مثلاً x ، بوده و نسبت به مختصات y و z تغییراتی ندارد، همواره $k_1 = 0$ خواهد بود. در این حالت معادله لاپلاس به شکل ساده زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad (4-19)$$

جواب این حالت را میتوان پس از دو بار انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۴-۱۹) بدست آورد.

$$V(x) = Ax + B \quad (4-20)$$

که A و B ضرایب ثابتی هستند و به کمک شرایط مرزی مسأله بدست می‌آیند. در حالاتی که تابع پتانسیل دو بعدی یا سه بعدی باشد، k_1 مقداری مثبت، صفر یا منفی خواهد داشت (نوع مسأله مثبت، صفر یا منفی بودن k_1 را تعیین میکند). جواب مربوط به حالت $k_1 = 0$ را در بالا ملاحظه نمودیم. در صورتی که $k_1 \neq 0$ باشد، جهت سهولت در انجام محاسبات $k_1 = \pm k^2$ در نظر گرفته می‌شود، آنگاه معادله (۴-۱۵) و انواع جوابهای آن بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \pm k^2 X = 0$$

$$X(x) = \begin{cases} A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx) & k_1 = -k^2 < 0 \quad (4-21 \text{ الف}) \\ A_2 e^{kx} + B_2 e^{-kx} & k_1 = k^2 > 0 \quad (4-21 \text{ ب}) \end{cases}$$

یادآوری می‌شود که در حالت $k_1 > 0$ جواب را میتوان به شکل توابع هذلولی نیز نوشت، یعنی:

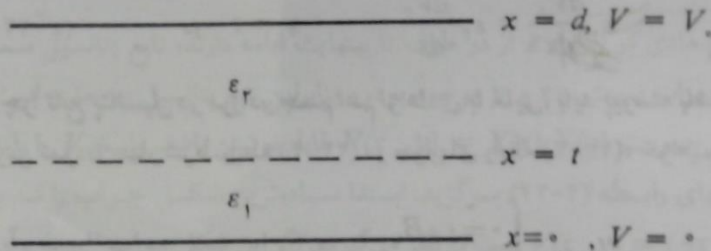
$$X(x) = A_3 \sinh(kx) + B_3 \cosh(kx) \quad k_1 > 0 \quad (4-21 \text{ ج})$$

بدین ترتیب در یک مسأله دو بعدی تابع پتانسیل $V(x, y)$ با توجه به شرط $k_1 + k_2 = 0$ به یکی از شکلهای زیر نوشته خواهد شد:

$$V(x, y) = \begin{cases} (Ax+B)(Cy+D) & k_1 = -k_2 = 0 \quad (\text{الف-۲۲-۴}) \\ (A' \sin kx + B' \cos kx)(C' e^{ky} + D' e^{-ky}) & k_1 = -k_2 = -k^1 < 0 \quad (\text{ب-۲۲-۴}) \\ (A'' e^{kx} + B'' e^{-kx})(C'' \sin ky + D'' \cos ky) & k_1 = -k_2 = k^1 > 0 \quad (\text{ج-۲۲-۴}) \end{cases}$$

در اینجا ذکر این نکته مهم ضروری است که شکلهای مختلف پاسخ بدست آمده برای تابع پتانسیل در رابطه (۲۲-۴) بر اساس این فرض بوده است که تابع پتانسیل به حاصل ضرب دو تابع $X(x)$ و $Y(y)$ تفکیک پذیر بوده است و این فرض ممکن است همیشه فرض صحیحی نباشد. برای کسب آشنایی بیشتر با روش حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات مستطیلی به ذکر چند مثال می پردازیم.

مثال (۱-۴) ناحیه محصور بین دو صفحه هادی $x=0$ و $x=d$ از دو ماده عایق با قابلیت های گذردهی ϵ_1 برای $0 < x < t$ و ϵ_2 برای $t < x < d$ ، مطابق شکل (۱-۴)، اشغال شده است. پتانسیل صفحه $x=0$ برابر صفر و پتانسیل صفحه $x=d$ برابر V_0 است. پتانسیل را در نواحی عایق بین دو صفحه هادی تعیین نمایید.



شکل (۱-۴) دو صفحه هادی با پتانسیلهای صفر و V_0 با دو ماده عایق با قابلیت های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 بین آنها

حل:

به وضوح میتوان دریافت که پتانسیل در جهات y و z تغییراتی نداشته و فقط تابعی از متغیر x است. لذا، شکل کلی جواب همان شکل رابطه (۲۰-۴) خواهد بود. اما چون قابلیت های گذردهی در دو ناحیه عایق $0 < x < t$ و $t < x < d$ متفاوت هستند، توابع پتانسیل در این دو ناحیه نیز باید متفاوت باشند. از اینرو ضرایب ثابت متفاوتی را در دو ناحیه اختیار می کنیم:

$$V_1 = A_1 x + B_1 \quad 0 < x < t \quad (\text{الف-۲۳-۴})$$

$$V_2 = A_2 x + B_2 \quad t < x < d \quad (\text{ب-۲۳-۴})$$

شرایط مرزی مشخص شده در مسأله عبارتند از:

$$V_1 = 0 \quad \text{در } x = 0 \quad (\text{الف-۲۴-۴})$$

$$V_2 = V_0 \quad \text{در } x = d \quad (\text{ب-۲۴-۴})$$

اما برای تعیین چهار ضریب مجهول A_1, B_1, A_2, B_2 به دو شرط دیگر نیاز است. بدون تردید این دو شرط را باید در مرز دو ناحیه عایق، یعنی در $x=t$ ، جستجو کرد. با توجه به اینکه پتانسیل و مؤلفه عمودی بردار \vec{D} در مرز دو عایق پیوسته‌اند میتوان نوشت:

$$V_1 = V_2 \quad \text{در } x = t \quad (\text{ج-۲۴-۴})$$

و:

$$D_{x1} = D_{x2} \quad \text{در } x = t$$

یا:

$$\epsilon_1 \frac{dV_1}{dx} = \epsilon_2 \frac{dV_2}{dx} \quad \text{در } x = t \quad (\text{د-۲۴-۴})$$

سؤال: چرا تابع پتانسیل در مرز دو جسم اعم از هادی یا عایق، باید پیوسته باشد؟
با جایگزین نمودن چهار شرط رابطه (۲۴-۴) در جوابهای رابطه (۲۳-۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 0 = 0 + B_1 \\ V_0 = A_2 d + B_2 \\ A_1 t + B_1 = A_2 t + B_2 \\ \epsilon_1 A_1 = \epsilon_2 A_2 \end{cases} \quad (25-4)$$

پس از حل دستگاه معادلات اخیر برای ضرایب مجهول و جایگزین نمودن نتایج در جوابهای رابطه (۲۳-۴)، پتانسیل در دو ناحیه عایق به شرح زیر خلاصه میشود:

$$V_1 = \frac{\epsilon_2 x}{\epsilon_2 t + \epsilon_1 (d-t)} V_0 \quad 0 < x < t \quad (\text{الف-۲۶-۴})$$

$$V_2 = \frac{\epsilon_2 t + \epsilon_1 (x-t)}{\epsilon_2 t + \epsilon_1 (d-t)} V_0 \quad t < x < d \quad (\text{ب-۲۶-۴})$$

□

مثال (۲-۴) شکل (۲-۴) سطح مقطع محفظه‌ای متشکل از سه سطح هادی را نشان میدهد. پتانسیل

عبارت دیگر، جهت اجتناب از نامحدود شدن پتانسیل در $\theta=0$ و $\theta=\pi$ باید D را برابر صفر فرض نمود. در حالتی که تقارن محوری موجود باشد تابع پتانسیل مستقل از φ بوده و مسأله در واقع به حالت دو بعدی ساده می شود. جواب معادله لاپلاس در این حالت با قرار دادن $m=0$ در رابطه (۷۸-۴) بصورت زیر نوشته می شود:

$$V(r, \theta) = [Ar^n + B r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad n \neq 0 \quad (۸۰-۴)$$

در صورتی که $n=0$ باشد، تابع پتانسیل عبارت می شود از:

$$V(r, \theta) = \left(A + \frac{B}{r}\right) \left[C + D \ln \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (۸۱-۴)$$

در رابطه (۸۰-۴)، $P_n(\cos \theta) = P_n^*(\cos \theta)$ تابع لژاندر نامیده می شود. تعدادی از چند جمله ایهای لژاندر برای چند مقدار n به شرح زیر می باشند:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (1 + 3 \cos 2\theta)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8} (3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta) \quad (۸۲-۴)$$

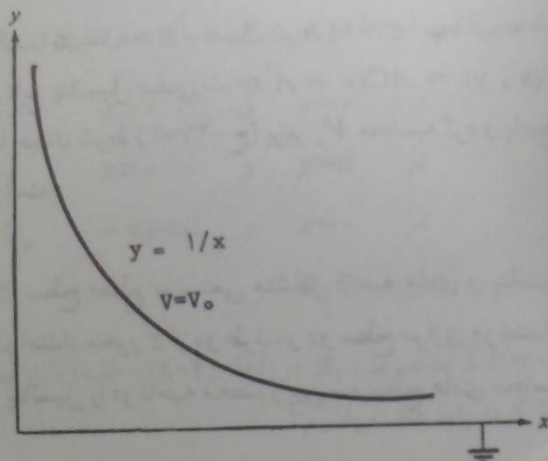
مثال (۹-۴) کره ای از جنس عایق به شعاع a و قابلیت گذردهی نسبی ϵ_r ، مطابق شکل (۹-۴-الف)، در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_0 = E_0 \hat{a}_z$ قرار می گیرد. میدان الکتریکی را در درون و فضای اطراف کره عایق تعیین نمایید.
حل:

به علت وجود تقارن محوری، تابع پتانسیل مستقل از φ بوده و لذا جواب شکل رابطه (۸۰-۴) را دارا می باشد. پتانسیل در فضای اطراف کره را با V^o و در درون آنرا با V^i نشان می دهیم. V^o و V^i هر دو شکل کلی رابطه (۸۰-۴) را دارا هستند، لذا میتوان نوشت:

$$V^o = [A_1 r^n + B_1 r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad r \geq a \quad (۸۳-۴)$$

$$V^i = [A_1' r^n + B_1' r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad r \leq a \quad (۸۴-۴)$$

برای تعیین ضرایب مجهول از خواص میدان در $r=\infty$ ، شرایط مرزی در $r=a$ و محدود بودن



شکل (۲-۴) سیستمی متشکل از نیم صفحات هادی $x=0$ و $y=0$ با پتانسیل صفر و سطح هادی $y=x^{-1}$ با پتانسیل V_0 . سطح $y=x^{-1}$ برابر V_0 است و دو سطح دیگر زمین شده‌اند. سطوح هادی در امتداد محور z از دو طرف تا بینهایت ادامه دارند. تابع پتانسیل را در فضای محصور بین سه هادی تعیین نمایید.

حل:

چون سطوح هادی در امتداد z از دو طرف تا بینهایت ادامه دارند، تابع پتانسیل مستقل از z می‌باشد. لیکن تغییرات نسبت به x و y موجود بوده و بنابراین تابع پتانسیل دو بعدی است. حال با فرض اینکه تابع بصورت $V(x, y) = X(x) Y(y)$ قابل نوشتن باشد. پاسخ V را باید همانند یکی از شکلهای رابطه (۲۲-۴) برگزید. ابتدا ساده‌ترین شکل جواب را که بصورت $V(x, y) = (Ax+B)(Cy+D)$ است در نظر می‌گیریم. اگر این شکل جواب قادر به برآوردن کلیه شرایط مرزی مسأله باشد، انتخاب شکل جواب صحیح بوده است، در غیر اینصورت باید شکلهای دیگر جواب را برگزید و در صورتی که هیچکدام از شکلهای رابطه (۲۲-۴) مورد قبول واقع نگردید میتوان نتیجه گرفت که حل مسأله به روش جداسازی متغیرها در دستگاه مختصات مستطیلی میسر نیست. (یادآوری می‌شود که جوابهای مندرج در رابطه (۲۲-۴) به ازای $k \neq 0$ ممکن است تنها جمله عمومی پاسخ V را که بصورت یک سری است بیان کنند.) شرایط مرزی در این مسأله عبارتند از:

$$V=0 \quad \text{در} \quad x=0 \quad \text{و} \quad y>0 \quad (۲۷-۴ \text{ الف})$$

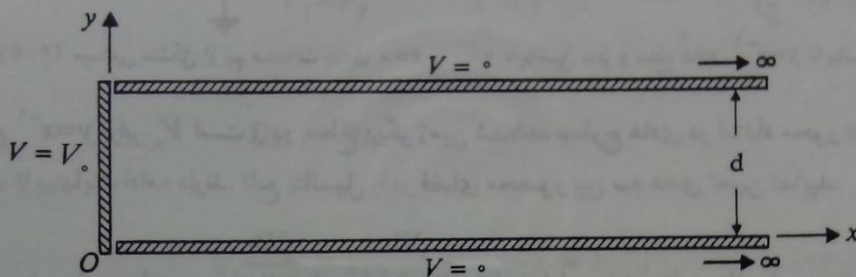
$$V=0 \quad \text{در} \quad x>0 \quad \text{و} \quad y=0 \quad (۲۷-۴ \text{ ب})$$

$$V=V_0 \quad \text{در} \quad y=x^{-1} \quad \text{و} \quad x>0 \quad \text{و} \quad y>0 \quad (۲۷-۴ \text{ ج})$$

اعمال شرط (۲۷-۴ الف) نتیجه $B=0$ و اعمال شرط (۲۷-۴ ب) نتیجه $D=0$ را به دنبال دارد. با استفاده از این نتایج تابع پتانسیل بصورت $V(x, y) = ACxy = A'xy$ خلاصه می‌گردد. ضریب A' را میتوان با اعمال شرط (۲۷-۴ ج) برابر V_0 محاسبه کرد و پاسخ مطلوب را بصورت $V(x, y) = V_0 xy$ نوشت.

□

مثال (۳-۴) شکل (۳-۴) سطح مقطع سیستمی متشکل از سه هادی و پتانسیل هر سطح را نشان می‌دهد. هر سه سطح در امتداد محور z از دو طرف و دو سطح موازی در امتداد x و در جهت مثبت تا بینهایت ادامه دارند. پتانسیل را در ناحیه محصور بین سه سطح هادی محاسبه نمایید.



شکل (۳-۴) سیستمی متشکل از دو نیم صفحه هادی موازی با پتانسیل صفر و سطح هادی $x=0$ عمود و محدود به آنها با پتانسیل V_0 .

حل:

نظر به اینکه سطوح هادی در امتداد محور z از دو طرف تا بینهایت ادامه دارند، تابع پتانسیل مستقل از z میباشد. بنابراین تابع پتانسیل دو بعدی بوده و پاسخ آن را میتوان یکی از شکلهای مندرج در رابطه (۲۲-۴) در نظر گرفت. اگر همانند مثال قبل با ساده‌ترین جواب شروع کنیم در خواهیم یافت که سعی ما در یافتن جوابی که تمام شرایط مرزی را برآورده سازد بجایی نخواهد رسید. لذا باید یکی از پاسخهای متناظر با $k \neq 0$ را در نظر بگیریم. بالاخره چون پتانسیل در امتداد y دارای دو مقدار صفر است معقول‌تر آن است که پاسخ برگزیده شده بر حسب y سینوسی باشد، زیرا توابع سینوسی میتوانند دارای صفرهای متعددی باشند. بنابراین میتوان نوشت:

$$Y(y) = A_1 \sin ky + B_1 \cos ky \quad (\text{الف-۲۸-۴})$$

$$X(x) = A_2 e^{kx} + B_2 e^{-kx} \quad (\text{ب-۲۸-۴})$$

که A_1, A_2, B_1, B_2 و k ضرایب ثابتی هستند که باید محاسبه گردند. برای محاسبه این ضرایب

از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم. شرایط مرزی در این مسأله عبارتند از:

$$V=0 \quad x>0 \quad \text{و} \quad y=0 \quad \text{در} \quad (4-29-الف)$$

$$V=0 \quad x>0 \quad \text{و} \quad y=d \quad \text{در} \quad (4-29-ب)$$

$$V=V_0 \quad 0<y<d \quad \text{و} \quad x=0 \quad \text{در} \quad (4-29-ج)$$

$$V=0 \quad x \rightarrow \infty \quad \text{در} \quad (4-29-د)$$

برای آنکه در $V=0, y=0$ گردد ضریب B_1 در رابطه (4-29-الف) باید صفر باشد. همچنین برای آنکه در $V=0, y=d$ گردد باید داشته باشیم:

$$kd = n\pi \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4-30)$$

سؤال: آیا در نظر گرفتن مقادیر منفی و صحیح برای n ضرورت دارد؟ (چرا؟)
بنابراین:

$$Y = A_1 \sin \frac{n\pi y}{d} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4-31)$$

مقدار $n=0$ باید حذف شود، زیرا در غیر اینصورت پتانسیل همه جا صفر خواهد بود. حال به تابع X برمیگردیم که اکنون بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$X = A_2 e^{n\pi x/d} + B_2 e^{-n\pi x/d} \quad (4-32)$$

برای آنکه شرط (4-29-د) برقرار باشد، باید $A_2=0$ باشد. اکنون تابع پتانسیل در مجموع بصورت زیر خلاصه میشود:

$$V'(x, y) = A \sin \frac{n\pi y}{d} e^{-n\pi x/d} \quad (4-33)$$

که $A=A_1 B_2$ ضریب ثابت جدیدی است.

جوابی که تاکنون بدست آورده‌ایم شرایط مندرج در روابط (4-29-الف)، (4-29-ب) و (4-29-د) را برآورده می‌سازد، ولی در شرط (4-29-ج) صدق نمی‌کنند. به منظور رفع این مشکل توجه خود را به این نکته معطوف می‌داریم که چون سمت راست رابطه (4-33) به ازای هر یک از مقادیر $n=1, 2, \dots$ جواب معادله لاپلاس است، طبق خاصیت معادلات دیفرانسیل خطی، ترکیب خطی این جوابها نیز جواب معادله خواهد بود. از اینرو جواب نهایی را به شکل یک سری

بینهایت بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{d} e^{-n\pi x/d} \quad (34-4)$$

برای محاسبه ضرایب C_n از شرط مرزی (۴-۲۹-ج) و خواص سری فوریه استفاده می‌کنیم:

$$V(0, y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{d} \quad (35-4)$$

سری بینهایت در رابطه (۴-۳۵) در حقیقت بیان سری فوریه تابع متناوب $f(y)$ است که دوره تناوب آن $2d$ بوده و مقداری برابر V_0 در فاصله $0 < y < d$ و برابر $-V_0$ در فاصله $-d < y < 0$ دارد. لذا برای محاسبه C_n میتوان در اینجا روش تعیین ضرایب سری فوریه را بکار برد. با ضرب طرفین رابطه (۴-۳۵) در $\sin(m\pi y/d)$ و انتگرال گرفتن از صفر تا d داریم:

$$\int_0^d V_0 \sin \frac{m\pi y}{d} dy = \int_0^d \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{d} \sin \frac{m\pi y}{d} dy$$

انتگرال سمت چپ عبارت میشود از:

$$\int_0^d V_0 \sin \frac{m\pi y}{d} dy = \begin{cases} 2dV_0/m\pi & \text{فرد } m \\ 0 & \text{زوج } m \end{cases} \quad (36-4)$$

و انتگرال سمت راست برابر میشود با:

$$\int_0^d \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{d} \sin \frac{m\pi y}{d} dy = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ C_n \frac{d}{2} & m = n \end{cases} \quad (37-4)$$

پس از ترکیب روابط (۴-۳۶) و (۴-۳۷)، مقادیر ضرایب C_n به شرح زیر خلاصه میشوند:

$$C_n = \begin{cases} 4V_0/n\pi & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases} \quad (38-4)$$

سرانجام تابع پتانسیل در نقطه (x, y, z) بصورت زیر نوشته میشود:

$$V(x, y, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi y}{d} e^{-n\pi x/d} \quad (39-4)$$

□

مسائل سه بعدی را که در آنها پتانسیل تابعی از هر سه متغیر x و y و z است میتوان مشابه حالت دوبعدی مورد مطالعه قرار داد. حل مثال جداگانه‌ای از حالت سه بعدی معادله لاپلاس را طی مسأله (۴-۲۲) به عهده دانشجویان واگذار می‌کنیم.

■ حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای

با استفاده از رابطه (۱-۱۳۳)، معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (4-40)$$

ابتدا حالات یک بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر پتانسیل تابعی فقط از یک مختصه (r, φ, z) باشد، جواب معادله لاپلاس، طی دو بار انتگرال گرفتن، به سهولت بدست می‌آید. بعنوان مثال وقتی که $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ باشد، پتانسیل تابعی فقط از r بوده و معادله لاپلاس بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad (4-41)$$

پس از دو بار انتگرال گرفتن از طرفین این رابطه داریم:

$$V = A \ln r + B \quad (4-42)$$

که A و B ضرایب ثابتی هستند.

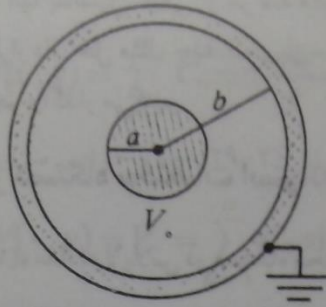
مثال (۴-۴) مطلوب است تعیین تغییرات پتانسیل در ناحیه بین دو هادی یک کابل هم محور به طول بینهایت که در آن پتانسیل هادی درونی V_0 و پتانسیل هادی بیرونی صفر باشد. شکل (۴-۴) سطح مقطع کابل و ابعاد آن را نشان می‌دهد.

حل:

بدلیل وجود تقارن نسبت به φ و بینهایت بودن طول کابل در راستای محور z ، پتانسیل تابعی فقط از r بوده و لذا شکل رابطه (۴-۴۲) را خواهد داشت. برای تعیین ضرایب ثابت از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

$$0 = A \ln b + B$$

$$V_0 = A \ln a + B$$



شکل (۴-۴) سطح مقطع کابل هم محور تحت ولتاژ V_0

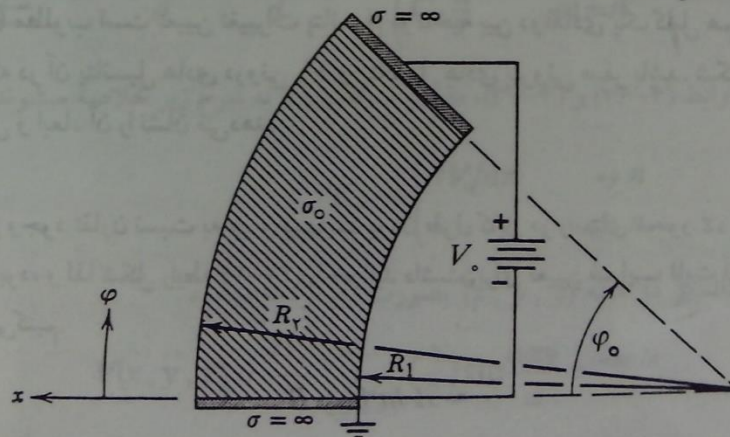
پس از حل این دو معادله برای A و B و جایگزین نمودن نتایج در رابطه (۴-۴۲)، جواب بصورت زیر خلاصه میگردد:

$$V = V_0 \ln\left(\frac{r}{b}\right) / \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (۴-۴۳)$$

□

در صورتی که پتانسیل تابعی فقط از φ باشد، جواب معادله لاپلاس بصورت $V = A'\varphi + B'$ و چنانچه پتانسیل تابعی فقط از z باشد جواب بصورت $V = A''z + B''$ خواهد بود. حالت اخیر همانند حالت یک بعدی در دستگاه مختصات مستطیلی است.

مثال (۴-۵) صفحه‌ای از جنس هادی با رسانایی σ_0 و ضخامت کم، مطابق شکل (۴-۵)، بریده شده و اختلاف پتانسیل V_0 به دو طرف آن اعمال میگردد. تابع پتانسیل را در این صفحه نازک و همچنین مقاومت آن را تعیین نمایید.



شکل (۴-۵) صفحه‌ای نازک از جنس هادی با رسانایی σ_0 تحت ولتاژ V_0

(۴-۵)

توجه
معادله لاپلاس
تست (۴-۵)

حل:

به دلیل ناچیز بودن ضخامت صفحه و وجود لایه‌هایی از جنس هادی کامل ($\sigma = \infty$) در امتدادهای $\varphi = 0$ و $\varphi = \varphi_0$ ، پتانسیل در صفحه نازک تغییراتی نسبت به r و z نداشته و فقط تابعی از φ است. بنابراین تابع پتانسیل را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$V = A\varphi + B \quad (44-4)$$

شرایط مرزی در این مسأله عبارتند از:

$$V = 0 \quad \text{در} \quad \varphi = 0$$

$$V = V_0 \quad \text{در} \quad \varphi = \varphi_0$$

با اعمال این شرایط در رابطه (۴۴-۴) ضرایب مجهول را برابر $B = 0$ و $A = V_0/\varphi_0$ خواهیم یافت. لذا:

$$V = (V_0/\varphi_0)\varphi \quad (45-4)$$

برای محاسبه مقاومت این صفحه نازک (که ضخامت آنرا برابر Δ فرض میکنیم) کافی است کل جریان گذرنده از صفحه را بدست آوریم. برای این منظور ابتدا \bar{E} ، سپس \bar{J} و آنگاه I را محاسبه می‌کنیم و سرانجام از رابطه $R = V_0/I$ مقدار مقاومت را بدست می‌آوریم.

$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi = -\frac{V_0}{\varphi_0} \frac{1}{r} \hat{a}_\varphi$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} = -\frac{V_0 \sigma}{\varphi_0} \frac{1}{r} \hat{a}_\varphi$$

$$I = \int \bar{J} \cdot d\bar{s} = -\frac{V_0 \sigma}{\varphi_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\Delta} \frac{\hat{a}_\varphi}{r} \cdot (-dr dz \hat{a}_\varphi) = \frac{V_0 \sigma \Delta}{\varphi_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$R = V_0/I = \varphi_0 / (\sigma \Delta \ln \frac{R_2}{R_1}) \quad (46-4)$$

□

توجه کنید که این مثال در واقع همان مثال (۳-۲) در فصل سوم است که به روش مبتنی بر حل معادله لاپلاس مورد بررسی قرار گرفت. بحث جامع‌تری در ارتباط با مقاومت میله خمیده در قسمت (۴-۴) ارائه خواهد شد.

در حالات دو بعدی و سه بعدی، از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله لاپلاس استفاده میکنیم. در حالت دو بعدی، گرچه بسته به اینکه پتانسیل تابعی از کدام دو متغیر باشد جواب معادله شکلهای متفاوتی را بخود میگیرد، لیکن بررسی یک مورد، مثلاً وقتی که پتانسیل تابعی فقط از r و φ باشد، آشنایی و تجربه لازم را برای مطالعه سایر موارد به ما میدهد. بنابراین با فرض اینکه V مستقل از z بوده و بصورت $V = R(r) \Phi(\varphi)$ قابل نوشتن باشد، معادله لاپلاس، پس از جایگزین نمودن V با $R \Phi$ و سپس تقسیم طرفین آن بر $r^2 \Phi$ ، شکل زیر را پیدا میکند:

$$\left[\frac{1}{R} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right) \right] + \left[\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = 0 \quad (47-4)$$

در این معادله هر یک از دو عبارت درون کروشه تابعی فقط از یک متغیر است. بنابراین برای آنکه معادله (47-4) برای جميع مقادیر r و φ صادق باشد این دو عبارت باید برابر مقادیر ثابتی که قرینه یکدیگرند باشند. در نتیجه رابطه (47-4) به دو معادله دیفرانسیل معمولی ساده می شود که عبارتند از:

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) = n^2 \quad (48-4)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2 \quad (49-4)$$

که n^2 ثابت جداسازی است. جوابهای معادلات (48-4) و (49-4) وقتی که $n=0$ و $n \neq 0$ باشد شکلهای متفاوتی را به خود می گیرند:

$$R(r) = \begin{cases} A \ln r + B & n=0 & (\text{الف-50-4}) \\ A' r^n + B' r^{-n} & n \neq 0 & (\text{ب-50-4}) \end{cases}$$

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} C\varphi + D & n=0 & (\text{الف-51-4}) \\ C' \sin n\varphi + D' \cos n\varphi & n \neq 0 & (\text{ب-51-4}) \end{cases}$$

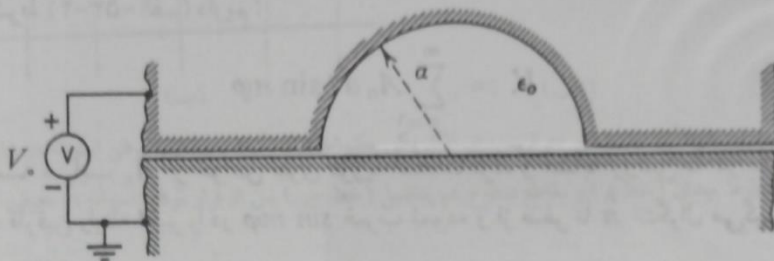
در این جوابها A, B, C, D یا همین ضرایب با علامت پریم ثابتهایی هستند که با اعمال شرایط مرزی محاسبه می شوند. ثابت n ، که در حالت کلی ممکن است عددی صحیح، حقیقی یا حتی موهومی باشد، نیز به کمک شرایط مرزی محاسبه می گردد. پس بطور خلاصه، تابع پتانسیل در دستگاه مختصات استوانه ای دو بعدی (r, φ) ، به فرض تفکیک پذیر بودن به حاصل ضرب توابعی از r و φ ، به شکل کلی زیر (یا ترکیب خطی چنین توابعی بصورت سری محدود یا نامحدود

برای $n \neq 0$ نوشته می شود:

$$V(r, \varphi) = \begin{cases} (A \ln r + B)(C\varphi + D) & n = 0 \quad (\text{الف-۵۲-۴}) \\ (A' r^n + B' r^{-n})(C' \sin n\varphi + D' \cos n\varphi) & n \neq 0 \quad (\text{ب-۵۲-۴}) \end{cases}$$

در اغلب مسائل پاسخی که متوادل با مقادیر صحیح n باشد کفایت میکند و ما نیز به ذکر مثالهایی از این قبیل خواهیم پرداخت.

مثال (۶-۴) شکل (۶-۴) سطح مقطع یک محفظه استوانه‌ای شکل به طول بینهایت را نشان میدهد. اختلاف پتانسیل V_0 را بین سطح هادی استوانه‌ای و هادی دیگر (منطبق بر $y=0$) بوجود می‌آوریم. پتانسیل نقاط درون محفظه را تعیین نمایید.



شکل (۶-۴) سطح مقطع محفظه استوانه‌ای شکل مثال (۶-۴)

حل:

روشن است که پتانسیل تغییراتی نسبت به z نداشته و فقط تابعی از r و φ می‌باشد. تابع پتانسیل را به شکل رابطه (ب-۵۲-۴) فرض می‌کنیم:

$$V(r, \varphi) = (Ar^n + Br^{-n})(C \sin n\varphi + D \cos n\varphi)$$

شرایط مرزی در این مسأله عبارتند از:

$$V = V_0 \quad \text{در} \quad r = a \quad (\text{الف-۵۳-۴})$$

$$V = 0 \quad \text{در} \quad \varphi = 0 \quad (\text{ب-۵۳-۴})$$

$$V = 0 \quad \text{در} \quad \varphi = \pi \quad (\text{ج-۵۳-۴})$$

با اعمال شرط (ب-۵۳-۴) در جواب، نتیجه می‌گیریم که باید $D = 0$ باشد. همچنین اعمال شرط (ج-۵۳-۴) عدد صحیح بودن n را نتیجه می‌دهد. با فرض مثبت بودن n ، اعمال این شرط که در

$r=0$ باید پتانسیل محدود باشد، نتیجه $B=0$ را به دنبال خواهد داشت. بدین ترتیب جواب به شکل زیر ساده می شود:

$$V(r, \varphi) = A' r^n \sin n\varphi \quad (54-4)$$

که $A' = AC$ ثابت جدیدی است. جوابی که تا کنون بدست آورده ایم در شکل فعلی اش نمی تواند شرط (۴-۵۳-الف) را برآورده سازد، از اینرو شکل نهایی جواب را بصورت سری بینهایت زیر در نظر می گیریم:

$$V(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\varphi \quad (55-4)$$

با اعمال شرط (۴-۵۳-الف) داریم:

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \sin n\varphi$$

برای محاسبه ضرایب A_n از خواص سری فوریه استفاده کرده و مشابه روشی که در مثال (۴-۳) بکار رفت طرفین رابطه اخیر را در $\sin m\varphi$ ضرب نموده و از صفر تا π انتگرال می گیریم. نتیجه عبارت است از:

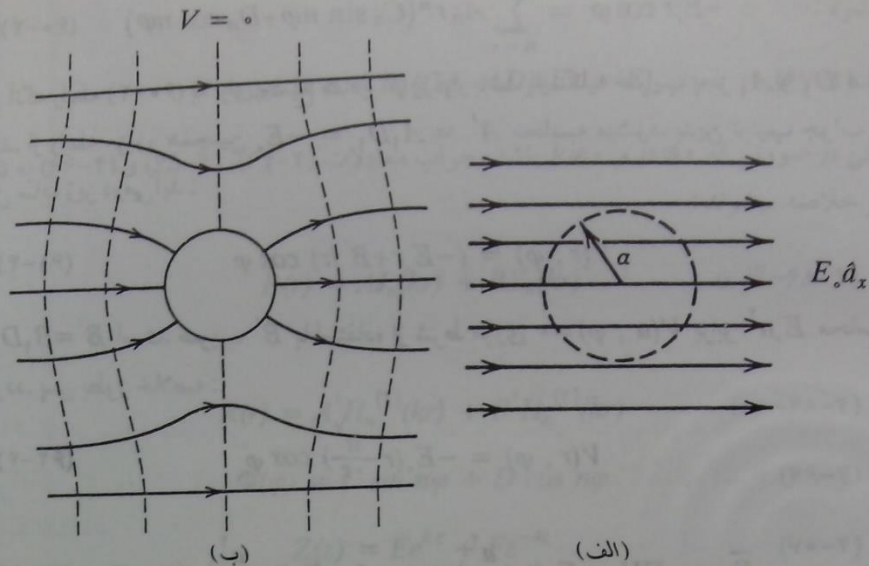
$$A_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4V_0}{n\pi a^n} & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (56-4)$$

سرانجام با جایگزین نمودن A_n از رابطه (۴-۵۶) در رابطه (۴-۵۵) جواب بصورت زیر نوشته می شود:

$$V(r, \varphi) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\varphi \quad (57-4)$$

□

مثال (۴-۷) استوانه ای از جنس هادی به طول بینهایت و شعاع a ، مطابق شکل (۴-۷-الف)، بطور عمودی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = E_0 \hat{a}_x$ قرار می گیرد. میدان الکتریکی را در فضای اطراف استوانه هادی بدست آورید. محور استوانه را منطبق بر محور z و پتانسیل صفحه $z=0$ را برابر صفر فرض کنید.



شکل (۷-۴) استوانه‌ای هادی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت (الف) نحوه قرار گرفتن استوانه در قبال میدان (ب) خطوط میدان (خط پر) و مقاطع سطوح هم پتانسیل (خط چین) پس از قرار گرفتن استوانه در معرض میدان

حل:

حضور استوانه هادی منجر به بروز تغییراتی در میدان اولیه می‌گردد. به علت وجود تقارن استوانه‌ای می‌توان حدس زد که میدان جدید شکل جواب معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای را دارا است. بنابراین شکل کلی جواب را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \sin n\varphi + D_n \cos n\varphi) \quad (58-4)$$

برای تعیین ضرایب مجهول از خواص جواب در $r=\infty$ و شرط مرزی در $r=a$ استفاده می‌کنیم. در فواصل بسیار دور از استوانه (یعنی در $r=\infty$) تأثیر حضور استوانه در میدان باید به صفر کاهش یابد. بنابراین در $r=\infty$ پتانسیل و میدان باید شکل توابع پتانسیل و میدان اولیه را به خود بگیرند. اما پتانسیل در نقطه دلخواه $A(r, \varphi)$ قبل از قرار گرفتن استوانه در میدان عبارت است از:

$$V_A = -E_0 x = -E_0 r \cos \varphi \quad (59-4)$$

با مساوی قرار دادن طرفهای راست روابط (58-4) و (59-4) و میل دادن r به سمت بینهایت داریم:

$$-E_0 r \cos \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n (C_n \sin n\varphi + D_n \cos n\varphi) \quad (۶۰-۴)$$

برای آنکه رابطه (۶۰-۴) به ازای جميع مقادیر φ برقرار باشد باید کلیه ضرایب بجز A_1 و D_1 صفر باشند. از رابطه مزبور همچنین $A_1 D_1 = -E_0$ محاسبه میشود. بدین ترتیب جواب به شکل ساده زیر درمی آید:

$$V(r, \varphi) = (-E_0 r + B'/r) \cos \varphi \quad (۶۱-۴)$$

که $B' = B_1 D_1$ است. ضریب B' با استفاده از شرط مرزی $V(a, \varphi) = 0$ برابر $E_0 a^2$ محاسبه میگردد. پس بطور خلاصه:

$$V(r, \varphi) = -E_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi \quad (۶۲-۴)$$

و:

$$\vec{E} = -\nabla V = E_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^3} \right) \cos \varphi \hat{a}_r - E_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^3} \right) \sin \varphi \hat{a}_\varphi \quad (۶۳-۴)$$

ملاحظه کنید که برای مقادیر بزرگ r ، میدان برابر $\vec{E} = E_0 (\cos \varphi \hat{a}_r - \sin \varphi \hat{a}_\varphi)$ که همان $E_0 \hat{a}_x$ است، میشود. شکل (۶۳-۴) خطوط میدان و مقاطع سطوح هم پتانسیل (منحنی‌های خط‌چین) را نشان میدهد.

□

از روش جداسازی متغیرها همچنین میتوان برای حل معادله لاپلاس سه بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده نمود. در اینجا فقط به ذکر چگونگی استخراج جواب اکتفا می‌کنیم و مطالعه جزئیات بیشتر را به عهده علاقمندان واگذار می‌نماییم. پس از جایگزین نمودن V در رابطه (۴۰-۴) با $R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ و تقسیم طرفین آن بر $R\Phi Z/r^2$ ، معادله لاپلاس به سه معادله زیر تجزیه می‌گردد:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + R[(kr)^2 - n^2] = 0 \quad (۶۴-۴)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2, \quad n = \text{مقدار ثابت} \quad (۶۵-۴)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2, \quad k = \text{مقدار ثابت} \quad (۶۶-۴)$$

در صورتی که $k=n=0$ باشد پاسخ V شکل ساده‌ای به خود خواهد گرفت که بصورت زیر نوشته

میشود:

$$V = (A \ln r + B)(C\varphi + D)(Ez + F) \quad (۶۷-۴)$$

لیکن در صورتی که $n \neq 0$ و $k \neq 0$ باشد، جواب معادلات (۶۴-۴)، (۶۵-۴) و (۶۶-۴) به شرح زیر خلاصه میشوند:

$$R(r) = AJ_n(kr) + BY_n(kr) \quad (۶۸-۴ \text{ الف})$$

یا:

$$R(r) = A'H_n^{(1)}(kr) + B'H_n^{(2)}(kr) \quad (۶۸-۴ \text{ ب})$$

$$\Phi(\varphi) = C \sin n\varphi + D \cos n\varphi \quad (۶۹-۴)$$

$$Z(z) = Ee^{kz} + Fe^{-kz} \quad (۷۰-۴)$$

معادله (۶۴-۴) را معادله دیفرانسیل بسل^۱، J_n و Y_n را بترتیب توابع بسل از نوع اول و دوم و $H_n^{(1)}$ و $H_n^{(2)}$ را توابع هنکل^۲ از نوع اول و دوم می‌نامند. این توابع عموماً بصورت سریهای بینهایت نوشته می‌شوند. در ضمن توابع هنکل از ترکیب خطی توابع بسل نتیجه میشوند:

$$H_n^{(1)} = J_n + jY_n, \quad H_n^{(2)} = J_n - jY_n$$

بدین ترتیب تابع پتانسیل در دستگاه مختصات استوانه‌ای سه بعدی، به فرض تفکیک پذیر بودن به حاصل ضرب توابعی از r ، φ و z ، بصورت زیر خلاصه می‌گردد (برای حالت $n \neq 0$ و $k \neq 0$):

$$V(r, \varphi, z) = [AJ_n(kr) + BY_n(kr)][C \sin n\varphi + D \cos n\varphi][Ee^{kz} + Fe^{-kz}] \quad (۷۱-۴)$$

سرانجام یادآوری می‌شود که تابع پتانسیل را همچنین میتوان بصورت یک سری از عبارت سمت راست رابطه (۷۱-۴) به ازای مقادیر مختلف n نوشت.

■ حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کروی

حل معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات کروی به اختصار مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این دستگاه مختصات معادله لاپلاس به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (۷۲-۴)$$

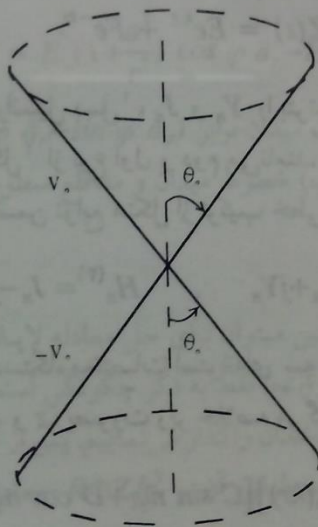
در حالات یک بعدی که V تابعی فقط از r ، θ یا φ است، معادله لاپلاس فقط از یکی از جملات سمت راست رابطه (۷۲-۴) تشکیل می شود. جوابهای معادله در این حالات عبارتند از:

$$V(r) = A + B/r \quad (۷۳-۴)$$

$$V(\theta) = C + D \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \quad (۷۴-۴)$$

$$V(\varphi) = E + F\varphi \quad (۷۵-۴)$$

مثال (۸-۴) دو سطح مخروطی شکل هادی که در امتداد شعاعی تا بینهایت ادامه دارند دارای پتانسیلهای V_0 و $-V_0$ ، مطابق شکل (۸-۴)، میباشند. پتانسیل را در فضای اطراف مخروطها محاسبه نمایید.



شکل (۸-۴) دو سطح مخروطی شکل هادی با نیم زاویه θ_0 با پتانسیلهای V_0 و $-V_0$

حل:

به علت وجود تقارن محوری و بینهایت بودن مخروطها در امتداد r ، تابع پتانسیل مستقل از φ و r میباشد. لذا جواب طبق رابطه (۷۴-۴) به شکل زیر نوشته میشود:

$$V(\theta) = A + B \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)$$

شرایط مرزی در این مسأله عبارتند از:

$$V(\theta_0) = V_0$$

$$V(\pi - \theta_0) = -V_0$$

اعمال این شرایط در جواب، دو رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$V_0 = A + B \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)$$

$$-V_0 = A + B \ln \left(\cot \frac{\theta_0}{2} \right)$$

پس از حل دو رابطه اخیر برای A و B داریم:

$$A = 0, \quad B = V_0 / \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)$$

و سرانجام تابع پتانسیل بصورت زیر خلاصه میشود:

$$V(\theta) = V_0 \frac{\ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]}{\ln \left[\tan \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right]} \quad (76-4)$$

□

حالات دو بعدی و سه بعدی معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کروی را میتوان همانند حالات مشابه در دستگاههای مختصات مستطیلی و استوانه‌ای، بر اساس روش جداسازی متغیرها، مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. با در نظر گرفتن تابع پتانسیل بصورت حاصل ضرب $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ ، معادله لاپلاس به سه معادله دیفرانسیل معمولی تجزیه می‌گردد که جوابهای آنها عبارتند از:

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)} \quad (77-4)$$

$$\Theta(\theta) = C P_n^m(\cos \theta) + D Q_n^m(\cos \theta) \quad (78-4)$$

$$\Phi(\varphi) = E \sin m\varphi + F \cos m\varphi \quad (79-4)$$

در رابطه (78-4)، $P_n^m(\cos \theta)$ و $Q_n^m(\cos \theta)$ را بترتیب توابع لژاندر^۱ وابسته از نوع اول و دوم نامند. در جوابهای مذکور m و n اعداد صحیح بوده و $m \leq n$ است. عموماً، توابع نوع دوم یعنی $Q_n^m(\cos \theta)$ ، به دلیل آنکه در $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ نامحدود هستند، وارد محاسبات نمی‌شوند. به

عبارت دیگر، جهت اجتناب از نامحدود شدن پتانسیل در $\theta=0$ و $\theta=\pi$ باید D را برابر صفر فرض نمود. در حالتی که تقارن محوری موجود باشد تابع پتانسیل مستقل از φ بوده و مسأله در واقع به حالت دو بعدی ساده می شود. جواب معادله لاپلاس در این حالت با قرار دادن $m=0$ در رابطه (۷۸-۴) بصورت زیر نوشته می شود:

$$V(r, \theta) = [Ar^n + B r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad n \neq 0 \quad (۸۰-۴)$$

در صورتی که $n=0$ باشد، تابع پتانسیل عبارت می شود از:

$$V(r, \theta) = \left(A + \frac{B}{r}\right) \left[C + D \ln \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (۸۱-۴)$$

در رابطه (۸۰-۴)، $P_n(\cos \theta) = P_n^*(\cos \theta)$ تابع لژاندر نامیده می شود. تعدادی از چند جمله ایهای لژاندر برای چند مقدار n به شرح زیر می باشند:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (1 + 3 \cos 2\theta)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8} (3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta) \quad (۸۲-۴)$$

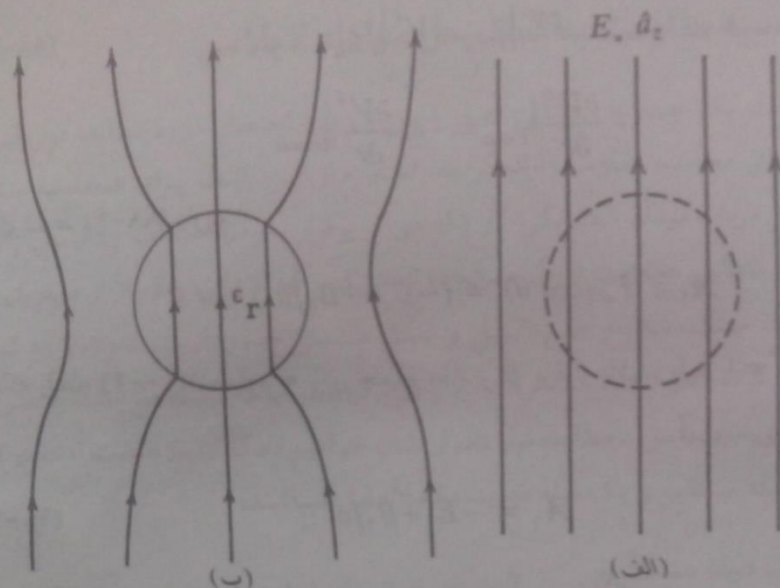
مثال (۹-۴) کره ای از جنس عایق به شعاع a و قابلیت گذردهی نسبی ϵ_r ، مطابق شکل (۹-۴-الف)، در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_0 = E_0 \hat{a}_z$ قرار می گیرد. میدان الکتریکی را در درون و فضای اطراف کره عایق تعیین نمایید.
حل:

به علت وجود تقارن محوری، تابع پتانسیل مستقل از φ بوده و لذا جواب شکل رابطه (۸۰-۴) را دارا می باشد. پتانسیل در فضای اطراف کره را با V^o و در درون آنرا با V^i نشان می دهیم. V^o و V^i هر دو شکل کلی رابطه (۸۰-۴) را دارا هستند، لذا میتوان نوشت:

$$V^o = [A_1 r^n + B_1 r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad r \geq a \quad (۸۳-۴)$$

$$V^i = [A_1' r^n + B_1' r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad r \leq a \quad (۸۴-۴)$$

برای تعیین ضرایب مجهول از خواص میدان در $r=\infty$ ، شرایط مرزی در $r=a$ و محدود بودن



شکل (۹-۴) کره‌ای عایق در معرض میدان الکتریکی یکنواخت (الف) نحوه قرار گرفتن کره در قبال میدان (ب) خطوط میدان در درون و اطراف کره

میدان در $r=0$ استفاده می‌کنیم. در $r=\infty$ ، که تأثیر حضور کره عایق در میدان از بین رفته است، میدان باید همچنان شکل اولیه خود را دارا باشد. اما شکل اولیه تابع پتانسیل (قبل از قرار گرفتن کره عایق) عبارت است از:

$$V = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \quad (۸۵-۴)$$

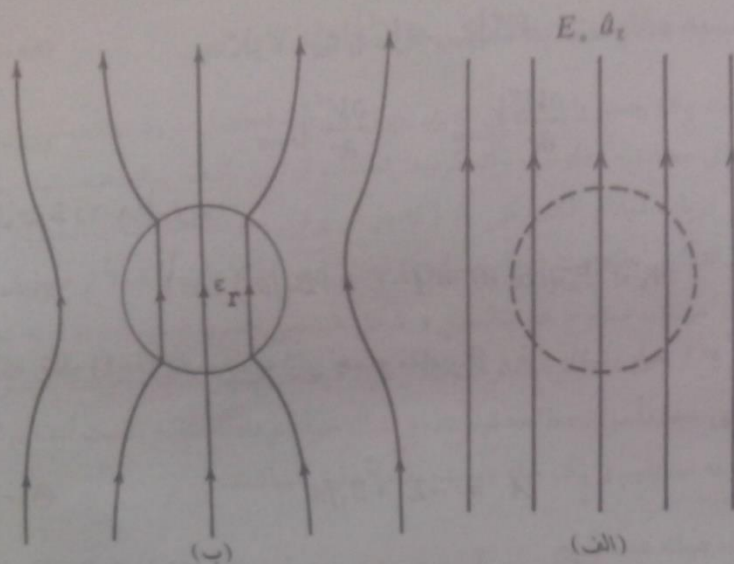
برای آنکه طرفهای سمت راست روابط (۸۳-۲) و (۸۵-۴)، در هنگام $r \rightarrow \infty$ ، مساوی باشند ضروری است که $n=1$ باشد. از این تساوی نتیجه $A_1 = -E_0$ نیز حاصل میشود. بدین ترتیب، تابع پتانسیل در ناحیه $r \geq a$ به شکل زیر خلاصه میشود:

$$V^o = (A_1 r + B_1 r^{-1}) P_1(\cos \theta) = \left(-E_0 r + \frac{B_1}{r}\right) \cos \theta \quad (۸۶-۴)$$

برای تابع V^i ، محدود بودن پتانسیل در $r=0$ ایجاب میکند که $B_1' = 0$ باشد، لذا:

$$V^i = A_1' r^n P_n(\cos \theta) \quad r \leq a \quad (۸۷-۴)$$

شرایط مرزی در این مسأله، پیوسته بودن پتانسیل و مؤلفه عمودی بردار \bar{D} در $r=a$ هستند که بصورت زیر بیان میشوند:



شکل (۹-۴) کره‌ای عایق در معرض میدان الکتریکی یکنواخت (الف) نحوه قرار گرفتن کره در قبال میدان (ب) خطوط میدان در درون و اطراف کره

میدان در $r=0$ استفاده می‌کنیم. در $r=\infty$ ، که تأثیر حضور کره عایق در میدان از بین رفته است، میدان باید همچنان شکل اولیه خود را دارا باشد. اما شکل اولیه تابع پتانسیل (قبل از قرار گرفتن کره عایق) عبارت است از:

$$V = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \quad (۸۵-۴)$$

برای آنکه طرفهای سمت راست روابط (۸۳-۲) و (۸۵-۴)، در هنگام $r \rightarrow \infty$ ، مساوی باشند ضروری است که $n=1$ باشد. از این تساوی نتیجه $A_1 = -E_0$ نیز حاصل میشود. بدین ترتیب، تابع پتانسیل در ناحیه $r \geq a$ به شکل زیر خلاصه میشود:

$$V^o = (A_1 r + B_1 r^{-2}) P_1(\cos \theta) = \left(-E_0 r + \frac{B_1}{r^2}\right) \cos \theta \quad (۸۶-۴)$$

برای تابع V^i ، محدود بودن پتانسیل در $r=0$ ایجاب میکند که $B_1' = 0$ باشد، لذا:

$$V^i = A_1' r^n P_n(\cos \theta) \quad r \leq a \quad (۸۷-۴)$$

شرایط مرزی در این مسأله، پیوسته بودن پتانسیل و مؤلفه عمودی بردار \bar{D} در $r=a$ هستند که بصورت زیر بیان میشوند:

$$V^o|_{r=a} = V^i|_{r=a} \quad (۸۸-۴)$$

$$-\frac{\partial V^o}{\partial r}|_{r=a} = -\epsilon_r \frac{\partial V^i}{\partial r}|_{r=a} \quad (۸۹-۴)$$

با اعمال شرط (۸۸-۴) داریم:

$$A_1' a^n P_n(\cos \theta) = (-E_0 a + B_1/a^2) \cos \theta \quad (۹۰-۴)$$

برای آنکه رابطه (۹۰-۴) همواره به ازای جميع مقادیر θ برقرار باشد، باید $n' = 1$ بوده و داشته باشیم:

$$A_1' = -E_0 + B_1/a^3 \quad (۹۱-۴)$$

همچنین با اعمال شرط (۸۹-۴) رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$\epsilon_r A_1' = -E_0 - 2B_1/a^3 \quad (۹۲-۴)$$

پس از حل روابط (۹۱-۴) و (۹۲-۴) برای A_1' و B_1 ، توابع پتانسیل V^i و V^o و میدانهای الکتریکی مربوطه به شرح زیر خلاصه میشوند:

$$V^i(r, \theta) = -\left(\frac{r^3}{\epsilon_r + 2}\right) E_0 \cos \theta \quad r \leq a \quad (\text{الف-۹۳-۴})$$

$$V^o(r, \theta) = -\left[1 - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_0 r \cos \theta \quad r \geq a \quad (\text{ب-۹۳-۴})$$

$$E^i(r, \theta) = \frac{r^2}{\epsilon_r + 2} E_0 (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta) = \frac{r^2 E_0}{\epsilon_r + 2} \hat{a}_z \quad r < a \quad (\text{الف-۹۴-۴})$$

$$E^o(r, \theta) = \left[1 + \frac{2(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_0 \cos \theta \hat{a}_r - \left[1 - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_0 \sin \theta \hat{a}_\theta \quad r > a \quad (\text{ب-۹۴-۴})$$

ملاحظه میشود که میدان الکتریکی در درون کره همچنان یکنواخت ولی با شدتی کمتر از شدت میدان اولیه است. خطوط میدان در شکل (۹-۴) نشان داده شده اند.

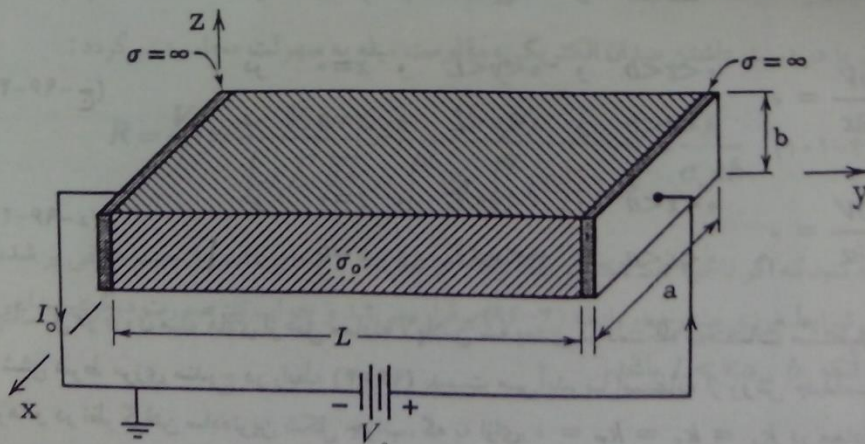
□

۴-۴) محاسبه مقاومت به کمک حل معادله لاپلاس

مسئله مقاومت یک جسم با رسانایی σ در فصل سوم به اختصار مورد مطالعه قرار گرفت و رابطه (۳-۱۳) برای محاسبه مقاومت ارائه گردید. استفاده از این رابطه برای محاسبه مقاومت مستلزم اطلاعاتی درباره میدان الکتریکی \vec{E} (که در اثر برقرار نمودن اختلاف پتانسیل V_0 بین سطوح ابتدایی و انتهایی مقاومت ایجاد میشود) است. این اطلاعات را قبلاً از فیزیک مسأله (چگونگی خطوط میدان، سطوح هم پتانسیل و شکل هندسی جسم) کسب نموده و به کمک آن میدان \vec{E} را تعیین کرده و در محاسبه مقاومت بکار می‌بردیم. در اینجا مسأله مقاومت را بعنوان یک مسأله مقادیر مرزی مجدداً مورد مطالعه قرار داده و نشان خواهیم داد که نتایج بدست آمده در قبل، از جمله برای یک میله مستقیم و یک میله خمیده، کاملاً دقیق میباشند.

■ مقاومت یک میله مستقیم

میله مستقیمی را به طول L ، سطح مقطع یکنواخت و مستطیلی شکل به ابعاد a و b و رسانایی σ_0 ، مطابق شکل (۴-۱۰)، در نظر می‌گیریم. فرض میشود که دو لایه از جنس هادی کامل ($\sigma = \infty$) در ابتدا و انتهای میله تعبیه شده باشند. اختلاف پتانسیل V_0 را، از طریق وصل یک باتری به لایه‌های هادی کامل، بین سطوح ابتدایی و انتهایی میله بوجود می‌آوریم. چهار سطح دیگر میله در معرض هوا قرار دارند. میدان الکتریکی بوجود آمده در میله را میتوان مستقیماً از حل معادله لاپلاس بدست آورد، زیرا در میدان الکتریکی ساکن که تغییرات نسبت به زمان صفر است، $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ است و چون $\vec{J} = \sigma_0 \vec{E}$ و $\vec{E} = -\nabla V$ میباشد، رابطه $\nabla^2 V = 0$ در حجم اشغال شده



شکل (۴-۱۰) میله‌ای مستقیم با طول L ، سطح مقطع مستطیلی شکل به ابعاد a و b و رسانایی σ_0 .

توسط میله برقرار است. بنابراین تعیین میدان الکتریکی در درون میله به حل معادله لاپلاس تحت شرایط مرزی معینی ساده می‌شود.

شرایط مرزی مورد نظر در این مسأله در شش وجه میله بیان میشوند. سطوح ابتدایی و انتهایی میله باید سطوح هم پتانسیل و با پتانسیلهایی بترتیب برابر $V=0$ و $V=V_0$ باشند. اما میله در امتداد چهار وجه دیگرش در معرض هوا است. تجربه آزمایشگاهی نشان میدهد که جریان الکتریکی از بدنه یک جسم هادی به فضای اطراف تراوش نمیکند (مگر آنکه ولتاژ V_0 آنقدر زیاد باشد که منجر به یونیزه شدن هوای اطراف و تشکیل قوس الکتریکی شود). این حقیقت به عبارت دیگر بیان میکند که بردار چگالی جریان الکتریکی نمی‌تواند روی هر یک از چهار وجه مزبور مؤلفه عمودی داشته باشد، یعنی بر روی سطوح زیر $J_n = \sigma \cdot E_n = 0$ است.

$$\begin{cases} x=0, & 0 < y < L, & 0 < z < b \\ x=a, & 0 < y < L, & 0 < z < b \\ z=0, & 0 < y < L, & 0 < x < a \\ z=b, & 0 < y < L, & 0 < x < a \end{cases} \quad (95-4)$$

اکنون با توجه به شکل (۴-۱۰) و اینکه $\vec{E} = -\nabla V$ است، شرایط مرزی بر حسب تابع پتانسیل و مشتقات آن به شرح زیر خلاصه میشوند:

$$V=0 \quad \text{در} \quad y=0 \quad \text{و} \quad 0 \leq x \leq a \quad \text{و} \quad 0 \leq z \leq b \quad (4-96 \text{ الف})$$

$$V=V_0 \quad \text{در} \quad y=L \quad \text{و} \quad 0 \leq x \leq a \quad \text{و} \quad 0 \leq z \leq b \quad (4-96 \text{ ب})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{در} \quad x=0 \quad \text{و} \quad 0 < y < L \quad \text{و} \quad 0 < z < b \\ \text{در} \quad x=a \quad \text{و} \quad 0 < y < L \quad \text{و} \quad 0 < z < b \quad (4-96 \text{ ج})$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{در} \quad z=0 \quad \text{و} \quad 0 < y < L \quad \text{و} \quad 0 < x < a \\ \text{در} \quad z=b \quad \text{و} \quad 0 < y < L \quad \text{و} \quad 0 < x < a \quad (4-96 \text{ د})$$

تابع پتانسیل در درون میله هادی از حل معادله لاپلاس سه بعدی در دستگاه مختصات مستطیلی به ازای شش شرط مرزی مندرج در رابطه (۴-۹۶) بدست می‌آید. با استفاده از روش جداسازی متغیرها و در نظر گرفتن ساده‌ترین شکل جواب، که به ازای $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ در معادلات (۴-۱۵) تا (۴-۱۷) حاصل می‌شود، میتوان نوشت:

$$V(x, y, z) = (Ax+B)(Cy+D)(Ez+F) \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq L \\ 0 \leq z \leq b \end{array} \quad (97-4)$$

با اعمال شرط (۴-۹۶-الف) در این جواب نتیجه $D=0$ حاصل می‌شود. همچنین شرایط (۴-۹۶-ج) و (۴-۹۶-د) همواره برقرار خواهند بود در صورتی که $A=0$ و $E=0$ باشد. با استفاده از این نتایج در رابطه (۴-۹۷) داریم:

$$V(x, y, z) = BCFy = B'y \quad (98-4)$$

در اینجا اشاره به این نکته ضروری است که گرچه تابع پتانسیل از ابتدا سه بعدی در نظر گرفته شد، لیکن همانطور که ملاحظه میشود پتانسیل در ناحیه هادی تابعی فقط از y بوده و لذا یک بعدی است. با اعمال شرط (۴-۹۶-ب)، $B' = V_0/L$ محاسبه میشود و بنابراین تابعی که کلیه شرایط مرزی را برآورده سازد و در معادله لاپلاس نیز صدق کند بصورت زیر خلاصه میشود:

$$V = \frac{V_0}{L} y \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq L \\ 0 \leq z \leq b \end{array} \quad (99-4)$$

و آنگاه میدان الکتریکی در درون میله عبارت است از:

$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{L} \hat{a}_y \quad (100-4)$$

اکنون با در دست داشتن میدان الکتریکی، مقاومت میله به سهولت محاسبه می‌گردد:

$$R = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{\int \sigma \cdot \bar{E} \cdot d\bar{s}} = \frac{V_0}{\int_0^a dx \int_0^b \left(\frac{\sigma V_0}{L}\right) dz} = \frac{L}{\sigma \cdot ab} \quad (101-4)$$

توجه کنید که اگر ناحیه $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq L$ و $0 \leq z \leq b$ بجای هادی از جسم عایقی پر شده بود، دیگر شرایط مرزی مندرج در رابطه (۴-۹۶) برقرار نمی‌شد و جواب نیز صورت دیگری پیدا می‌کرد، مگر آنکه $L \ll a, b$ باشد.

■ مقاومت یک میله خمیده

این مسأله را میتوان به روشی مشابه مسأله قبل مورد بررسی قرار داد. شکل (۴-۱۱) ابعاد و خصوصیات هندسی این مسأله را بیان می‌کند. شرایط مرزی در این مسأله با توجه به شکل (۴-۱۱) و اینکه جریان الکتریکی از وجوه جسم که در معرض هوا قرار دارند به بیرون تراوش نمیکنند عبارتند از:

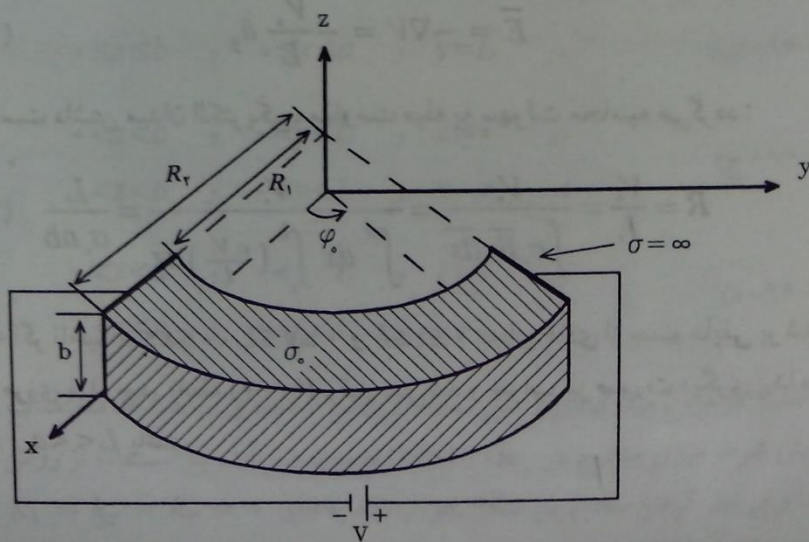
(۴-۱۰۲-الف) در $\varphi=0$ و $R_1 \leq r \leq R_r$ و $0 \leq z \leq b$ $V=0$

(۴-۱۰۲-ب) در $\varphi=\varphi_0$ و $R_1 \leq r \leq R_r$ و $0 \leq z \leq b$ $V=V_0$

(۴-۱۰۲-ج) در $r=R_1$ و $0 < \varphi < \varphi_0$ و $0 < z < b$ $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$
 در $r=R_r$ و $0 < \varphi < \varphi_0$ و $0 < z < b$ $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$

(۴-۱۰۲-د) در $z=0$ و $0 < \varphi < \varphi_0$ و $R_1 < r < R_r$ $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$
 در $z=b$ و $0 < \varphi < \varphi_0$ و $R_1 < r < R_r$ $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

تابع پتانسیل در درون میله هادی از حل معادله لاپلاس سه بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به ازای شرایط مرزی مندرج در رابطه (۴-۱۰۲) بدست می‌آید. با در نظر گرفتن ساده‌ترین جواب بدست آمده از روش جداسازی متغیرها داریم:



$$V(r, \varphi, z) = (A \ln r + B)(C\varphi + D)(Ez + F) \quad \begin{array}{l} R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ 0 \leq z \leq b \end{array} \quad (103-4)$$

شرط (۴-۱۰۲-الف) نتیجه $D=0$ ، شرط (۴-۱۰۲-ج) نتیجه $A=0$ و شرط (۴-۱۰۲-د) نتیجه $E=0$ را به دنبال دارد. با بکار بردن این نتایج در پاسخ، تابع پتانسیل بصورت $V(r, \varphi, z) = BCF\varphi = C'\varphi$ خلاصه می‌گردد و ضریب C' نیز با اعمال شرط (۴-۱۰۲-ب) برابر V_0/φ_0 محاسبه می‌شود. پس بطور خلاصه خواهیم داشت:

$$V(r, \varphi, z) = \frac{V_0}{\varphi_0} \varphi \quad \begin{array}{l} R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ 0 \leq z \leq b \end{array} \quad (103-4)$$

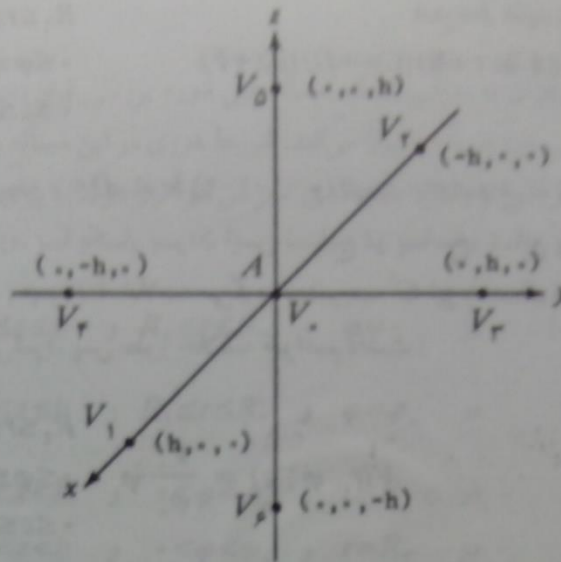
$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi = -\frac{V_0}{\varphi_0 r} \hat{a}_\varphi \quad (105-4)$$

$$I_s = \int \sigma_s \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^b \frac{\sigma_s V_0}{\varphi_0 r} dz = \frac{\sigma_s V_0 b}{\varphi_0} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$R = \frac{V_0}{I_s} = \frac{\varphi_0}{\sigma_s b \ln(R_2/R_1)} \quad (106-4)$$

۴-۵) حل معادله لاپلاس به روش عددی

روشهایی که تا کنون برای حل معادله لاپلاس مطالعه نمودیم از نوع «تحلیلی» بوده‌اند. این روشها برای یافتن پتانسیل در مواردی که سطوح مرزی صفحه، استوانه یا کره هستند مناسب می‌باشند. حال به مطالعه روش دیگری مبتنی بر محاسبات عددی می‌پردازیم که بویژه برای وقتی که سطوح مرزی شکلهای ساده‌ای ندارند مفید خواهد بود. همچنین وجود کامپیوترهای دیجیتال که انجام محاسبات عددی با حجم زیاد را امکان‌پذیر می‌سازد به این روش اهمیت بیشتری می‌بخشد. برای نشان دادن اصول این روش فرض کنید که پتانسیلهای V_1, V_2, \dots, V_n در شش نقطه از فضا، که به فواصل مساوی از نقطه $A(0, 0, 0)$ و روی محورهای دو به دو عمود بر هم گذرنده از A (که آنها را محورهای x و y و z می‌نامیم) قرار دارند، معلوم باشند. شکل (۴-۱۲) مختصات نقاط و پتانسیلهای آنها را نشان می‌دهد. برای یافتن مقدار تقریبی پتانسیل در نقطه A میتوان چنین نوشت:



شکل (۱۲-۴) مختصات و پتانسیلهای شل نقطه به فواصل مساوی از نقطه A و واقع بر محورهای متعامد

$$[\nabla^T V]_A = [\nabla^T V]_{(0,0,0)} = \left[\frac{\partial^T V}{\partial x^T} + \frac{\partial^T V}{\partial y^T} + \frac{\partial^T V}{\partial z^T} \right]_{(0,0,0)} = 0 \quad (107-4)$$

اما:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^T V}{\partial x^T} \right]_{(0,0,0)} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \right]_{(0,0,0)} \approx \frac{1}{h} \left\{ \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{(h/2,0,0)} - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{(-h/2,0,0)} \right\} \\ &\approx \frac{1}{h} \left\{ \frac{[V]_{(h,0,0)} - [V]_{(0,0,0)}}{h} - \frac{[V]_{(0,0,0)} - [V]_{(-h,0,0)}}{h} \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} (V_1 - V_0 - V_0 + V_r) = \frac{1}{h^2} (V_1 + V_r - 2V_0) \quad (108-4 \text{ الف}) \end{aligned}$$

به همین ترتیب:

$$\left[\frac{\partial^T V}{\partial y^T} \right]_{(0,0,0)} \approx \frac{1}{h^2} (V_r + V_r - 2V_0) \quad (108-4 \text{ ب})$$

$$\left[\frac{\partial^T V}{\partial z^T} \right]_{(0,0,0)} \approx \frac{1}{h^2} (V_0 + V_p - 2V_0) \quad (108-4 \text{ ج})$$

پس از جایگزین نمودن روابط (۱۰۸-۴ الف) تا (۱۰۸-۴ ج) در رابطه (۱۰۷-۴) داریم:

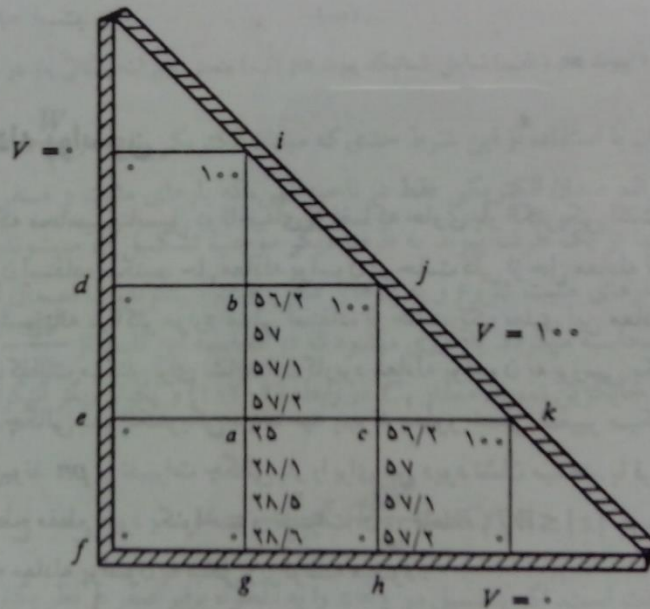
$$V \approx \frac{1}{h^2} (V_0 + V_0 + V_r + V_r + V_0 + V_p) \quad (109-4)$$

بنابراین پتانسیل نقطه A تقریباً برابر متوسط پتانسیلهای شش نقطه‌ای است که به فواصل مساوی از A و واقع بر محورهای دو به دو عمود بر هم گذرنده از A باشند. هر چه فاصله h کوچکتر باشد تقریب بوجود آمده در V_0 نیز کمتر خواهد بود. اگر پتانسیل فقط تابعی از دو متغیر x و y باشد، آنگاه $V_0 = V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = V_6$ است و در نتیجه:

$$V_0 \approx \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \quad (110-4)$$

برای نشان دادن کاربرد این روش به بررسی یک مثال می‌پردازیم.

مثال (۱۰-۴) محفظه‌ای به طول بینهایت و با سطح مقطعی به شکل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را در نظر می‌گیریم. پتانسیل سطوح مجاور زاویه قائمه برابر صفر و پتانسیل سطح مقابل زاویه قائمه برابر ۱۰۰ ولت فرض میشود. سطح مقطع را مطابق شکل (۴-۱۳) به تعدادی مربع و مثلث تقسیم می‌کنیم. پتانسیل را در نقاط a و b و c محاسبه نماییم.



شکل (۴-۱۳) سطح مقطع مثلثی شکل محفظه‌ای به طول بینهایت برای مثال (۴-۱۰)

حل:

ابتدا نقطه a را در نظر می‌گیریم. با معدل گرفتن پتانسیلهای نقاط d ، f ، h و j که به فواصل مساوی از a و روی محورهای عمود بر هم گذرنده از a قرار دارند، مقدار $\frac{1}{4}(0+0+0+100)=25$ قرار دارند، مقدار a را بدست می‌آوریم. با داشتن این مقدار و پتانسیلهای نقاط d ، i و j پتانسیل

نقطه b را برابر $۵۶/۲ = \frac{1}{4}(۲۵+۰+۱۰۰+۱۰۰)$ محاسبه می‌کنیم. به همین ترتیب با استفاده از پتانسیلهای نقاط a, j, k و مقدار $۵۶/۲$ را برای پتانسیل نقطه c بدست می‌آوریم. اکنون با در دست داشتن مقادیری برای پتانسیلهای نقاط b و c که توأم با نقاط e و g نسبت به مجموعه نقاط d, f, h و j به نقطه a نزدیکتر هستند، پتانسیل نقطه a را (با تعیین متوسط پتانسیلهای نقاط b, c, e, g) مجدداً محاسبه می‌کنیم. مقدار جدید پتانسیل نقطه a برابر $۲۸/۱ = \frac{1}{4}(۵۶/۲+۵۶/۲+۰+۰)$ میشود. حال که مقدار دقیقتری برای پتانسیل نقطه a بدست آمده است، پتانسیلهای نقاط b و c را نیز میتوان مجدداً محاسبه نمود. مقدار جدید پتانسیل این نقاط عبارت از $۵۷ = \frac{1}{4}(۲۸/۱+۰+۱۰۰+۱۰۰)$ می‌باشد. این به نوبه خود مقدار جدیدتر $۲۸/۵ = \frac{1}{4}(۵۷+۵۷+۰+۰)$ را برای پتانسیل نقطه a به دنبال دارد. این روند را میتوان آنقدر تکرار نمود تا تفاوت مقادیر متوالی نهایی برای پتانسیل هر نقطه از میزان معینی (بر حسب تقریب مورد نیاز) کمتر شود. تقریب مقادیر بدست آمده برای این مثال، همانطور که در شکل (۴-۱۳) نشان داده شده، کمتر از $۰/۱$ است.

□

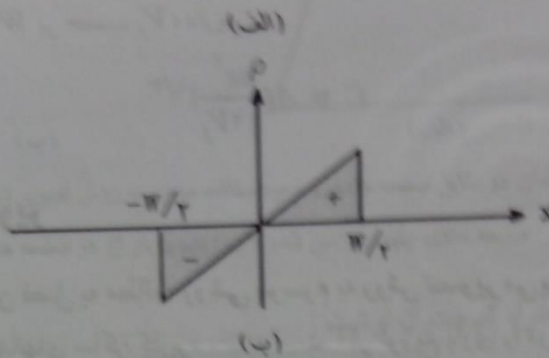
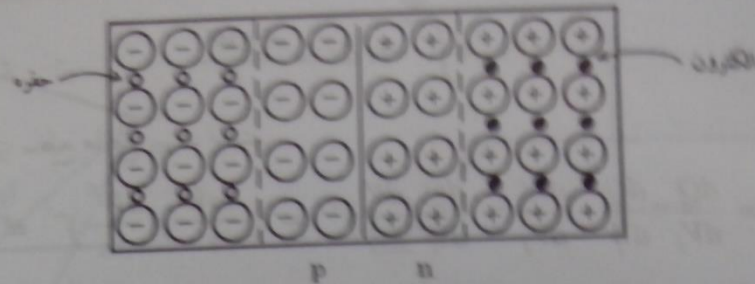
۴-۶) معادله پواسون

در صورتی که محاسبه پتانسیل در ناحیه‌ای از فضا که حاوی بار الکتریکی است مورد نظر باشد از معادله پواسون استفاده میکنیم. حل معادله پواسون در حالت کلی از حل معادله لاپلاس پیچیده‌تر است، ولی خوشبختانه در اکثر موارد عملی استفاده از حالت یک بعدی این معادله، که به سادگی قابل حل است، کفایت میکند. برای نشان دادن کاربرد معادله پواسون به بررسی یک نوع دیود نیمه هادی که در آن چگالی بار الکتریکی در ناحیه پیوند بطور خطی تغییر میکند می‌پردازیم. شکل (۴-۱۴) پیوند pn و تغییرات چگالی بار را برای این دیود نشان میدهد. با فرض آنکه چگالی توزیع بار در سطح مقطع دیود یکنواخت و تغییرات آن در فاصله $|x| \leq W/2$ توسط رابطه $\rho = ax$ بیان شود، آنگاه معادله پواسون به شکل زیر نوشته میشود:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{ax}{\epsilon} \quad (۴-۱۱۱)$$

که ϵ قابلیت گذردهی نیمه هادی است. پس از یکبار انتگرال گرفتن از طرفین معادله داریم:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{a}{2\epsilon}x^2 + C_1 \quad (۴-۱۱۲)$$



شکل (۱۱۴-۴) پیوند pn نمایش شماتیک پیوند pn (ب) منحنی تغییرات چگالی بار در ناحیه تهی

ثابت C_1 را میتوان با استفاده از این شرط حدی که میدان الکتریکی باید در $x = \pm \frac{W}{2}$ صفر باشد بدست آورد. در واقع میدان الکتریکی فقط در ناحیه تهی، که بارهای مثبت و منفی پس از نفوذ حفره‌ها و الکترون‌ها از یک طرف پیوند به طرف دیگر موجب تشکیل آن میشوند، وجود دارد. خطوط میدان از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم میشوند. با اعمال شرط مذکور محاسبه میگردد. یادآوری میشود که در محاسبه این ثابت از $E_x = -\frac{dV}{dx}$ استفاده شده است. پس از جایگزین نمودن مقدار C_1 در رابطه (۱۱۲-۴) و یکبار دیگر انتگرال گرفتن از آن داریم:

$$V = -\frac{a}{6\epsilon}x^3 + \frac{aW^2}{\Lambda\epsilon}x + C_2 \quad (113-4)$$

که C_2 مقداری ثابت است. اگر پتانسیل در $x=0$ را به دلخواه برابر صفر در نظر بگیریم، این ثابت برابر صفر محاسبه میشود. افست پتانسیل روی ناحیه تهی عبارت است از:

$$V_j = V|_{x=W/2} - V|_{x=-W/2} = \frac{aW^3}{12\epsilon} \quad (114-2)$$

با در دست داشتن ولتاژ مذکور میتوان ظرفیت خازن تشکیل شده در ناحیه تهی را که از رابطه $C = \frac{dQ}{dV_j}$ بدست می‌آید محاسبه نمود. برای این منظور ابتدا Q را بدست می‌آوریم:

$$Q = A \int_0^W \frac{ax}{\sqrt{}} dx = \frac{AaW^2}{\sqrt{}} \quad (115-2)$$

که A مساحت سطح مقطع پیوند است.

$$C = \frac{dQ}{dV_j} = \frac{dQ}{dW} \cdot \frac{dW}{dV_j} = \frac{dQ}{dW} \left(\frac{dV_j}{dW} \right)^{-1} = \left(\frac{AaW}{\sqrt{}} \right) \left(\frac{aW^2}{\sqrt{}} \right)^{-1} = \frac{A}{W}$$

پس از جایگزین نمودن W بر حسب V_j ، داریم:

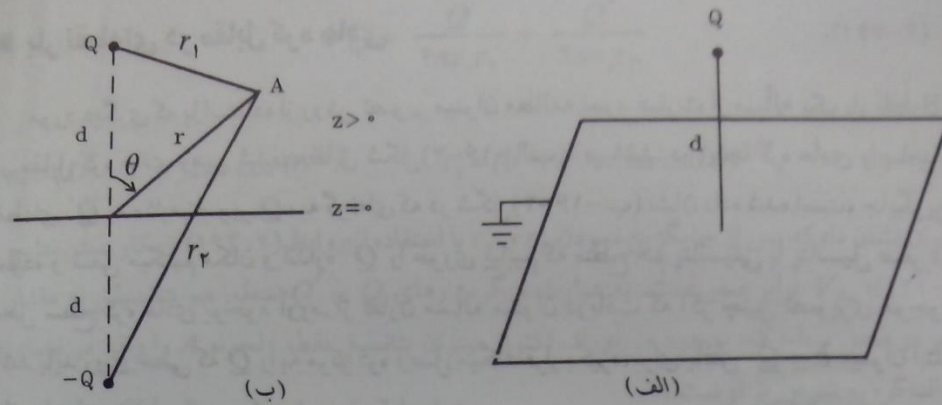
$$C = A \left(\frac{a\epsilon^2}{12V_j} \right)^{1/2} \quad (116-4)$$

۷-۴) روش تصویر

در آخرین قسمت این فصل به مطالعه روشی موسوم به روش تصویر می‌پردازیم که از دیرباز در حل برخی از مسائل میدانهای ساکن کاربرد داشته است. اگر توزیع باری را در مجاورت یک جسم هادی با پتانسیل معین در نظر بگیریم، تابع پتانسیل ناشی از این سیستم باید اولاً در معادله لاپلاس صدق کند و ثانیاً مقدار ثابتی روی سطح جسم هادی داشته باشد. در برخی موارد میتوان جسم هادی را با توزیع باری که آن را «تصویر» توزیع بار اصلی می‌نامیم جایگزین کرد، بطوریکه پتانسیل ناشی از توزیعهای اصلی و تصویر عیناً با پتانسیل سیستم اولیه یکی باشد، یعنی در معادله لاپلاس صدق کند و سطح هم‌پتانسیلی در محل سطح جسم هادی و با پتانسیلی برابر پتانسیل آن تشکیل دهد. در اینصورت جوابهای هر دو سیستم، چون در معادله لاپلاس صدق نموده و شرایط مرزی یکسانی را برآورده می‌سازند، الزاماً طبق قضیه یگانگی جواب یکسان هستند. جهت آشنایی بیشتر با کاربرد این روش به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

■ بار نقطه‌ای در مقابل صفحه هادی بینهایت

فرض کنید بار نقطه‌ای Q بفاصله d از یک صفحه هادی بینهایت زمین شده، مطابق شکل (۴-۱۵-الف)، واقع باشد. میخواهیم پتانسیل و میدان الکتریکی را در ناحیه $z > 0$ و چگالی توزیع بارهای القایی روی صفحه هادی را بدست آوریم. پتانسیل صفحه زمین شده را برابر صفر در نظر می‌گیریم. واضح است که اگر صفحه هادی را با بار $-Q$ و به فاصله d از پایین آن جایگزین کنیم، هر نقطه از صفحه به یک فاصله از بارهای Q و $-Q$ بوده و پتانسیل آن برابر صفر خواهد بود. بنابراین پتانسیلی که بار Q و صفحه هادی در ناحیه $z > 0$ بوجود می‌آورند با پتانسیل حاصل از Q و $-Q$ در این ناحیه برابر است. بار $-Q$ تصویر بار Q در صفحه هادی نامیده میشود. برای تعیین



شکل (۴-۱۵) بار نقطه‌ای در مقابل صفحه هادی و نحوه مطالعه میدان به روش تصویر (الف) بار نقطه‌ای Q در مقابل صفحه هادی بینهایت زمین شده (ب) تصویر بار Q در صفحه هادی

پتانسیل در نقطه دلخواه A میتوان نوشت :

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (۴-۱۱۷)$$

که در آن :

$$r_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}, \quad r_2 = (r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

میدان الکتریکی را میتوان مستقیماً از حاصل جمع میدانهای ناشی از Q و $-Q$ یا با استفاده از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ بدست آورد.

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla V &= -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{a}_\theta \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left[\frac{r-d \cos \theta}{r_1^3} - \frac{r+d \cos \theta}{r_2^3} \right] \hat{a}_r + d \sin \theta \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right] \hat{a}_\theta \right] \quad (۴-۱۱۸) \end{aligned}$$

به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ مؤلفه‌های میدان الکتریکی در صفحه هادی و از آنجا چگالی توزیع بارهای القایی محاسبه میشوند :

$$E_n = -E \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{-Qd}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\rho_s = \epsilon_0 E_n = \frac{-Qd}{2\pi (r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (۴-۱۱۹)$$

■ بار نقطه‌ای در مقابل کره هادی

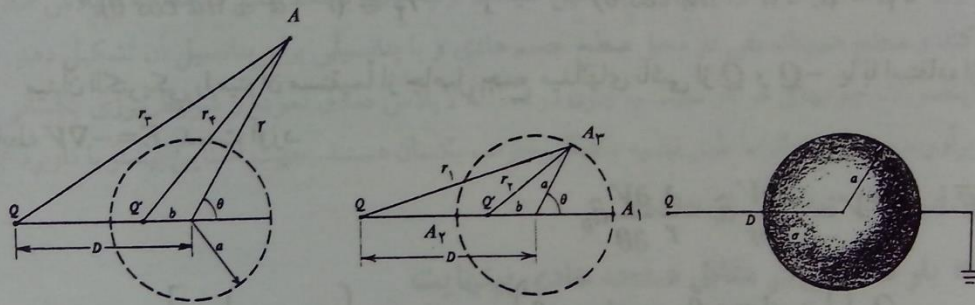
مورد دیگری که با استفاده از روش تصویر میتوان مطالعه نمود عبارت از مسأله یک بار نقطه‌ای در مقابل کره هادی زمین شده، مطابق شکل (۴-۱۶-الف)، میباشد. در اینجا کره هادی را با بار نقطه‌ای Q' به مثابه تصویر Q ، به گونه‌ای که در شکل (۴-۱۶-ب) نشان داده شده است، جایگزین نموده و سعی میکنیم مکان و اندازه Q' را طوری بیابیم که سطح هم پتانسیلی با پتانسیل صفر در محل سطح کره هادی بوجود آورد. از تقارن مسأله میتوان دریافت که اگر چنین تصویری موجود باشد باید روی خطی که Q را به مرکز کره وصل میکند قرار بگیرد. برای یافتن Q' و b میتوان ابتدا پتانسیل را در نقاط A_1 و A_2 برابر صفر قرار داد:

$$V_{A_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{D+a} + \frac{Q'}{a+b} \right) = 0 \quad (۴-۱۲۰)$$

$$V_{A_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{D-a} + \frac{Q'}{a-b} \right) = 0 \quad (۴-۱۲۱)$$

پس از حل دو معادله مذکور برای Q' و b داریم:

$$Q' = -\frac{a}{D}Q, \quad b = \frac{a^2}{D} \quad (۴-۱۲۲)$$



(ج)

(ب)

(الف)

شکل (۴-۱۶) بار نقطه‌ای در مقابل یک کره هادی و نحوه مطالعه میدان به روش تصویر (الف). بار نقطه‌ای Q به فاصله D از مرکز کره‌ای هادی به شعاع a (ب) تصویر Q' در درون کره (ج) محاسبه پتانسیل در نقطه دلخواه A

اکنون باید دید آیا پتانسیل ناشی از Q و تصویر آن Q' در نقطه دلخواه A_3 روی سطح کره برابر صفر میشود؟ پتانسیل در نقطه A_3 عبارت است از:

$$V_{A_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (123-4)$$

که در آن:

$$r_1 = (D^2 + a^2 + 2Da \cos \theta)^{1/2}, \quad r_2 = (b^2 + a^2 + 2ba \cos \theta)^{1/2} \quad (124-4)$$

میتوان نشان داد که پس از جایگزین نمودن r_1 و r_2 با استفاده از روابط (۱۲۴-۴) و بکار بستن نتایج (۱۲۲-۴)، V_{A_2} برابر صفر است. به عبارت دیگر، بارهای Q و Q' سطح هم پتانسیلی به مقدار صفر در محل سطح کره بوجود می‌آورند. اکنون میتوان پتانسیل نقطه دلخواه A را واقع در فضای اطراف کره به شرح زیر نوشت:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_3} - \frac{(a/D)Q}{4\pi\epsilon_0 r_4} \quad (125-4)$$

که در آن:

$$r_3 = (D^2 + r^2 + 2Dr \cos \theta)^{1/2} \quad (الف-126-4)$$

$$r_4 = \left[\left(\frac{a}{D} \right)^2 + r^2 + 2 \frac{a}{D} r \cos \theta \right]^{1/2} \quad (ب-126-4)$$

همانند مثال قبل میتوان میدان الکتریکی را از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ و چگالی توزیع بارهای القایی روی سطح کره را از رابطه $\rho_s = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 E_r$ به ازای $r=a$ بدست آورد که در اینجا از ذکر جزئیات محاسبات خودداری میشود. در صورتی که کره از ابتدا زمین نشده و پتانسیلی برابر V_0 داشته باشد، برای یافتن تابع پتانسیل، کره را با بار تصویری Q' ، به طریقی که در بالا مشخص گردید، جایگزین نموده و آنگاه تصویر دومی که بار آن برابر $Q'' = 4\pi\epsilon_0 a V_0$ باشد در مرکز کره قرار میدهم تا پتانسیل سطح کره تا حد V_0 افزایش یابد.

بطوری که در مثالهای مزبور مشاهده کردیم تصاویر بارهای مثبت بارهای منفی بوده و در خارج ناحیه‌ای که محاسبه میدان در آن مورد نظر است قرار میگیرند. روش تصویر را میتوان برای انواع دیگر توزیع بار، از قبیل توزیعهای خطی، سطحی و حجمی نیز بکار برد. بعنوان مثال تصویر یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع ρ_1 در یک صفحه هادی، خط بار دیگری است با چگالی $-\rho_1$ بطوریکه خط بار و تصویرش موازی با یکدیگر، به فاصله مساوی از صفحه هادی و در طرفین آن باشند. روش تصویر را همچنین میتوان در حل مسائلی مانند بار نقطه‌ای در مقابل یک نیم فضای اشغال شده از ماده عایق و بار نقطه‌ای در مقابل کره‌ای از جنس عایق بکار بست. بررسی مثالها و موارد دیگر مبتنی بر روش تصویر به مسائل پایان فصل موكول می‌گردد.

■ خلاصه فصل

- معادلات پواسون و لاپلاس را استخراج نموده و قضیه یگانگی جواب را اثبات کردیم.
- حل معادله لاپلاس را در حالات یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی و در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی مورد مطالعه قرار دادیم. در حالات دو بعدی و سه بعدی، حل معادله بر اساس روش جداسازی متغیرها استوار می‌باشد.
- حل معادله لاپلاس را به روش عددی به اختصار بررسی نمودیم.
- حل معادله پواسون را به اختصار و در حالت یک بعدی مطالعه نمودیم.
- روش تصویر را برای مطالعه میدانهای الکتریکی ناشی از بارهای الکتریکی در حضور اجسام هادی ارائه نمودیم.

■ مسائل

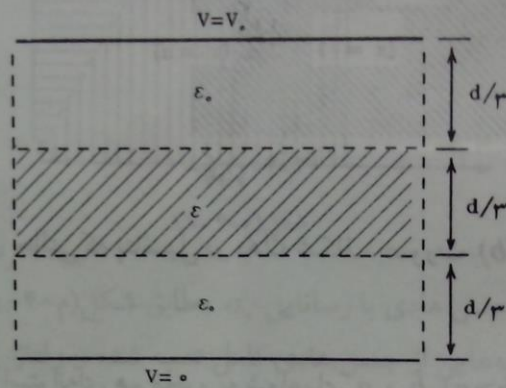
۱-۴ یک سوم از فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی با ماده عایقی که قابلیت گذردهی آن برابر ϵ میباشد اشغال گردیده است. شکل (م-۴-۱) صفحات هادی و عایق بین آنها را نشان می دهد. پتانسیل صفحات هادی تحتانی و فوقانی بترتیب برابر صفر و V_0 می باشد. مطلوب است محاسبه:

الف) پتانسیل در کلیه نقاط بین دو صفحه هادی،

ب) چگالی توزیع بار سطحی روی صفحه هادی تحتانی،

ج) چگالی توزیع بار سطحی مقید روی سطح فوقانی عایق،

د) ظرفیت به ازای واحد سطح صفحات هادی.



شکل (م-۴-۱)

۲-۴ در مسأله (۱-۴)، جسم عایق با یک جسم هادی کامل جایگزین می گردد. مطلوب است محاسبه:

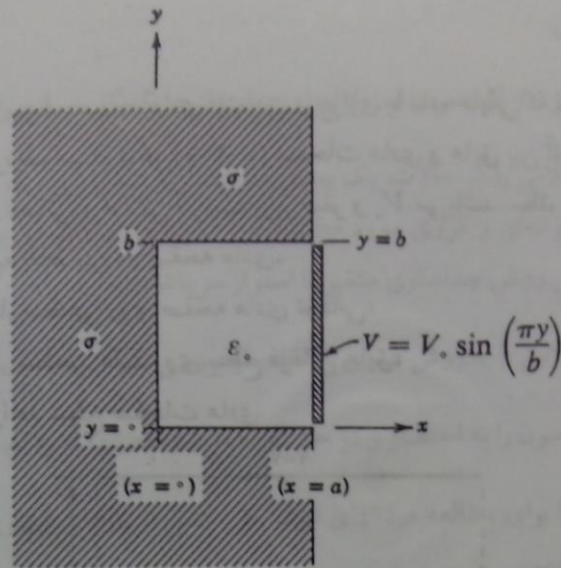
الف) پتانسیل جسم هادی،

ب) ظرفیت به ازای واحد سطح صفحات هادی.

۳-۴ شکافی مستطیلی شکل به پهنای b و عمق a ، مطابق شکل (م-۴-۳)، در یک قطعه فلزی با پتانسیل صفر تعبیه میگردد. پتانسیلی که توزیع آن در محدوده $0 < y < b$ ، بصورت $V = V_0 \sin(\pi y/b)$ باشد در دهانه شکاف در $x = a$ ایجاد میشود. با فرض آنکه قطعه فلزی هادی کامل بوده و شکاف مزبور در امتداد z تا بینهایت ادامه داشته باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) تابع توزیع پتانسیل و میدان الکتریکی در درون شکاف،

ب) چگالی توزیع بارهای سطحی موجود در این سیستم.



شکل (۴-۳-۴)

۴-۴ مسأله (۳-۴) را برای حالتی که پتانسیل در دهانه شکاف بصورت $V = V_0 \sin^2(\pi y/b)$ باشد تکرار نمایید.

۵-۴ فضای بین دو سطح استوانه‌ای هم محور به شعاعهای a و b ($b > a$)، به طول بینهایت و از جنس هادی کامل را دو ماده عایق با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 به شرح زیر پر میکنند: ناحیه $a < r < c$ شامل عایق ϵ_1 و ناحیه $c < r < b$ شامل عایق ϵ_2 است. پتانسیل استوانه‌های درونی و بیرونی بترتیب برابر V_0 و صفر فرض میشود. مطلوب است محاسبه:

الف) تابع پتانسیل در تمام نقاط بین سطوح استوانه‌ای،
 ب) ظرفیت سیستم به ازای واحد طول.

۶-۴ فضای بین دو سطح استوانه‌ای مسأله (۵-۴) با همان عایقها ولی به گونه دیگری به شرح زیر پر می‌شود: ناحیه $0 < \varphi < \pi$ شامل عایق ϵ_1 و ناحیه $\pi < \varphi < 2\pi$ شامل عایق ϵ_2 میباشد. استوانه‌های هادی همان پتانسیلهای مسأله (۵-۴) را دارا هستند. پتانسیل در تمام نقاط بین سطوح استوانه‌ای و ظرفیت سیستم به ازای واحد طول را محاسبه نمایید.

۷-۴ دو نیم صفحه هادی $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi/2$ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به ترتیب دارای پتانسیلهای صفر و V_0 میباشد. ناحیه $0 < \varphi < \pi/3$ را عایق کاملی با قابلیت گذردهی ϵ_1 و ناحیه $\pi/3 < \varphi < \pi/2$ را عایق دیگری با قابلیت گذردهی ϵ_2 فراگرفته است. شکل (۴-۷-۴) صفحات

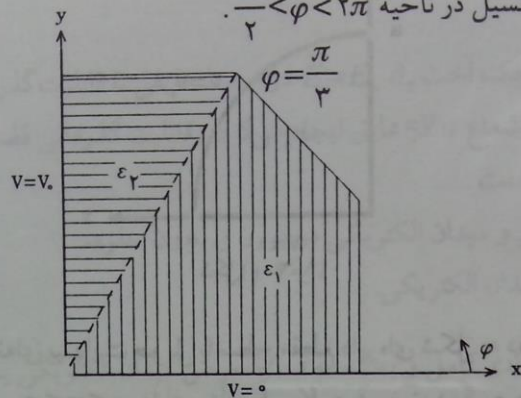
هادی و نواحی عایق را نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبه:

(الف) تابع تغییرات پتانسیل در فضای بین دو نیم صفحه هادی $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ ،

(ب) شدت میدان الکتریکی در فضای مذکور در بند (الف)،

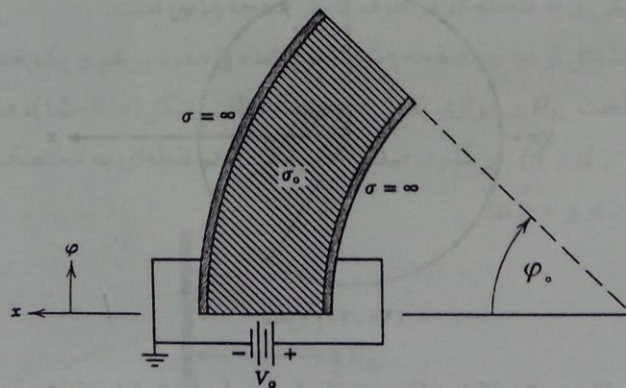
(ج) چگالی سطحی بارهای مقید ناشی از قطبی شدن عایقها در مرز $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ،

(د) تابع تغییرات پتانسیل در ناحیه $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi$.



شکل (۷-۴-۲)

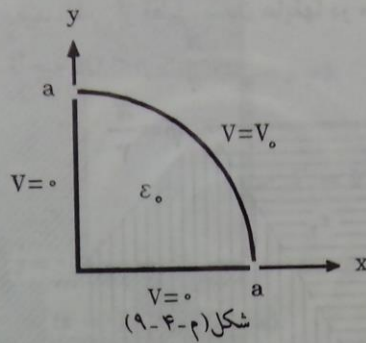
۸-۴ صفحه‌ای نازک از جنس هادی با رسانایی σ مطابق شکل (۸-۴-۲) بریده شده است. در دو طرف خمیده صفحه لایه‌هایی از جنس هادی کامل تعبیه شده و ولتاژ V_0 به آنها اعمال میگردد. تغییرات پتانسیل در این صفحه و مقاومت آن را تعیین نمایید. ضخامت صفحه را Δ و شعاع لایه‌های هادی کامل درونی و بیرونی را به ترتیب برابر R_1 و R_2 فرض کنید.



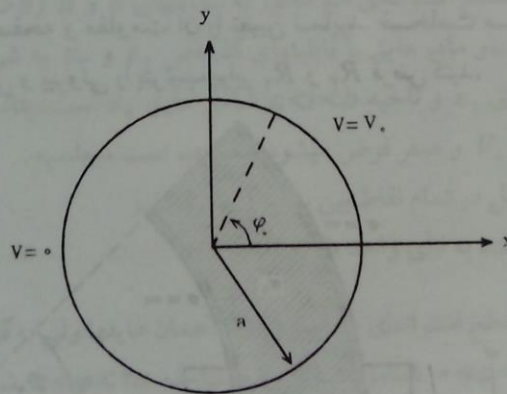
شکل (۸-۴-۲)

۹-۴ یک محفظه استوانه‌ای شکل به سطوح هادی $\varphi = \pi/2$ و $\varphi = 0$ با پتانسیل صفر و سطح $r = a$ با پتانسیل V_0 محدود می‌باشد. محفظه در امتداد محور z از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و فضای

درون آن خلاء است. شکل (م-۴-۹) سطح مقطع محفظه را نشان میدهد. مطلوب است محاسبه:
 الف) تابع تغییرات پتانسیل در درون محفظه،
 ب) میدان الکتریکی در درون محفظه و چگالی بار سطحی روی سطح هادی $r=a$.



۱۰-۴ یک سطح استوانه‌ای بینهایت طویل با سطح مقطع دایره‌ای شکل به دو قسمت تقسیم میشود. یک قسمت محدود به $0 < \varphi < \varphi_0$ دارای پتانسیل V_0 و قسمت دیگر محدود به $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$ دارای پتانسیل صفر میباشد. شعاع استوانه برابر a و فضای درون و بیرون استوانه خلاء فرض میشود. تابع پتانسیل را در کلیه نقاط فضا (هم در درون و هم در بیرون سطح استوانه‌ای) تعیین نمایید. شکل (م-۴-۱۰) سطح مقطع استوانه و پتانسیلهای دو قسمت آن را نشان میدهد.



۱۱-۴ یک استوانه عایق بینهایت طویل و به شعاع a ، مطابق شکل (۴-۷-الف)، بطور عمودی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = E_0 \hat{a}_x$ قرار داده می‌شود. پتانسیل و میدان الکتریکی را در درون و بیرون استوانه عایق محاسبه نمایید. قابلیت گذردهی نسبی استوانه عایق برابر ϵ_r فرض می‌شود.

۱۴-۴ در یک محفظه نیمکره‌ای پتانسیل سطح کره‌ای برابر

$$V = V_0 \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad r = a$$

و پتانسیل صفحه مسطح (قاعده محفظه) برابر صفر میباشد. پتانسیل نقاط درون محفظه را تعیین نمایید.

۱۴-۴ میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = E_0 \hat{a}_z$ در محیط عایقی با قابلیت گذردهی ϵ مفروض است. حفره‌ای کره‌ای شکل به شعاع a در عایق ایجاد می‌گردد. قابلیت گذردهی فضای درون حفره برابر ϵ_0 فرض میشود. مطلوب است:

(الف) تعیین پتانسیل و میدان الکتریکی در درون و بیرون حفره،

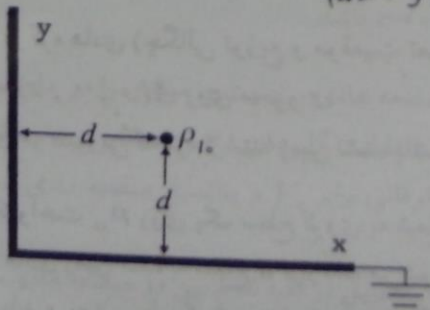
(ب) رسم خطوط میدان الکتریکی.

۱۴-۴ کره‌ای از جنس هادی کامل و به شعاع a در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = E_0 \hat{a}_z$ مطابق شکل (۴-۹-الف)، قرار داده میشود. میدان الکتریکی را در فضای اطراف کره هادی تعیین نمایید.

۱۵-۴ یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع یکنواخت ρ_{l_0} به فاصله d از یک صفحه هادی بینهایت زمین شده قرار دارد.

(الف) نشان دهید که تصویر خط بار در صفحه هادی، خط بار دیگری با چگالی توزیع $-\rho_{l_0}$ موازی با خط بار اصلی و به فاصله d در طرف دیگر صفحه هادی است.

(ب) سیستمی متشکل از دو نیم صفحه هادی زمین شده و عمود بر هم و یک خط بار بینهایت با چگالی توزیع یکنواخت ρ_{l_0} و موازی با نیم صفحه‌ها، مطابق شکل (۴-۱۵-م)، در نظر می‌گیریم. خط بار از نقطه $(d, d, 0)$ می‌گذرد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به مختصات (a, a, z) محاسبه نمایید. ($d > 0$ و $a > 0$)



۱۶-۴ بار نقطه‌ای Q به فاصله d از یک صفحه هادی بینهایت قرار دارد. چه مقدار انرژی باید صرف شود برای اینکه بار Q به نقطه‌ای به فاصله $2d$ از صفحه هادی انتقال یابد؟ مسیر حرکت بار نقطه‌ای را در امتداد عمود بر صفحه فرض کنید.

۱۷-۴ خط باری به طول بینهایت و با چگالی یکنواخت ρ_1 به موازات و به فاصله d از محور یک استوانه هادی زمین شده، به طول بینهایت و به شعاع a قرار دارد ($a < d$). مطلوب است:

الف) تعیین تصویر خط بار و محاسبه پتانسیل در فضای اطراف استوانه هادی،

ب) محاسبه ظرفیت به ازای واحد طول یک خط انتقال متشکل از دو سیم موازی استوانه‌ای که شعاع هر یک برابر a و فاصله محورهایشان از یکدیگر برابر $2d$ باشد. (راهنمایی: از نتایج قسمت الف) استفاده کنید و استوانه‌های موازی را با دو خط بینهایت بار با چگالیهای ρ_1 و $-\rho_1$ در مکانهای مناسبی جایگزین نمایید.

۱۸-۴ بار نقطه‌ای q به فاصله d از مرکز کره‌ای هادی به شعاع a قرار دارد ($d > a$). کره هادی، باری به مقدار کل Q روی سطح خود دارد. مطلوب است:

الف) مکان و مقدار دو بار نقطه‌ای بطوری که بتوان آنها را با کره جایگزین کرد بدون آنکه تغییری در پتانسیل ناشی از این سیستم در فضای اطراف کره پدید آید،

ب) محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی در فضای اطراف کره،

ج) تعیین پتانسیل کره.

۱۹-۴ سیستمی متشکل از یک کره هادی به شعاع a و یک حلقه بار الکتریکی که هم مرکز با کره هادی است در نظر می‌گیریم. حلقه بار دارای چگالی توزیع یکنواخت ρ_1 و شعاع b ($a < b$) میباشد. جهت سهولت، حلقه بار در صفحه xy و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات در نظر گرفته می‌شود. فضای اطراف کره هادی و حلقه بار را خلاء تشکیل می‌دهد. ابتدا فرض می‌شود که کره هادی زمین شده باشد. مطلوب است:

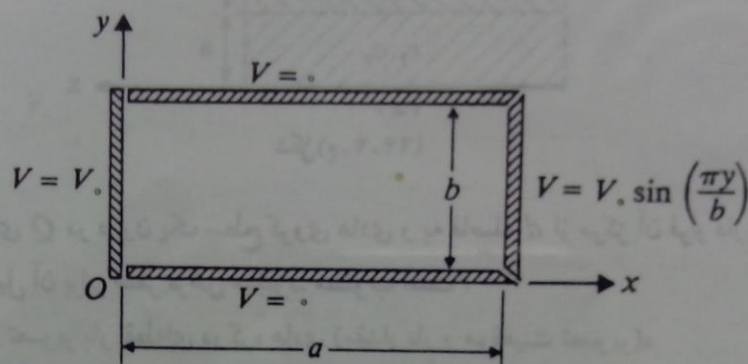
الف) تعیین تصویر حلقه بار در کره هادی (چگالی توزیع و موقعیت تصویر)،

ب) محاسبه پتانسیل در نقطه $A(0, 0, z)$ روی محور z ،

ج) محاسبه پتانسیل کره هادی در صورتی که کره از ابتدا زمین نشده باشد.

۲۰-۴ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ_1 روی یک سطح کروی به شعاع b توزیع شده است. هم مرکز با این توزیع بار یک کره هادی زمین شده به شعاع a قرار داده می‌شود. چه مقدار انرژی لازم است تا توزیع بار مزبور انبساط یابد و روی سطح کره‌ای به شعاع c قرار بگیرد؟ فضای اطراف کره

هادی را خلاء تشکیل می دهد ($a < b < c$).
 شکل (م-۴-۲۱) سطح مقطع یک فضای مستطیلی شکل محدود به سه سطح هادی در $x=0$ ، $y=0$ و $y=b$ و یک سطح مجازی در $x=a$ را نشان می دهد. پتانسیل سطح هادی در $x=0$ برابر V_0 ، پتانسیل سطوح $y=0$ و $y=b$ برابر صفر و پتانسیل در امتداد سطح $x=a$ به صورت $V_0 \sin(\pi y/b)$ فرض می شود. تابع پتانسیل را در درون فضای مستطیلی شکل تعیین نمایید. (راهنمایی: ثابت کنید که اصل جمع آثار را میتوان برای شرایط مرزی در حل معادله لاپلاس بکار برد).



شکل (م-۴-۲۱)

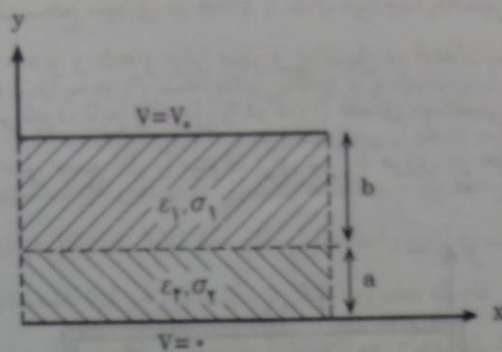
۲۲-۴ یک جعبه مکعب مستطیل، که کلیه وجوه آن از صفحات هادی تشکیل شده باشند، را در نظر بگیرید. پتانسیل سطح $z=c$ برابر V_0 و پتانسیل هر یک از وجوه دیگر برابر صفر است. تابع پتانسیل را در نقاط درون جعبه تعیین نمایید.

۲۳-۴ یک بار الکتریکی با چگالی $\rho = k/(r^{5/2})$ در خلاء توزیع شده است. k یک ضریب ثابت و r مختصه شعاعی در دستگاه مختصات کروی است. تابع پتانسیل ناشی از این توزیع بار را با استفاده از معادله پواسون تعیین نمایید. در تعیین پتانسیل فرض کنید $V \rightarrow 0$ وقتی که $r \rightarrow \infty$ بوده و نیز $r^2 E_r \rightarrow 0$ وقتی که $r \rightarrow 0$ باشد.

۲۴-۴ فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی را دو ماده، یکی با قابلیت گذردهی ϵ_1 و رسانایی σ_1 و دیگری با قابلیت گذردهی ϵ_2 و رسانایی σ_2 ، مطابق شکل (م-۴-۲۴)، پر کرده اند. پتانسیل صفحه هادی فوقانی برابر V_0 و پتانسیل صفحه هادی تحتانی برابر صفر میباشد. مطلوب است محاسبه:

الف) تابع تغییرات پتانسیل در کلیه نقاط بین دو صفحه هادی،

ب) مقاومت سیستم به ازای واحد سطح صفحات هادی،
 ج) ظرفیت سیستم به ازای واحد سطح صفحات هادی.



شکل (۲-۴-۱۶)

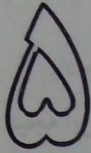
۲۵-۴ بار نقطه‌ای Q در درون یک سطح کروی هادی و به فاصله d از مرکز آن قرار دارد. شعاع کره برابر a و پتانسیل آن برابر صفر فرض می‌شود. مطلوب است:

الف) تعیین تصویر بار نقطه‌ای در کره هادی (مقدار بار و موقعیت تصویر)،
 ب) محاسبه تغییرات پتانسیل در درون کره.

۲۶-۴ دو کره هادی یکسان به شعاع a و فاصله d بین مراکز آنها مفروضند. پتانسیل یکی از کره‌ها V_0 و پتانسیل دیگری برابر صفر فرض می‌شود.

الف) دو توزیع بار نقطه‌ای تصویر بیابید که کره‌های هادی را جایگزین نمایند. (یعنی پتانسیل ناشی از این دو بار تصویر فقط در فضای اطراف کره‌ها مساوی پتانسیل ناشی از خود کره‌ها با اختلاف پتانسیل V_0 باشد.)

ب) ظرفیت بین دو کره هادی را بدست آورید.



میدان مغناطیسی ساکن در خلاء

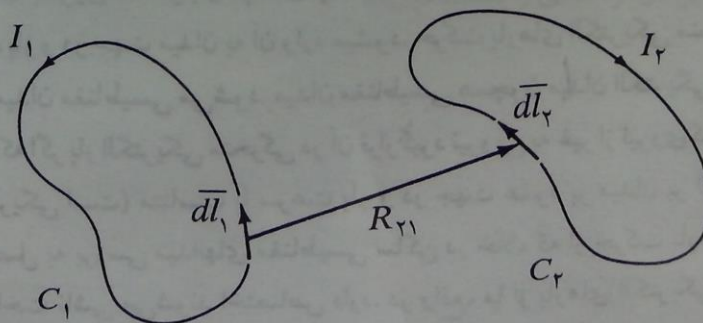
همانطور که در آغاز فصل دوم بیان گردید، منشأ کلیه پدیده‌های الکترومغناطیس بارهای الکتریکی هستند. مطالعات ما تا کنون به بارهای الکتریکی ساکن محدود بوده و این نتیجه کلی را در برداشته است که بارهای ساکن فقط تولید میدان الکتریکی میکنند. میدان الکتریکی در واقع یک میدان نیرو است بطوری که اگر بار نقطه‌ای q در آن قرار گیرد، نیرویی برابر حاصل ضرب شدت میدان در اندازه بار و در جهت میدان به آن وارد میشود. حرکت بارهای الکتریکی منجر به بروز پدیده دیگری به نام میدان مغناطیسی می‌شود. میدان مغناطیسی همچون میدان الکتریکی یک میدان نیرو است، بطوری که اگر بار الکتریکی متحرکی در آن قرار گیرد نیرویی به غیر از نیروی کولمب (که عامل آن میدان الکتریکی است) متناسب با سرعت بار و در جهت عمود بر میدان بر آن اعمال میشود. مطالب این فصل به بررسی میدانهای مغناطیسی ساکن در خلاء که از حرکت بارهای الکتریکی با سرعت یکنواخت ناشی می‌شوند اختصاص دارد. در واقع، ما از بارهای الکتریکی ساکن شروع کردیم و ملاحظه نمودیم که آنها مولد میدانهای الکتریکی ساکن هستند. در این فصل نشان خواهیم داد که حرکت یکنواخت بارهای الکتریکی پدیده دومی را که همان میدان مغناطیسی ساکن است

باعث می‌گردد. میدانهای متغیر با زمان و پدیده تشعشع را که از حرکت شتاب‌دار بارهای الکتریکی ناشی میشوند، پس از دست یافتن به معادلات ماکسول، در فصل آخر مورد مطالعه قرار خواهیم داد. حرکت بارهای الکتریکی تولید جریان الکتریکی میکند. بنابراین، میتوان گفت که جریانهای الکتریکی منشأ میدانهای مغناطیسی هستند. جریانهای الکتریکی ممکن است از نوع همرفتی که از حرکت بارهای آزاد در خلاء پدید می‌آیند، از نوع هدایتی که از حرکت الکترونها در هادیها یا الکترونها و حفره‌ها در نیمه‌هادیها بوجود می‌آیند یا از انواع دیگری از قبیل جریان پلاریزاسیون باشند. با این وجود مطالعات ما در این فصل به نوع جریانها بستگی نداشته و لذا تفکیک آنها از یکدیگر ضروری نخواهد بود و نتایج بدست آمده را میتوان برای هر یک از انواع جریانها بکار برد.

۱-۵) نیروی مغناطیسی بین دو مدار جریان

بیاد می‌آوریم که بررسی میدانهای الکتریکی ساکن با تشریح قانون تجربی کولمب آغاز گردید و نتیجه این قانون که بصورت رابطه (۱-۲) برای بیان نیروی بین دو بار الکتریکی نقطه‌ای خلاصه شد در حقیقت اساس تمامی مطالعات ما در ارتباط با میدانهای الکتریکی ساکن، که طی سه فصل قبل انجام پذیرفت، بود. در اینجا نیز مبحث میدانهای مغناطیسی ساکن را با مطالعه یک قانون تجربی موسوم به **قانون نیروی آمپر**، که مشابه قانون کولمب میباشد، شروع می‌کنیم. این قانون برای بیان نیروهای مغناطیسی که دو مدار حامل جریان بر یکدیگر وارد می‌آورند بکار میرود. بر اساس مطالعات تجربی آمپر اگر دو مدار بسته C_1 و C_2 ، مطابق شکل (۱-۵)، حامل جریانهای I_1 و I_2 باشند، نیرویی که جریان I_1 بر مدار C_2 اعمال میکند از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\vec{F}_{21} = \oint_{C_1} \oint_{C_2} k \frac{I_2 \vec{dl}_2 \times (I_1 \vec{dl}_1 \times \hat{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2} \quad (1-5)$$



شکل (۱-۵) دو مدار حامل جریانهای I_1 و I_2 برای بیان قانون نیروی آمپر

که $d\bar{l}_1$ و $d\bar{l}_2$ بترتیب بردارهای عنصر طول در مدارهای C_1 و C_2 بوده، R_{21} فاصله بین دو عنصر طول، $\hat{a}_{R_{21}}$ بردار واحد در جهت $d\bar{l}_1$ به $d\bar{l}_2$ و k یک ضریب ثابت است. این ضریب ثابت در سیستم آحاد *M.K.S.* و برای خلاء برابر $\mu_0/4\pi$ است که μ_0 را قابلیت نفوذ (مغناطیسی) یا قابلیت تراوایی خلاء نامند و مقدار آن برابر $4\pi \times 10^{-7}$ هانری بر متر میباشد. عبارت زیر انتگرال دوگانه در رابطه (۱-۵) در واقع نیرویی است که عنصر جریان $I_1 d\bar{l}_1$ بر عنصر جریان $I_2 d\bar{l}_2$ وارد میسازد، یعنی:

$$d\bar{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\bar{l}_1 \times (I_2 d\bar{l}_2 \times \hat{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2} \quad (۲-۵-الف)$$

بررسی رابطه (۲-۵-الف) نشان میدهد که:

الف) اندازه نیرو متناسب با حاصل ضرب جریانهای آنها است.

ب) اندازه نیرو با عکس مجذور فاصله بین دو عنصر جریان متناسب است.

ج) برای تعیین جهت نیرو باید ابتدا ضرب خارجی $d\bar{l}_1 \times \hat{a}_{R_{21}}$ را انجام داد و سپس بردار نتیجه را در $d\bar{l}_2$ ضرب خارجی کرد. بنابراین وجود پرانتز در سمت راست رابطه (۲-۵-الف) بسیار مهم است، زیرا قانون شرکت پذیری برای ضرب خارجی صادق نیست.

اگر عنصر جریان را برای میدان مغناطیسی، نظیر بار نقطه‌ای برای میدان الکتریکی بدانیم، تشابه رابطه (۲-۵-الف) و خواص آن با رابطه (۱-۲) روشن میشود. با تعویض $I_1 d\bar{l}_1$ با $I_2 d\bar{l}_2$ و $\hat{a}_{R_{21}}$ با $\hat{a}_{R_{12}}$ نیروی اعمال شده بر $I_1 d\bar{l}_1$ توسط $I_2 d\bar{l}_2$ بصورت زیر نوشته میشود:

$$d\bar{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\bar{l}_2 \times (I_1 d\bar{l}_1 \times \hat{a}_{R_{12}})}{R_{12}^2} \quad (۲-۵-ب)$$

در رابطه (۲-۵-ب) تساوی $R_{12} = R_{21}$ نیز مورد استفاده قرار گرفته است. باید توجه نمود که $d\bar{F}_{12}$ الزاماً مساوی با $-d\bar{F}_{21}$ نیست. این امر ممکن است موجب نگرانی گردیده و اینطور تصور شود که قانون سوم نیوتن، که برابری نیروهای عمل و عکس‌العمل را بیان میکند، نقض میشود. اما با توجه به اینکه عناصر جریان بطور مجزا وجود خارجی ندارند، مساوی نبودن $d\bar{F}_{12}$ با $-d\bar{F}_{21}$ به هیچ نحو ناقض قانون سوم نیوتن نبوده و آنچه که باید از این قانون تبعیت کند و میکند برابری اندازه‌های نیروهای اعمال شده به مدارهای کامل C_1 و C_2 است. اثبات تساوی $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ به مسأله (۱-۵) موکول میگردد.

تمرین: با ذکر یک مثال نشان دهید که $d\vec{F}_{12}$ الزاماً مساوی با $-d\vec{F}_{21}$ نیست.

۲-۵) قانون بیو-ساوار

همانگونه که در مقدمه این فصل بیان گردید، بارهای الکتریکی متحرک یا جریانهای الکتریکی تولید میدانهای مغناطیسی میکنند و ویژگی میدان مغناطیسی بعنوان یک میدان نیرو در این است که وقتی بارهای متحرک در آن قرار گیرند بر آنها نیرو اعمال میشود. از طرف دیگر قانون نیروی آمپر نشان داد که دو مدار حامل جریان بر یکدیگر نیرو وارد می‌آورند. نیرویی که یک جریان بر جریان دیگر وارد می‌سازد در حقیقت نیرویی است که میدان مغناطیسی ناشی از جریان اول بر جریان دوم، یعنی بارهای متحرک در مدار دوم، وارد میکند. برای تعیین میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 رابطه (۱-۵) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= \oint_{c_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{c_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2} \\ &= \oint_{c_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1\end{aligned}\quad (3-5)$$

که \vec{B}_1 عبارت است از:

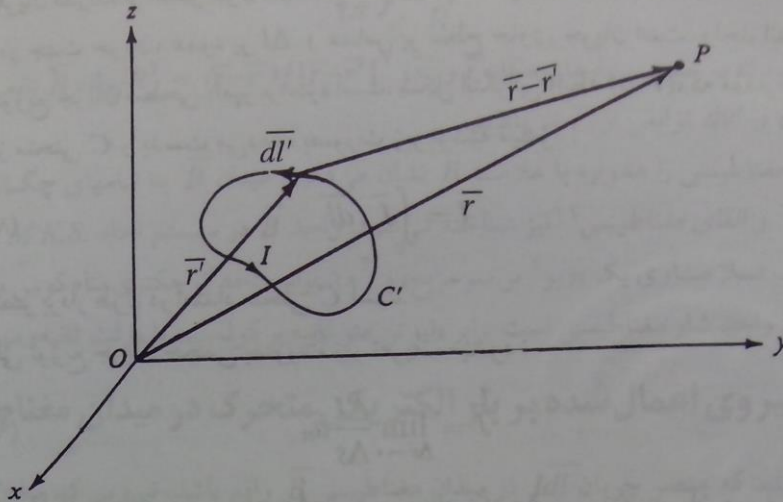
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2} \quad (4-5)$$

\vec{B}_1 را میتوان میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 در محل عنصر طول $d\vec{l}_1$ دانست. با حذف اندیس‌ها از رابطه (۴-۵)، میدان مغناطیسی حاصل از جریان I در نقطه دلخواه P با توجه به شکل (۲-۵) بصورت زیر خلاصه میشود:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c'} \frac{I d\vec{l}' \times \hat{a}_R}{R^2} \quad (5-5)$$

رابطه (۵-۵) به قانون بیو-ساوار موسوم است. اگر مطابق شکل (۲-۵)، بردارهای مکان \vec{r} و \vec{r}' را بترتیب برای بیان موقعیت نقاط میدان و نقاط منبع بکار ببریم، رابطه (۵-۵) را میتوان بصورت زیر نوشت:

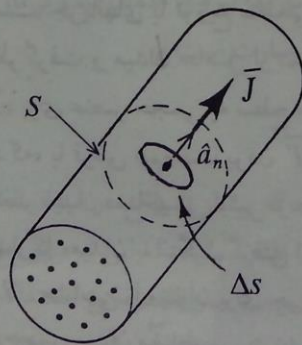
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c'} \frac{I d\vec{l}'(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6-5)$$



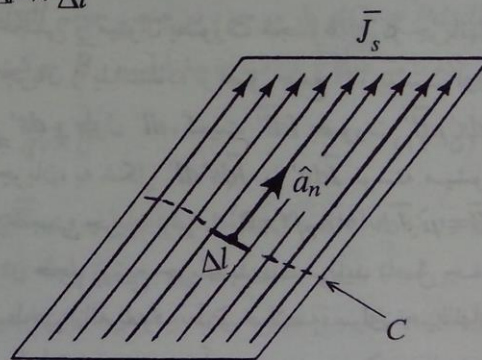
شکل (۲-۵) جریان I در مدار C' و نحوه محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن در نقطه P

روابط (۵-۵) و (۶-۵) میدان مغناطیسی ناشی از جریانهایی که مثلاً در رشته‌های نازک سیمی باشند و ما از آنها بعنوان جریانهای الکتریکی با توزیع خطی یاد می‌کنیم، را بدست میدهد. جریانهای الکتریکی ممکن است روی یک سطح یا در یک حجم به گونه‌ای که در شکل (۳-۵) نشان داده شده است نیز توزیع گردند. چگالیهای توزیع جریان در این حالات کمیت‌های برداری هستند. چگالی توزیع جریان سطحی با \bar{J}_s نشان داده شده و بصورت زیر تعریف میشود:

$$\bar{J}_s = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \hat{a}_n \quad (۷-۵)$$



(ب)



(الف)

شکل (۳-۵) جریانهای سطحی و حجمی (الف) جریان سطحی (ب) جریان حجمی

که Δl جریان گذرنده از عنصر طول Δl است بطوری که Δl بر جهت جریان عمود باشد و \hat{a}_n بردار واحدی در جهت جریان، عمود بر Δl و مماس بر سطح حاوی جریان است. واحد اندازه گیری چگالی توزیع جریان سطحی «آمپر بر متر» است. شکل انتگرالی رابطه (۵-۷)، که مقدار کل جریان گذرنده از منحنی C را بدست می دهد، بصورت زیر نوشته میشود:

$$I = \int_C \bar{J}_s \cdot d\bar{l} \quad (۸-۵)$$

که $d\bar{l}$ عنصر بردار طول در امتداد منحنی C است.

چگالی توزیع جریان حجمی بصورت زیر تعریف میشود:

$$\bar{J} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} \hat{a}_n \quad (۹-۵)$$

که ΔI جریان گذرنده از عنصر سطح Δs است در حالتی که Δs بر جهت جریان عمود باشد و \hat{a}_n بردار واحد عمود بر Δs و در جهت جریان است. واحد اندازه گیری \bar{J} «آمپر بر متر مربع» میباشد. شکل انتگرالی رابطه (۵-۹)، که مقدار کل جریان گذرنده از سطح S را بدست می دهد، بصورت زیر نوشته می شود:

$$I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} \quad (۱۰-۵)$$

میدان مغناطیسی ناشی از جریانهای سطحی و حجمی را میتوان با تعمیم رابطه (۵-۵) بدست آورد. در این رابطه کمیت دیفرانسیلی $\mu_0 Idl' \times \hat{a}_R / 4\pi R^2$ را میتوان به مثابه میدان مغناطیسی ناشی از جریان I در عنصر طول dl' تلقی نمود. توجه کنید که dl' در اینجا همواره هم جهت با جریان I است. جریانهای با توزیع سطحی و حجمی را میتوان بصورت مجموعه ای از جریانهای خطی در نظر گرفت و میدان حاصل از تمامی جریان را با استفاده از اصل جمع آثار بدست آورد. بعنوان مثال، برای عنصر حجمی به سطح مقطع ds' و طول dl' ، کمیت Idl' بصورت $(Jds')dl'$ بیان میشود که، با فرض هم جهت بودن dl' و جریان، به شکل $Jds'dl'$ یا Jdv' نوشته میشود. بنابراین، عنصر میدان مغناطیسی ناشی از عنصر حجمی جریان برابر با $d\bar{B} = \mu_0 Jdv' \times \hat{a}_R / 4\pi R^2$ است و مقدار کل میدان با انتگرال گرفتن از آن در حجم توزیع جریان بدست می آید (اصل جمع آثار). استدلال مشابهی را میتوان برای جریان سطحی ارائه نمود. بطور خلاصه، برای جریانهای سطحی و حجمی میدان مغناطیسی بترتیب از روابط زیر بدست می آید:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\bar{J}_s \times \hat{a}_R}{R^2} ds' \quad (۱۱-۵)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} dv' \quad (۱۲-۵)$$

تأکید میشود که بر حسب بردارهای مکان \vec{r} و \vec{r}' ، $\vec{R} = (\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$ ، \vec{B} تابعی از \vec{r} و \vec{J} ، \vec{J} ، ds' و dv' توابعی از \vec{r}' می‌باشند.

میدان مغناطیسی را همواره با علامت \vec{B} نشان می‌دهیم. میدان \vec{B} با نامهای چگالی شار مغناطیسی^۱ و القای مغناطیسی^۲ نیز شناخته می‌شود. واحد \vec{B} در سیستم آحاد *M.K.S.* تسلا^۳ نام دارد. یک تسلا مساوی یک ووبر^۴ بر متر مربع و 10^4 برابر واحد کوچکتری بنام گوس می‌باشد. ویر که خود واحد شار مغناطیسی است برابر وینون متر ثانیه بر کولمب یا ولت ثانیه می‌باشد.

۵-۳) نیروی اعمال شده بر بار الکتریکی متحرک در میدان مغناطیسی

فرض کنید که عنصر جریان Idl در میدان مغناطیسی \vec{B} واقع باشد. نیرویی که میدان \vec{B} بر عنصر جریان وارد میکند، با استفاده از رابطه (۵-۳) عبارت است از:

$$d\vec{F} = Idl \times \vec{B} \quad (۱۳-۵)$$

اگر جریان I از حرکت بارهای الکتریکی با چگالی حجمی ρ و سرعت \vec{v} پدید آمده باشد، کمیت Idl را بر حسب ρ و \vec{v} ، با استفاده از رابطه $\vec{J} = \rho\vec{v}$ که قبلاً در رابطه (۳-۱۰) بدست آورده‌ایم، میتوان بترتیب زیر نوشت:

$$Idl = \vec{J} dsdl = \rho \vec{v} dsdl = (\rho dsdl) \vec{v} = dQ \vec{v}$$

که $dQ = \rho dsdl$ بار موجود در عنصر حجم $dsdl$ است. لذا نیروی اعمال شده بر بار نقطه‌ای q وقتی که با سرعت \vec{v} در میدان مغناطیسی \vec{B} حرکت کند عبارت است از:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (۱۴-۵)$$

این نیرو که به دفعات از آن یاد کرده‌ایم با نیروی $\vec{F} = q\vec{E}$ ، که بر بار q واقع در میدان الکتریکی \vec{E} وارد می‌شود، بسیار متفاوت است. بررسی رابطه (۱۴-۵) نشان میدهد که این نیرو در جهت عمود بر میدان مغناطیسی عمل میکند و اندازه آن متناسب با سرعت بار الکتریکی است، در حالیکه نیروی الکتریکی هم جهت با میدان الکتریکی و مستقل از سرعت بار می‌باشد. بر خلاف نیروی

1 - Magnetic Flux Density

2 - Magnetic Induction

3 - Tesla

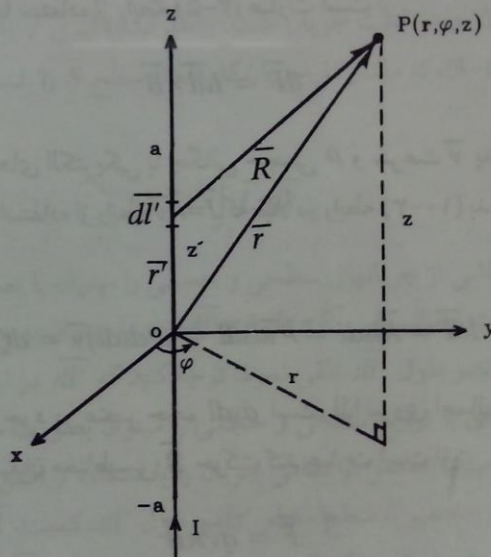
4 - Webber

الکتریکی که قادر به انجام کار است، نیروی مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد، زیرا این نیرو همواره بر جهت حرکت بار عمود است. بنابراین میدان مغناطیسی انرژی جنبشی بارهای الکتریکی متحرک را تغییر نمی‌دهد و فقط می‌تواند جهت حرکت آنها را عوض کند. اگر بار q با سرعت \vec{v} در محیطی حرکت کند که در آن میدان الکتریکی \vec{E} و میدان مغناطیسی \vec{B} هر دو موجود باشند، نیروی کل وارد آمده بر آن برابر است با:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (15-5)$$

رابطه (۱۵-۵) به نام رابطه نیروی لورنتز شناخته می‌شود.

مثال (۱-۵) یک سیم نازک حامل جریان ثابت I ، مطابق شکل (۴-۵)، در امتداد محور z قرار می‌گیرد. میدان مغناطیسی حاصل از قطعه‌ای از سیم که در فاصله $z = -a$ تا $z = a$ واقع است را بدست آورده و سپس میدان ناشی از یک سیم مستقیم به طول بینهایت را نتیجه‌گیری کنید.



شکل (۴-۵) یک قطعه سیم نازک حامل جریان ثابت در امتداد محور z و محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن

حل:

از رابطه (۶-۵) برای محاسبه میدان استفاده می‌کنیم و برای این منظور ابتدا بردارهای مکان \vec{r} و بردار $d\vec{l}'$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای که مناسب این مثال است بیان می‌کنیم. با توجه به شکل (۴-۵) میتوان نوشت:

$$\vec{r} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$$

$$\vec{r} = z' \hat{a}_z$$

$$d\vec{l}' = dz' \hat{a}_z$$

آنگاه:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = [r^2 + (z - z')^2]^{2/2}$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dz' \hat{a}_z \times [r \hat{a}_r + (z - z') \hat{a}_z] = r dz' \hat{a}_\phi$$

سرانجام:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{(r \hat{a}_\phi) dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I \hat{a}_\phi}{4\pi r} \frac{z - z'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \Big|_{-a}^a$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\frac{z + a}{\sqrt{r^2 + (z + a)^2}} - \frac{z - a}{\sqrt{r^2 + (z - a)^2}} \right] \hat{a}_\phi \quad (16-5)$$

برای یک سیم بینهایت طویل $a \rightarrow \infty$ است و میدان مغناطیسی حاصل برابر میشود با:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \quad (17-5)$$

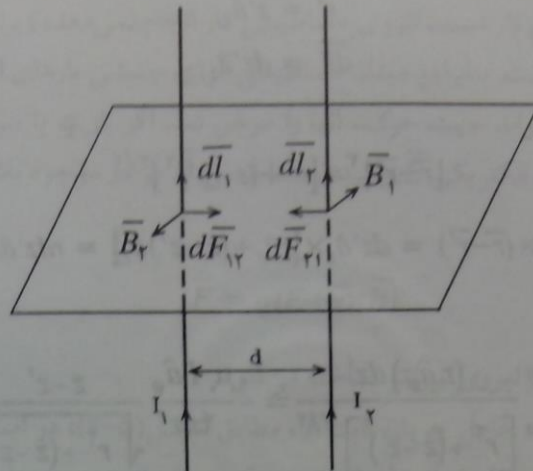
□

مثال (۱-۵) نشان میدهد که میدان مغناطیسی ناشی از سیم بینهایت طویل مستقیم و حامل جریان I مشابه میدان الکتریکی حاصل از یک خط بار بینهایت با چگالی توزیع یکنواخت است. مقایسه روابط (۲-۲۴) و (۱۷-۵) این نکته را روشن می‌سازد. در هر دو مورد میدان فقط به فاصله خط بار یا سیم جریان از نقطه‌ای که محاسبه میدان در آن مورد نظر است بستگی دارد. با داشتن رابطه (۱۷-۵) نیرویی که دو سیم طویل موازی حامل جریانهای I_1 و I_2 بر یکدیگر وارد میکنند را میتوان به سهولت بدست آورد. شکل (۵-۵) سیمهای موازی، بردارهای میدان و عناصر نیرو را نشان میدهد. نیروی وارد آمده بر عنصر طول $d\vec{l}_2$ عبارت است از:

$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

چون زاویه بین $d\vec{l}_2$ و \vec{B}_1 برابر ۹۰ درجه است داریم:

$$dF_{21} = I_2 dl_2 B_1 = I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$



شکل (۵-۵) دو سیم طویل موازی حامل جریانهای I_1 و I_2

لذا مقدار نیرو بر واحد طول برابر است با :

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \quad (۵-۱۸-الف)$$

به همین ترتیب میتوان نشان داد که :

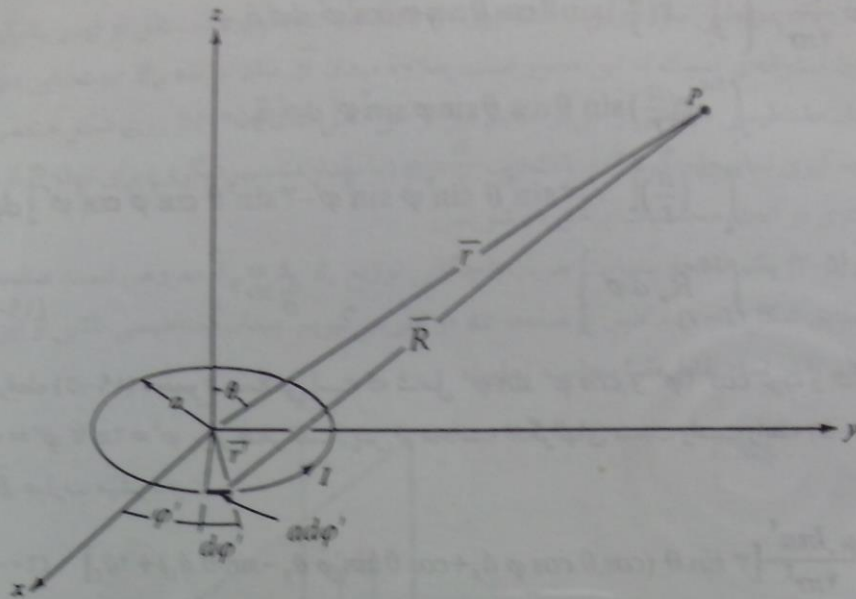
$$\frac{dF_{12}}{dl_1} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \quad (۵-۱۸-ب)$$

اگر دو جریان در یک جهت باشند نیروها جاذبه و اگر در جهت‌های مخالف باشند نیروها دافعه هستند. مثال (۵-۲) یک حلقه دایره‌ای شکل به شعاع a و حامل جریان I ، مطابق شکل (۵-۶)، طوری در صفحه xy قرار می‌گیرد که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد. چنین مداری به دوقطبی مغناطیسی^۱ موسوم است. می‌خواهیم میدان مغناطیسی ناشی از این دوقطبی را در فواصل دور از مرکز حلقه ($r \gg a$) بدست آوریم.

حل :

برای محاسبه میدان مغناطیسی از رابطه (۵-۶) استفاده کرده و ابتدا کمیت‌های \vec{dl}' ، \vec{r} ، \vec{r}' و $|\vec{r}-\vec{r}'|^3$ را به شرح زیر محاسبه میکنیم :

$$\vec{dl}' = a d\varphi' \hat{a}_\varphi = a d\varphi' (-\sin \varphi' \hat{a}_x + \cos \varphi' \hat{a}_y)$$



شکل (۶-۵) دوقطبی مغناطیسی و محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن در فواصل دور.

$$\vec{r} = a \cos \varphi' \hat{a}_x + a \sin \varphi' \hat{a}_y$$

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + r \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + r \cos \theta \hat{a}_z$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = a d\varphi' [r \cos \theta \cos \varphi' \hat{a}_x + r \cos \theta \sin \varphi' \hat{a}_y +$$

$$(a - r \sin \theta (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi')) \hat{a}_z]$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = [r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi')]^{3/2}$$

اکنون $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-2}$ را بر اساس شرط $\frac{a}{r} \ll 1$ بسط می‌دهیم:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-2} = \frac{1}{r^2} \left[1 - 2\left(\frac{a}{r}\right) \sin \theta (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi') + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right]^{-2/2}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[1 + 2\left(\frac{a}{r}\right) \sin \theta (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi') + \dots \right]$$

با بکار بردن نتایج مزبور در رابطه (۶-۵) و انتگرال گرفتن از $\varphi' = 0$ تا $\varphi' = 2\pi$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \cos^2 \varphi' d\varphi' \hat{a}_x + \right. \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r} \right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \sin^2 \varphi' d\varphi' \hat{a}_y + \\ \left. \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r} \right) [1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi' - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi'] d\varphi' \hat{a}_z + \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} R_0 d\varphi' \right\} \quad \frac{r}{a} \gg 1 \quad (19-5) \end{aligned}$$

R_0 در رابطه (۱۹-۵) مجموع جملاتی است که شامل $\cos \varphi' \sin \varphi'$ و $\cos 2\varphi'$ بوده و انتگرال آنها از $\varphi' = 0$ تا $\varphi' = 2\pi$ برابر صفر است. پس از محاسبه انتگرالهای سمت راست رابطه (۱۹-۵)، میدان \bar{B} عبارت میشود از:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3} [\sin \theta (\cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z) + 2\hat{a}_z] \quad (20-5)$$

اما چون $\hat{a}_z = \cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta$ و $\hat{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z$ است، میدان دوقطبی مغناطیسی سرانجام بصورت زیر خلاصه میشود:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) \quad (21-5)$$

□

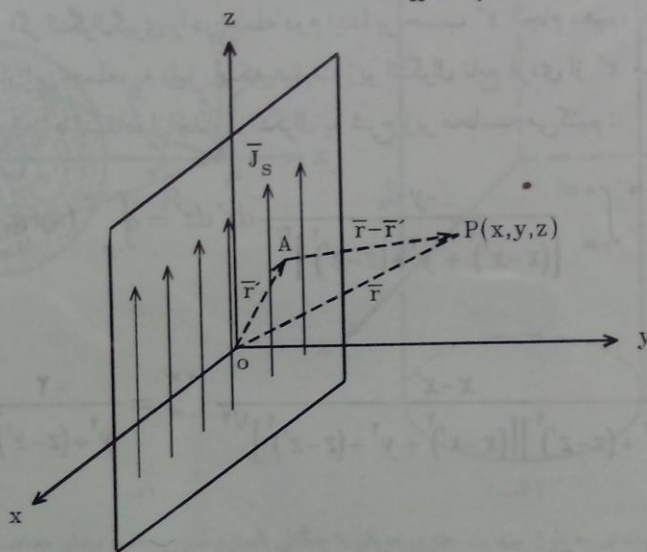
رابطه (۲۱-۵) را میتوان جواب میدان مغناطیسی ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی در فواصل بسیار دور در مقایسه با شعاع a یا جواب در هر نقطه دلخواه P دانست، مشروط بر آنکه شعاع حلقه به سمت صفر میل داده شده و همزمان کمیت $I\pi a^2$ ثابت نگهداشته شود. کمیت $m = I\pi a^2$ که برابر حاصل ضرب جریان دوقطبی در مساحت حلقه آن است، را گشتاور دوقطبی مغناطیسی می‌نامند. برای گشتاور مغناطیسی میتوان جهت عمود بر سطح حلقه و به سمت پیشروی یک پیچ راستگرد، وقتی که در جهت جریان چرخانیده شود، در نظر گرفت. با جایگزین نمودن m با $I\pi a^2$ در رابطه (۲۱-۵)، میدان یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور m و در جهت مثبت محور z بصورت زیر نوشته میشود:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) \quad (22-5)$$

میدان مغناطیسی در رابطه (۲۲-۵) مشابه میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور p و در جهت \hat{a}_z است که در رابطه (۱۵-۲) داده شده است. رابطه (۲۲-۵)، همچنین نشان میدهد که

میدان یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاوری در جهت مثبت محور z ، مستقل از φ و بنابراین دارای تقارن استوانه‌ای نسبت به این محور است. بعلاوه میدان \vec{B} فاقد مؤلفه \hat{a}_φ است. این دو ویژگی میدان مغناطیسی دو قطبی را می‌توانستیم قبل از حل کامل مثال (۲-۵) از روی شکل هندسی آن نیز نتیجه‌گیری نماییم (چگونه؟) و با انتخاب $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (یا مقدار مناسب دیگری) برای نقطه P از سهولت بیشتری در انجام محاسبات برخوردار شویم.

مثال (۳-۵) یک صفحه بینهایت جریان با چگالی توزیع $\vec{J}_s = J_s \hat{a}_z$ مفروض است. صفحه جریان را مطابق شکل (۷-۵) منطبق بر صفحه xz در نظر می‌گیریم. میدان مغناطیسی ناشی از این صفحه جریان را در تمام نقاط فضا محاسبه نماییم.



شکل (۷-۵) یک صفحه بینهایت حاوی جریان سطحی با توزیع یکنواخت

حل:

عنصر جریانی در نقطه $A(x', z')$ واقع در صفحه جریان در نظر می‌گیریم. میدان حاصل از این عنصر جریان در نقطه $P(x, y, z)$ عبارت است از:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s \hat{a}_z}{4\pi} \frac{\hat{a}_z \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' dz' \quad (۲۳-۵)$$

با نوشتن \vec{r} و \vec{r}' در دستگاه مختصات مستطیلی، $\hat{a}_z \times (\vec{r} - \vec{r}')$ و $|\vec{r} - \vec{r}'|^3$ بصورت زیر محاسبه میشوند:

$$\hat{a}_z \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{a}_z \times [(x-x') \hat{a}_x + y \hat{a}_y + (z-z') \hat{a}_z] = -y \hat{a}_x + (x-x') \hat{a}_y$$

$$|\bar{r}-\bar{r}'|^2 = [(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}$$

با جایگزین نمودن نتایج مزبور در رابطه (۲۳-۵) و انتگرال گرفتن روی سطح حاوی جریان، داریم:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 J_s}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-y \hat{a}_x}{[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dz' + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x') \hat{a}_y}{[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dz' \right\}$$

در عبارت اخیر اگر انتگرال گیری را در جمله دوم ابتدا بر حسب x' انجام دهیم، به سهولت میتوان دریافت که مقدار این جمله، به دلیل اینکه عبارت زیر انتگرال تابع فردی از x' میباشد، برابر صفر است. انتگرال اول را با استفاده از جداول انتگرال به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-y \hat{a}_x}{[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dz' = \int_{-\infty}^{+\infty} (-y \hat{a}_x) dz' u$$

که در آن:

$$u = \frac{x-x'}{[y^2 + (z-z')^2][(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{-2}{y^2 + (z-z')^2}$$

آنگاه:

$$I_1 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \hat{a}_x}{y^2 + (z-z')^2} dz' = \hat{a}_x \frac{2y}{|y|} \tan^{-1} \left(\frac{z-z'}{y} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2\pi y}{|y|} \hat{a}_x$$

و سرانجام جواب بصورت زیر خلاصه میشود:

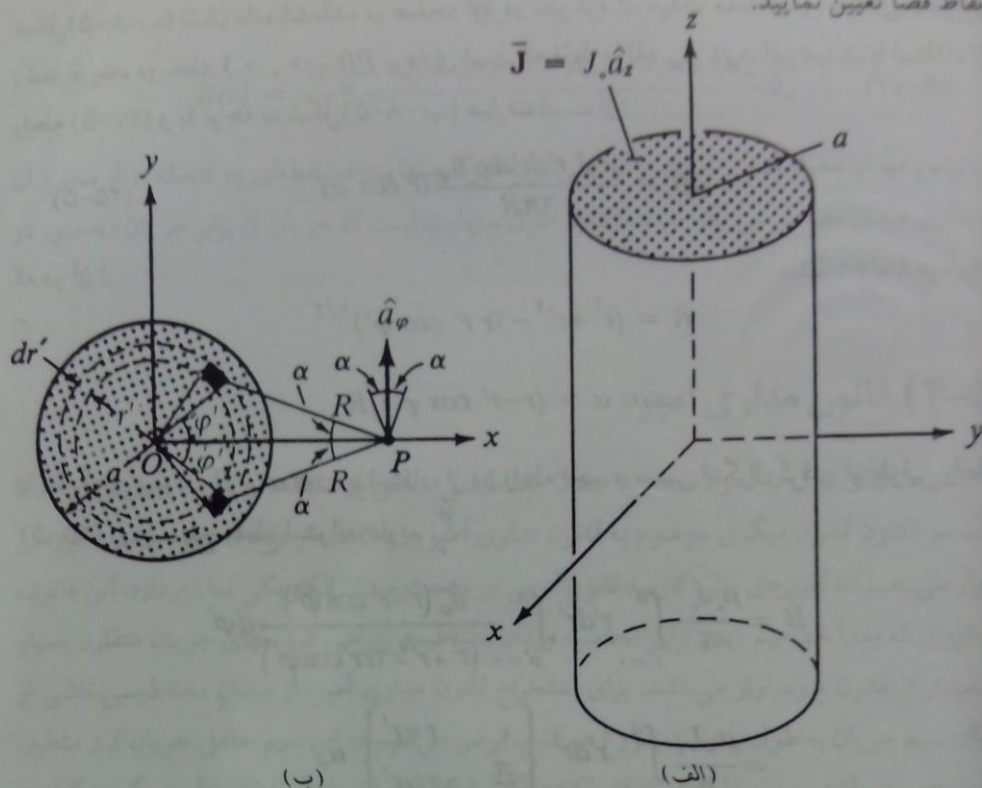
$$\bar{B} = \begin{cases} (-\mu_0 J_s / 2) \hat{a}_x & y > 0 \\ (\mu_0 J_s / 2) \hat{a}_x & y < 0 \end{cases} \quad (24-5)$$

ملاحظه می‌شود که میدان مغناطیسی یک صفحه بینهایت جریان با چگالی ثابت، همواره یکنواخت ولی در دو جهت مخالف در طرفین صفحه می‌باشد.

□

مثال (۴-۵) جریان الکتریکی بطور یکنواخت در استوانه‌ای به طول بینهایت و در امتداد محور آن

میگذرد. چگالی توزیع جریان برابر J آمپر بر متر مربع و شعاع استوانه برابر a بوده و محور استوانه، مطابق شکل (۸-۵-الف)، منطبق بر محور z فرض میشود. میدان مغناطیسی را در کلیه نقاط فضا تعیین نمایید.



شکل (۸-۵) استوانه‌ای به طول بینهایت حاوی جریان با چگالی ثابت و نحوه محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن (الف) آرایش هندسی استوانه نسبت به دستگاه مختصات (ب) دو عنصر متقارن جریان و نحوه محاسبه میدان

حل:

استوانه جریان الکتریکی را میتوان به منزله مجموعه‌ای از جریانهای رشته‌ای دانست که همه به موازات محور z باشند. بنابراین میدان مغناطیسی این استوانه جریانی تابعی از z نخواهد بود، همچنان که میدان یک سیم طویل جریانی به موازات محور z ، که در رابطه (۱۷-۵) داده شده است، تابعی از z نیست. لذا برای z میتوان هر مقدار مشخصی در نظر گرفت. از طرف دیگر، به علت وجود تقارن استوانه‌ای حول محور z میدان باید مستقل از φ باشد و از اینرو برای φ نیز میتوان هر مقدار دلخواهی در نظر گرفت. در این مسأله جهت سهولت $z=0$ و $\varphi=0$ انتخاب می‌شوند. توجه کنید که این کار به هیچ نحو عمومیت مسأله را از بین نمی‌برد. با تقسیم استوانه به مجموعه‌ای از رشته‌های جریان، در حقیقت این مسأله سه بعدی را به یک مسأله دو بعدی کاهش میدهم. برای هر رشته

جریان که از عنصر سطح واقع در (r', φ') بگذرد رشته جریان قرینه‌ای وجود دارد که از عنصر سطح واقع در $(r', 2\pi - \varphi')$ می‌گذرد. این عناصر سطح را میتوان همانگونه که در شکل (۵-۸-ب) نشان داده شده‌اند، در صفحه xy در نظر گرفت. میدان مغناطیسی حاصل از هر دو رشته قرینه، در نقطه $P(r, 0, 0)$ برداری است که فقط مؤلفه \hat{a}_φ دارد. این میدان با استفاده از رابطه (۵-۱۷) و با توجه به شکل (۵-۸-ب) عبارت است از:

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 J_c r' dr' d\varphi' \hat{a}_\varphi}{2\pi R} (r \cos \alpha) \quad (5-25)$$

که در آن:

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi')^{1/2}$$

$$\cos \alpha = (r - r' \cos \varphi') / R$$

با جایگزین نمودن R و $\cos \alpha$ با استفاده از دو رابطه اخیر و سپس انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۵-۲۵) روی سطح مقطع استوانه، داریم:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{\mu_0 J_c}{\pi} \int_{r'=0}^a r' dr' \int_{\varphi'=0}^{\pi} \frac{\hat{a}_\varphi (r - r' \cos \varphi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi')} d\varphi' \\ &= \frac{\mu_0 J_c}{\pi} \int_{r'=0}^a r' dr' \left\{ \begin{array}{ll} 0 & r < r' \\ \frac{\pi}{r} & r > r' \end{array} \right\} \hat{a}_\varphi \\ &= \begin{cases} \frac{\mu_0 J_c}{\pi} \int_0^a \frac{\pi r'}{r} dr' \hat{a}_\varphi & r > a \\ \frac{\mu_0 J_c}{\pi} \int_0^r \frac{\pi r'}{r} dr' \hat{a}_\varphi & r < a \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\mu_0 J_c}{\pi r} \frac{\pi a^2}{2} \hat{a}_\varphi & r > a \\ \frac{\mu_0 J_c}{\pi r} \frac{\pi r^2}{2} \hat{a}_\varphi & r < a \end{cases} \quad (5-26) \end{aligned}$$

برای انتگرال گرفتن نسبت به φ' از $\int_0^\pi \frac{\cos n x dx}{1 - 2t \cos x + t^2} = \frac{\pi t^n}{1 - t^2}$ که $t < 1$ و $n = 0, 1, 2, \dots$ استفاده میشود.

با توجه به اینکه πr^2 مساحت سطح مقطع یک سیم استوانه‌ای به شعاع r است و اینکه برای $r > a$ چگالی جریان صفر است، میتوان نتایج بدست آمده در رابطه (۵-۲۶) را ترکیب نموده و بصورت زیر خلاصه کرد:

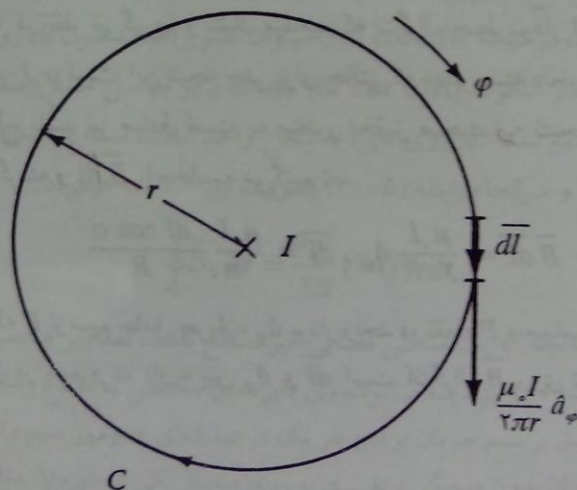
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 (\text{جریان محصور در سیر دایره‌ای شکل به شعاع } r)}{2\pi r} \hat{a}_\phi \quad (۵-۲۷)$$

بنابراین میدان مغناطیسی یک استوانه جریان به طول بینهایت در نقطه‌ای به فاصله r از محور آن مساوی میدان مغناطیسی یک سیم نازک به طول بینهایت است که جریان آن برابر جریان محصور در دایره به شعاع r باشد.

□

۵-۴) قانون مداری آمپر

در مثالهای فوق با نحوه محاسبه میدان مغناطیسی ساکن با استفاده از قانون بیوساوار آشنا شدیم. اکنون قانون دیگری موسوم به قانون مداری آمپر یا به اختصار «قانون آمپر» را مورد بررسی قرار می‌دهیم که کاربردی نظیر کاربرد قانون گوس در مبحث میدان الکتریکی ساکن دارد. این قانون، بطوری که بعداً خواهیم دید، برای محاسبه میدان مغناطیسی برخی توزیعهای جریان متقارن بسیار مفیدتر از قانون بیوساوار می‌باشد. برای استخراج قانون مداری آمپر، از میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم جریان به طول بینهایت شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم که این سیم حامل جریان I و منطبق بر محور z باشد. مسیر دایره‌ای شکل C ، مطابق شکل (۵-۹)، را طوری در نظر می‌گیریم که در



شکل (۵-۹) یک سیم جریان به طول بینهایت و مسیر دایره‌ای شکل C برای مطالعه قانون مداری آمپر

صفحه عمود بر محور z واقع باشد و سیم جریان از مرکز آن بگذرد. جهت انتخاب شده روی مسیر C به گونه‌ای است که اگر بویج راستگردی در آن جهت چرخانیده شود، پیشروی بیج در جهت جریان I باشد. میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم جریان بینهایت طویل را قبلاً طی مثال (۵-۱) مورد بررسی قرار دادیم و نتیجه گرفتیم که این میدان در نقطه‌ای به مختصات (r, φ, z) برابر $\vec{B} = (\mu_0 I / 2\pi r) \hat{a}_\varphi$ است. برای عنصر طول $d\vec{l} = dl \hat{a}_\varphi$ ، کمیت $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi \cdot dl \hat{a}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl$$

اکنون انتگرال خط $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ ، که در واقع سیرکولاسیون بردار \vec{B} حول مسیر C است، را بدست می‌آوریم:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_C dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I \quad (5-28)$$

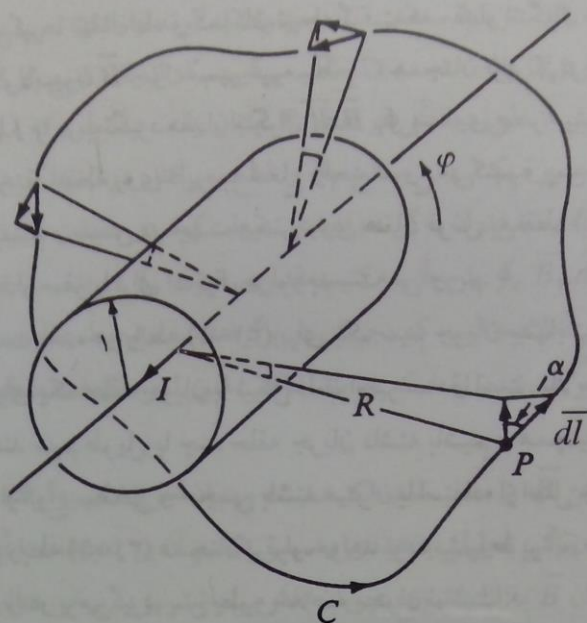
رابطه (۵-۲۸) بیان میکند که انتگرال \vec{B} روی یک مسیر دایره‌ای شکل با شعاع دلخواه r ، که در صفحه عمود بر سیم بینهایت طویل حامل جریان I قرار گرفته و در عین حال مرکز آن بر سیم منطبق باشد، همواره مساوی با $\mu_0 I$ است. باید توجه شود که مقدار این انتگرال مستقل از شعاع مسیر دایره‌ای شکل (یعنی r) می‌باشد.

اکنون به جای دایره یک مسیر بسته دلخواه C که سیم حامل جریان را در بر بگیرد، مطابق شکل (۵-۱۰)، در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که انتگرال خط بردار \vec{B} حول چنین مسیر دلخواهی نیز برابر $\mu_0 I$ است. این نتیجه حتی برای حالتی که مسیر بسته دلخواه بصورت یک منحنی فضایی غیرمسطح باشد نیز صادق است. به منظور تحقیق صحت این نتیجه عنصر طول $d\vec{l}$ را در نقطه P در نظر گرفته و $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{a}_\varphi \cdot dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dl \cos \alpha}{R} \quad (5-29)$$

که R فاصله نقطه P از سیم حامل جریان، \hat{a}_φ بردار واحد در نقطه P و مماس بر دایره به شعاع R و با مرکزی منطبق بر سیم و α زاویه بین $d\vec{l}$ و \hat{a}_φ است. انتگرال \vec{B} روی تمامی مسیر دلخواه C عبارت است از:

اگر جریان وارد صفحه کاغذ شود با علامت « \times » و چنانچه از صفحه خارج شود با علامت « \cdot » نشان داده میشود.



شکل (۵-۱۰) یک سیم جریان به طول بینهایت و مسیر بسته دلخواه C برای مطالعه قانون مداری آمپر

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C \frac{dl \cos \alpha}{R} \quad (۵-۳۰)$$

در رابطه (۵-۳۰)، $dl' = dl \cos \alpha$ تصویر dl' روی دایره‌ای است که شعاع آن برابر R بوده، مرکزش بر سیم جریان منطبق باشد و از نقطه P بگذرد. اما $dl'' = dl'/R$ به نوبه خود تصویر dl' روی دایره‌ای است که شعاع آن برابر واحد بوده، مرکزش بر سیم جریان منطبق باشد و در صفحه عمود بر سیم قرار بگیرد، در نتیجه $dl \cos \alpha / R$ را میتوان تصویر عنصر طول dl روی دایره با شعاع واحد دانست. آنگاه مقدار انتگرال $(dl \cos \alpha / R)$ ، که برابر حاصل جمع تصاویر کلیه عناصر طول تشکیل دهنده مسیر بسته C روی دایره به شعاع واحد است، مساوی محیط دایره به شعاع واحد (یعنی 2π) بوده و سرانجام رابطه (۵-۳۰) بصورت زیر خلاصه میگردد:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (2\pi) = \mu_0 I \quad (۵-۳۱)$$

البته روشن است که چنانچه C یک منحنی فضایی غیرمسطح باشد، تصاویر عناصر مختلف طول، همانطور که در شکل (۵-۱۰) نیز دیده میشود، روی دایره‌های مختلفی به شعاع واحد قرار می‌گیرند که مراکز همه آنها منطبق بر سیم جریان بوده و هر یک در صفحه‌ای عمود بر سیم واقع می‌باشد. اما همه این تصاویر را میتوان بدون هیچگونه تغییری به روی محیط یکی از دایره‌ها، مثلاً دایره‌ای که در

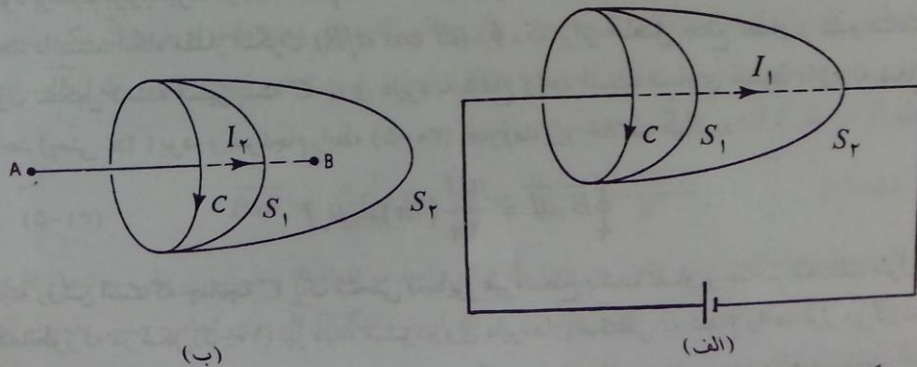
صفحه $z=0$ قرار می‌گیرد، انتقال داد و کماکان نتیجه گرفت که مقدار انتگرال $\oint_C (dl \cos \alpha/R)$ برابر 2π بوده و سیرکولاسیون \bar{B} حول مسیر غیرمسطح C همچنان برابر $\mu_0 I$ است. در صورتی که مسیر بسته C جریان I را در برنگیرد مقدار انتگرال $\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l}$ مساوی صفر میشود، زیرا در محاسبه $\oint_C (dl \cos \alpha/R)$ از یک نقطه روی دایره به شعاع واحد شروع می‌کنیم و پس از پیمودن قوسی به یک نقطه انتهایی میرسیم و سپس در جهت عکس روی همان قوس به نقطه ابتدایی برمی‌گردیم و طی این آمد و شد مقدار صفر را برای انتگرال مزبور بدست می‌آوریم.

اگرچه نتیجه بدست آمده در رابطه (۵-۳۱) برای یک سیم جریان بینهایت طولی بوده است، میتوان ثابت کرد که برای یک حلقه جریان با شکل دلخواه نیز صادق است. بالاخره، اگر به جای یک سیم طولی جریان چند سیم طولی یا چند حلقه جریان داشته باشیم و همچنین اگر جریانها دارای توزیعهای پیوسته‌ای از انواع سطحی و حجمی باشند میتوان با استفاده از اصل جمع آثار نشان داد که نتیجه بدست آمده در رابطه (۵-۳۱) همچنان برقرار خواهد بود، مشروط بر آنکه I کل جریانی باشد که مسیر بسته C آن را در برمی‌گیرد. پس بطور خلاصه میتوان نوشت:

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I \quad (۵-۳۲)$$

(کل جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته C)

رابطه (۵-۳۲) بیان قانون مدار آمپر است. در اینجا لازم است که جریان در برگرفته شده توسط یک مسیر بسته بطور دقیقتری تعریف شود. برای این منظور ابتدا جریان I_1 و مسیر بسته C را مطابق شکل (۵-۱۱-الف) در نظر می‌گیریم. واضح است که جریان I_1 هر سطح کاسه‌ای شکل که به منحنی C محدود شود (یعنی لبه آن منحنی C باشد)، مانند سطوح S_1 و S_2 را یک بار قطع می‌کند و هیچ سطحی از این قبیل وجود ندارد که جریان I_1 نتواند از آن بگذرد. در اینجا گفته میشود



شکل (۵-۱۱) تشریح جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته C (الف) مسیر بسته C جریان I_1 را در برمی‌گیرد، (ب) مسیر بسته C جریان I_1 را به گونه واحدی در بر نمی‌گیرد.

که جریان در برگرفته شده توسط منحنی C را میتوان به گونه واحدی تعریف نمود. حال جریان دومی مانند I_2 را در شکل (۵-۱۱-ب) در نظر می‌گیریم که از یک منبع بار الکتریکی در نقطه A سرچشمه گرفته و پس از طی مسافتی در نقطه B پایان یابد. همانطور که ملاحظه می‌کنیم این جریان از سطح S_1 عبور میکند ولی سطح S_2 را قطع نمی‌کند. در اینجا گفته میشود که جریان در برگرفته شده توسط C را نمی‌توان به گونه واحدی تعریف کرد. در حقیقت قانون آمپر برای جریان I_2 صادق نبوده و اگر $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ را محاسبه کنیم مقداری غیر از $\mu_0 I_2$ بدست خواهد آمد. نتیجه این بحث را میتوان چنین خلاصه نمود که «جریان در برگرفته شده توسط یک مسیر بسته C وقتی به گونه واحدی قابل تعریف شدن است که جریان خالص عبور نموده از همه سطوح محدود به منحنی بسته C یکسان باشد».

با در اختیار داشتن \vec{B} و مسیر بسته C همیشه میتوان جریان در برگرفته شده توسط C را با محاسبه $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ به روش تحلیلی یا عددی و سپس تقسیم آن بر μ_0 بدست آورد. مسأله عکس که عبارت از تعیین میدان \vec{B} به ازای توزیع جریان معلومی باشد نیز در برخی موارد که توزیع جریان از درجه تقارن بالایی برخوردار است امکان‌پذیر می‌باشد. اگر مسیر بسته C طوری انتخاب شود که میدان مغناطیسی \vec{B} روی بخشی یا تمامی آن دارای اندازه ثابت و در جهت مماس بر مسیر و روی بقیه مسیر دارای اندازه صفر یا در جهت عمود بر مسیر باشد، آنگاه میتوان میدان \vec{B} را با استفاده از قانون مدار آمپر محاسبه کرد. در واقع، وقتی که مسیر C دارای خصوصیات مذکور باشد انتگرال $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ را میتوان بصورت زیر تجزیه نمود:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{B}_t \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{B}_n \cdot d\vec{l} \quad , \quad C = C_1 + C_2 \quad (33-5)$$

در رابطه (۳۳-۵)، \vec{B}_t مماس بر قسمت C_1 از مسیر و \vec{B}_n عمود بر قسمت باقیمانده مسیر، که همان C_2 است، می‌باشد. واضح است که انتگرال دوم در سمت راست رابطه (۳۳-۵) برابر صفر است و چون اندازه \vec{B}_t روی قسمت C_1 از مسیر طبق فرض ثابت است، \vec{B}_t را میتوان به خارج از علامت انتگرال انتقال داد. لذا:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{B}_t \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} B_t dl = B_t \int_{C_1} dl = B_t C_1 = \mu_0 I$$

آنگاه:

$$B_t = \frac{\mu_0 I}{C_1} \quad (34-5)$$

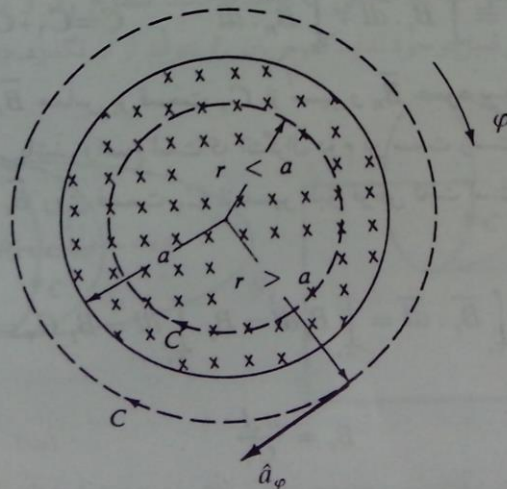
روشن است که استفاده از قانون آمپر برای محاسبه میدان مغناطیسی منوط به کسب اطلاعات

اولیه‌ای درباره جهت و اندازه میدان می‌باشد، زیرا همانگونه که ذکر گردید بردار \vec{B} باید مماس یا عمود بر مسیر انتگرال‌گیری باشد و اندازه \vec{B} در جاهایی که مماس بر مسیر است باید ثابت باشد. این اطلاعات اولیه را به کمک قانون بیوساوار و با در نظر گرفتن تقارن توزیع جریان بدست می‌آوریم. مثال (۵-۵) جریان الکتریکی بطور یکنواخت با چگالی J_0 آمپر بر متر مربع در امتداد محور یک استوانه بینهایت طویل به شعاع a می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در نقاط داخل و خارج استوانه محاسبه نمایید. محور استوانه را منطبق بر محور z فرض کنید.

حل:

این مثال را قبلاً به کمک قانون بیوساوار در مثال (۴-۵) بررسی نمودیم. در آنجا طی یک بحث کیفی نتیجه‌گیری کردیم که میدان مغناطیسی ناشی از این توزیع جریان تنها مؤلفه φ دارد و از تقارن استوانه‌ای نیز برخوردار است، یعنی مستقل از φ و z بوده و فقط تابعی از r می‌باشد. لذا میدان را میتوان بصورت $\vec{B} = B_\varphi(r) \hat{a}_\varphi$ نوشت. با در نظر گرفتن این ویژگیها برای میدان، یک مسیر بسته دایره‌ای شکل به شعاع r ، مطابق شکل (۵-۱۲)، طوری انتخاب می‌کنیم که در صفحه عمود بر محور استوانه واقع باشد و مرکز دایره روی محور قرار بگیرد. با بکار بردن قانون مداری آمپر میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_C B_\varphi \hat{a}_\varphi \cdot dl \hat{a}_\varphi = B_\varphi \oint_C dl = B_\varphi (\text{محیط دایره به شعاع } r) \\ &= B_\varphi (2\pi r) \\ &= \mu_0 I, \quad I = r \text{ شعاع دایره به شعاع } r \end{aligned}$$



شکل (۵-۱۲) یک استوانه بینهایت طویل جریان با چگالی توزیع یکنواخت و محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن

برای محاسبه جریان I میتوان نوشت :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S J_z \hat{a}_z \cdot ds \hat{a}_z = J_z \int_S ds \\
 &= \begin{cases} J_z (\text{مساحت دایره به شعاع } r) & r < a \\ J_z (\text{مساحت دایره به شعاع } a) & r > a \end{cases} \\
 &= \begin{cases} J_z \pi r^2 & r < a \\ J_z \pi a^2 & r > a \end{cases} \quad (36-5)
 \end{aligned}$$

با بکار بردن رابطه (۳۶-۵) در رابطه (۳۵-۵)، B_φ بشرح زیر محاسبه میشود :

$$B_\varphi = \begin{cases} \mu_0 J_z \pi r^2 / (2\pi r) & r < a \\ \mu_0 J_z \pi a^2 / (2\pi r) & r > a \end{cases} \quad (37-5)$$

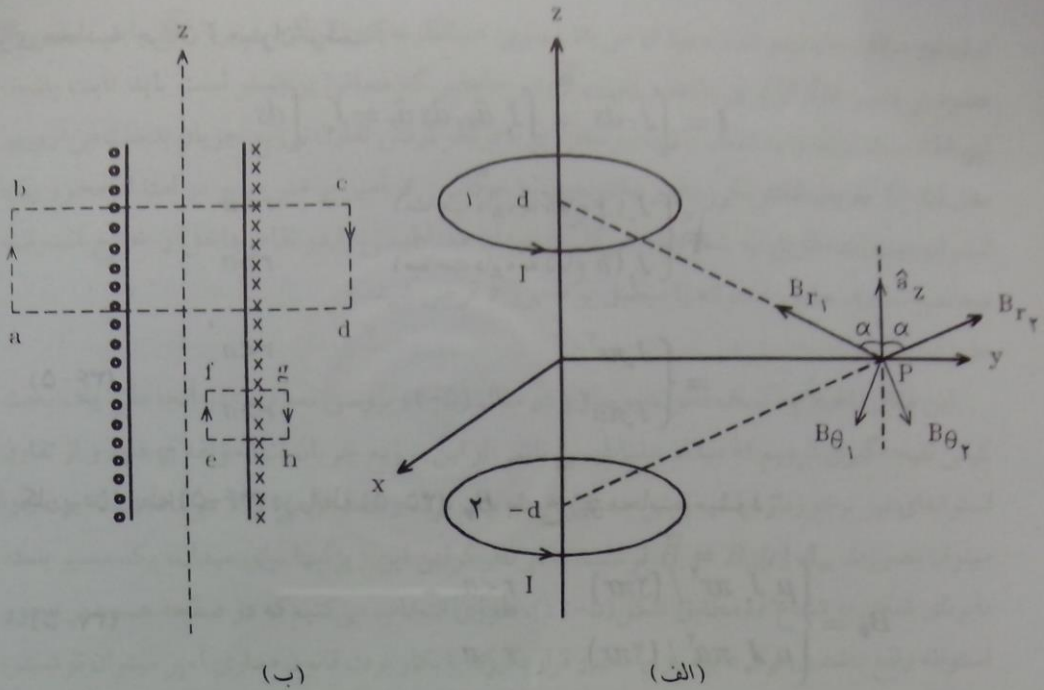
□

همانگونه که انتظار میرود نتایج بدست آمده در رابطه (۳۷-۵) با نتایج رابطه (۲۶-۵) که با استفاده از قانون بیوساوار بدست آمدند یکسان هستند، ولی ملاحظه نمودیم که حل مسأله بر اساس قانون مداری آمپر به مراتب ساده تر انجام پذیرفت.

مثال (۶-۵) یک سلنویید طولی بطور یکنواخت و پیوسته سیم پیچی شده است. شعاع سلنویید برابر a ، جریان گذرنده از سیم پیچ آن برابر I و تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول برابر n است. میدان مغناطیسی را در نقاط داخل و خارج سلنویید بدست آورید. فرض کنید که محور سلنویید منطبق بر محور z باشد.

حل :

به دلیل وجود تقارن استوانه‌ای نسبت به محور z و بینهایت بودن طول سلنویید، میدان مغناطیسی مستقل از φ و z میباشد. بعلاوه به کمک قانون بیوساوار میتوان نشان داد که میدان فقط مؤلفه محوری B_z را دارا است و مؤلفه‌های دیگر یعنی B_r و B_φ برابر صفر هستند. برای اثبات اینکه $\vec{B} = B_z \hat{a}_z$ است، دو حلقه از سیم پیچ را که نسبت به صفحه xy متقارن هستند، مطابق شکل (۵-۱۳-الف)، در نظر می‌گیریم. قبلاً ضمن مطالعه مسأله دو قطبی مغناطیسی ملاحظه نمودیم که میدان یک حلقه فقط دارای مؤلفه‌های B_r و B_θ (در دستگاه مختصات کروی) است. بنابراین اگر میدانهای دو حلقه جریان متقارن نسبت به صفحه $z=0$ را در نقطه $P(r, \frac{\pi}{4}, 0)$



شکل (۵-۱۳) محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از یک سلفوئید طویل (الف) دو حلقه جریان متقارن و میدان حاصل از آنها (ب) سطح مقطع سلفوئید در امتداد محور z و مسیرهای بسته $efghe$ و $abcd$ برای محاسبه میدان در خارج و داخل سلفوئید

که روی محور z واقع است جمع کنیم، به وضوح میتوان دید که حاصل جمع مؤلفه‌های همانام در جهت \hat{a}_z قرار می‌گیرد. در نتیجه کل میدان سلفوئید در نقطه P ، که به مثابه یک نقطه دلخواه است (چرا؟)، در جهت \hat{a}_z خواهد بود.

حال به محاسبه میدان مغناطیسی پرداخته و ابتدا میدان را در نقاط خارج سلفوئید بدست می‌آوریم. برای این منظور مسیر مستطیلی شکل $abcd$ را مطابق شکل (۵-۱۳-ب) در نظر می‌گیریم. واضح است که جریان خالص در برگرفته شده توسط این مسیر برابر صفر است. همچنین میدان \vec{B} ، با توجه به ویژگیهایی که برای آن برشمردیم، بر اضلاع bc و da عمود و در امتداد اضلاع cd و ab ثابت است. لذا با بکار بردن قانون آمپر میتوان نوشت:

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 \cdot (\text{جریان خالص در برگرفته شده توسط مسیر } abcd) = 0 \quad (۵-۳۸)$$

با توجه به اینکه انتگرالهای دوم و چهارم در عبارت سمت راست رابطه اخیر برابر صفر میباشند و با

فرض آنکه اندازه میدان در امتدادهای ab و cd به ترتیب برابر B_{z_1} و B_{z_2} باشد، داریم:

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{z_1} \cdot ab - B_{z_2} \cdot cd = 0 \quad (۳۹-۵)$$

چون اضلاع ab و cd الزاماً از سلنوتیید به یک فاصله نیستند، از رابطه (۳۹-۵) چنین برمی آید که میدان در خارج سلنوتیید باید صفر بوده یا در همه جا ثابت باشد. اما از آنجا که خطوط میدان مغناطیسی همیشه روی خود بسته می شوند و از اینرو شار مغناطیسی^۳ در داخل و خارج سلنوتیید یکسان است، میدان در خارج سلنوتیید باید صفر باشد. چرا که در غیر اینصورت وجود میدان یکتواخت غیر صفر تا فواصل بینهایت از سلنوتیید به معنای وجود شار بینهایت در خارج سلنوتیید است که با شار محدود داخل آن مساوی نخواهد بود. برای محاسبه میدان در داخل سلنوتیید مسیر بسته $efghe$ را مطابق شکل (۵-۱۳-ب) در نظر گرفته و با توجه به اینکه میدان در امتداد ef ثابت، بر امتدادهای fg و he عمود و در امتداد gh صفر است، داریم:

$$\begin{aligned} \oint_{efghe} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \left[\int_e^f + \int_f^g + \int_g^h + \int_h^e \right] \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \mu_0 (efghe) \quad (\text{جریان خالص در برگرفته شده توسط مسیر } efghe) \\ &= \mu_0 In(ef) \quad (۴۰-۵) \end{aligned}$$

چون انتگرالهای دوم تا چهارم در عبارت سمت راست رابطه اخیر صفر هستند، میتوان نوشت:

$$\oint_{efghe} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_e^f \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_z \cdot (ef) = \mu_0 In(ef)$$

در نتیجه:

$$B_z = \mu_0 nI$$

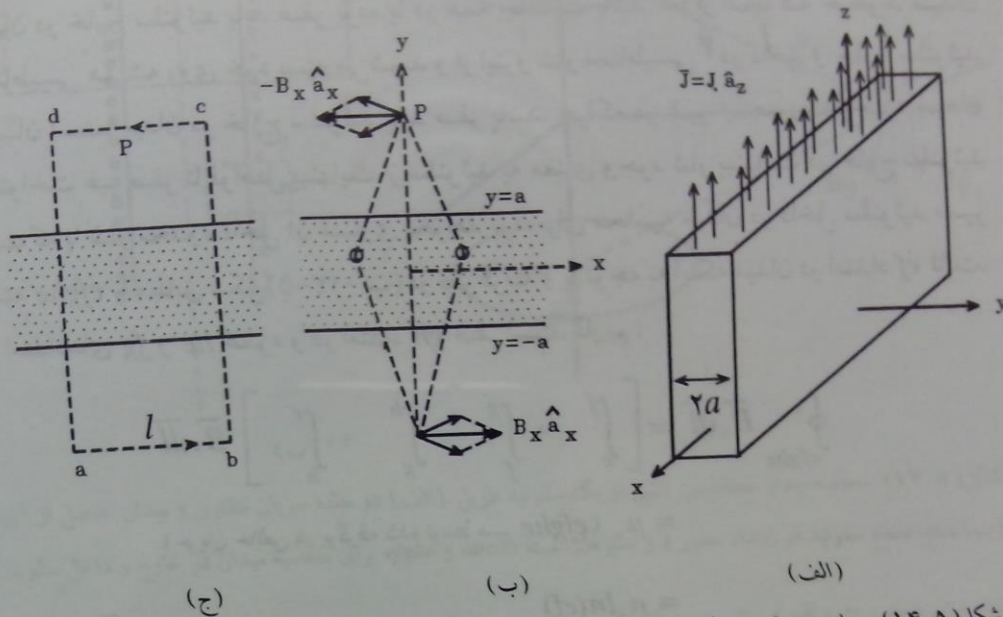
پس بطور خلاصه میدان سلنوتیید عبارت است از:

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & r > a \\ \mu_0 nI \hat{a}_z & r < a \end{cases} \quad (۴۱-۵)$$

□

^۳ شار مغناطیسی برابر $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ است.

مثال (۷-۵) جریان الکتریکی در امتداد محور z و با چگالی یکنواخت J_z در ناحیه‌ای از فضا که بین دو صفحه $y=a$ و $y=-a$ محصور است می‌گذرد. میدان مغناطیسی ناشی از این توزیع جریان را در تمام نقاط فضا بدست آورید. شکل (۵-۱۴-الف) توزیع جریان را نشان می‌دهد.



شکل (۵-۱۴) محاسبه میدان مغناطیسی در مثال (۷-۵) (الف) جریان الکتریکی با چگالی $J_z \hat{a}_z$ در ناحیه $|y| < a$ از فضا (ب) دو عنصر متقارن جریان و میدان حاصل از آنها (ج) مسیر بسته $abcda$ برای محاسبه میدان به کمک قانون آمپر حل:

فرض کنید که بخواهیم میدان را در نقطه دلخواهی مانند P بدست آوریم. محورهای مختصات را طوری در نظر می‌گیریم که محور y از آن نقطه بگذرد. حال اگر این توزیع جریان را به منزله یک مجموعه جریانهای رشته‌ای تلقی کنیم که همه به موازات محور z باشند، میدانی که هر دو رشته متقارن واقع در (x', y') و $(-x', y')$ در نقطه P بوجود می‌آورند، همانطور که در شکل (۵-۱۴-ب) نشان داده شده است، فقط دارای مؤلفه x میباشد. البته اگر $y_p > 0$ باشد، میدان در جهت $-\hat{a}_x$ و اگر $y_p < 0$ باشد، میدان در جهت \hat{a}_x خواهد بود. از طرف دیگر، چون توزیع جریان در امتدادهای x و z تا بینهایت ادامه دارد، میدان تابعی از x و z نخواهد بود. در نتیجه، میدان کل حاصل از جریان فقط مؤلفه B_x داشته و در هر صفحه عمود بر محور y اندازه‌ای ثابت دارد. با در نظر گرفتن این ویژگیهای میدان، مسیر بسته $abcda$ ، مطابق شکل (۵-۱۴-ج)، را برای محاسبه میدان با استفاده از قانون آمپر انتخاب می‌کنیم. در این مسیر که نسبت به محور x متقارن است،

میدان مغناطیسی ساکن در خلاء

با بکار بردن قانون آمپر میتوان نوشت :

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 \text{ (جریان خالص در برگرفته شده توسط مسیر } abcd \text{)}$$

$$= \mu_0 I \quad (42-5)$$

در این رابطه انتگرالهای دوم و چهارم برابر صفر هستند، زیرا $\vec{B} = B_x \hat{a}_x$ بر اضلاع bc و da عمود است، بعلاوه اندازه \vec{B} روی اضلاع ab و cd که از محور x به یک فاصله میباشند یکسان است. بالاخره جریان I برای حالتی که $|y| > a$ و $|y| < a$ باشد مقادیر متفاوتی دارد که میتوان آنرا بصورت زیر خلاصه نمود :

$$I = \begin{cases} J_c (2al) & |y| > a \\ J_c (2yl) & |y| < a \end{cases} \quad (43-5)$$

بنابراین، با استفاده از رابطه (۴۳-۵) در رابطه (۴۲-۵) داریم :

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B_x \hat{a}_x \cdot dx \hat{a}_x + \int_c^d -B_x \hat{a}_x \cdot dx \hat{a}_x = 2lB_x$$

$$= \begin{cases} \mu_0 J_c (2al) & |y| > a \\ \mu_0 J_c (2yl) & |y| < a \end{cases}$$

و سرانجام میدان \vec{B} بصورت زیر خلاصه میشود :

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 J_c y \hat{a}_x & |y| < a \\ -\mu_0 J_c a \hat{a}_x & y > a \\ \mu_0 J_c a \hat{a}_x & y < -a \end{cases} \quad (44-5)$$

□

بطور خلاصه، مواردی که محاسبه میدان مغناطیسی با استفاده از قانون آمپر به سهولت میسر

است به شرح زیر میباشند :

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی اگر چگالی توزیع جریان فقط تابعی از یک مختصه مثلاً y

باشد، میدان مغناطیسی حاصل از مؤلفه \hat{a}_z چنین جریانی فقط دارای مؤلفه \hat{a}_x خواهد بود. مسیر بسته مورد نیاز برای قانون آمپر را میتوان بصورت یک مربع مستطیل در صفحه xy ، که اضلاع آن با محورهای x و y موازی باشند، در نظر گرفت. اگر چگالی توزیع جریان تابع زوجی از y باشد مسیر بسته نسبت به محور x متقارن است. لیکن برای توزیع جریانی که تابع فردی از y باشد، استفاده از مسیر بسته‌ای که نسبت به محور x نامتقارن باشد ضروری است.

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای اگر چگالی توزیع جریان مستقل از φ و z یا به عبارت دیگر فقط تابعی از r باشد، میدان مغناطیسی حاصل از مؤلفه \hat{a}_z چنین جریانی فقط دارای مؤلفه \hat{a}_φ خواهد بود. مسیر بسته را میتوان بصورت دایره‌ای به شعاع r که مرکزش منطبق بر محور z و در صفحه‌ای عمود بر محور z باشد در نظر گرفت. همچنین، میدان مغناطیسی حاصل از مؤلفه \hat{a}_φ چنین جریانی فقط دارای مؤلفه \hat{a}_z خواهد بود. در این حالت مسیر بسته را میتوان بصورت یک مربع مستطیل در صفحه yz (یا صفحه xz)، که اضلاعش موازی محورها باشند، در نظر گرفت.

ج) در دستگاه مختصات کروی اگر چگالی توزیع جریان مستقل از θ و φ یا به عبارت دیگر فقط تابعی از r باشد، میدان مغناطیسی حاصل از مؤلفه \hat{a}_r چنین جریانی فقط دارای مؤلفه \hat{a}_φ خواهد بود و مسیر بسته را میتوان بصورت دایره‌ای به شعاع r که مرکزش منطبق بر محور z و در صفحه‌ای عمود بر محور z باشد در نظر گرفت.

۵-۵) شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر

فرض میکنیم یک جریان الکتریکی با چگالی حجمی \bar{J} در فضا توزیع شده باشد. مقدار جریانی را که مسیر بسته دلخواه C در برمی‌گیرد میتوان با محاسبه $\int_S \bar{J} \cdot d\bar{s}$ ، که S سطح محدود به منحنی بسته C است، بدست آورد. بر اساس قانون مداری آمپر میتوان نوشت:

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} \quad (۴۵-۵)$$

در رابطه (۴۵-۵) جهت انتخاب شده برای مسیر بسته C به گونه‌ای است که اگر پیچ راستگردی در آن جهت چرخانیده شود پیشروی آن در امتداد بردار $d\bar{s}$ باشد. این رابطه در واقع شکل انتگرالی قانون مداری آمپر است. حال اگر مسیر C را آنقدر کوچک کنیم تا به مسیر جزئی ΔC تبدیل شود، آنگاه S نیز به عنصر سطح ΔS تبدیل شده و رابطه (۴۵-۵) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\oint_{\Delta C} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_{\Delta S} \bar{J} \cdot d\bar{s} \quad (۴۶-۵)$$

اما چون Δs سطح بسیار کوچکی است، چگالی توزیع جریان در آن را میتوان یکنواخت فرض کرد و انتگرال سمت راست رابطه (۴۶-۵) را بصورت زیر نوشت:

$$\int_{\Delta s} \bar{J} \cdot \bar{d}s = \bar{J} \cdot \hat{a}_n \Delta s \quad (۴۷-۵)$$

در رابطه (۴۷-۵)، \hat{a}_n بردار واحدی عمود بر عنصر سطح Δs و در جهت پیشروی یک پیچ راستگرد است وقتی که در جهت مسیر Δc چرخانیده شود. با تقسیم طرفین رابطه (۴۶-۵) بر Δs و میل دادن Δs به سمت صفر داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta c} \bar{B} \cdot \bar{d}l}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mu_0 \int_{\Delta s} \bar{J} \cdot \bar{d}s}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mu_0 \bar{J} \cdot \hat{a}_n \Delta s}{\Delta s} = \mu_0 \bar{J} \cdot \hat{a}_n \quad (۴۸-۵) \end{aligned}$$

از مبحث آنالیز برداری بیاد می آوریم که کرل بردار \bar{B} بصورت برداری تعریف می شود که اندازه آن برابر حداکثر کمیت سمت چپ رابطه (۴۸-۵) بوده و در جهت عمود بر Δs ، آن Δs که به ازای حداکثر کمیت مذکور بدست می آید، باشد. بررسی عبارت سمت راست رابطه (۴۸-۵) نشان میدهد که مقدار حداکثر وقتی حاصل میشود که \hat{a}_n در جهت \bar{J} باشد و این مقدار حداکثر برابر $\mu_0 |\bar{J}|$ است. بنابراین:

$$|\nabla \times \bar{B}| = \max \left[\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta c} \bar{B} \cdot \bar{d}l}{\Delta s} \right] = \mu_0 |\bar{J}| \quad (۴۹-۵)$$

و:

$$\text{جهت } (\nabla \times \bar{B}) = \text{جهت } \bar{J} \quad (۵۰-۵)$$

در نتیجه:

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} \quad (۵۱-۵)$$

رابطه (۵۱-۵) شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر است. این رابطه بیان میکند که در هر نقطه از فضا کرل چگالی شار مغناطیسی برابر حاصل ضرب μ_0 در چگالی توزیع جریان در آن نقطه است. رابطه

مزبور همچنین بعنوان یکی از معادلات ماکسول برای میدان مغناطیسی ساکن شناخته می‌شود. وقتی که جریان الکتریکی بطور سطحی یا خطی توزیع شده باشد، از توابع دیراک دلتا برای بیان \bar{J} استفاده می‌شود. نحوه کار دقیقاً به همان ترتیب است که برای بیان چگالی بار الکتریکی با توزیعهای نقطه‌ای، خطی و سطحی در رابطه با شکل نقطه‌ای قانون گوس انجام میشد. به عنوان مثال برای یک صفحه جریان واقع در $x=x_0$ و با چگالی \bar{J}_s میتوان نوشت:

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}_s \delta(x-x_0) \quad (52-5)$$

۵-۶ پتانسیل مغناطیسی برداری

تاکنون دو روش را برای محاسبه میدان مغناطیسی ساکن مطالعه نموده‌ایم. در این دو روش، که یکی بر اساس قانون بیوساوار و دیگری مبتنی بر قانون مداری آمپر است، میدان مغناطیسی مستقیماً از توزیع جریان بدست می‌آید. در این قسمت روش سوم را برای محاسبه میدان مغناطیسی ارائه می‌دهیم که در آن ابتدا یک کمیت برداری موسوم به پتانسیل مغناطیسی برداری برای توزیع جریان معلومی محاسبه میشود و سپس میدان مغناطیسی از آن بدست می‌آید. این روش در حقیقت مشابه روشی است که برای محاسبه میدان الکتریکی ساکن از طریق بدست آوردن پتانسیل الکتریکی و سپس تعیین گرادیان آن بکار میرفت. برای تشریح این روش، میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان خطی در امتداد مسیر C' را با استفاده از رابطه (۵-۵) بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I d\bar{l}'(\bar{r}') \times \hat{a}_R(\bar{r}, \bar{r}')}{R^2(\bar{r}, \bar{r}')} \quad (53-5)$$

با جایگزین نمودن $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2} \hat{a}_R$ در رابطه (۵۳-۵)، داریم:

$$\bar{B}(\bar{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} d\bar{l}'(\bar{r}') \times \nabla \left[\frac{1}{R(\bar{r}, \bar{r}')} \right] \quad (54-5)$$

با استفاده از اتحاد برداری $\bar{A} \times \nabla V = V \nabla \times \bar{A} - \nabla \times (V\bar{A})$ ، رابطه (۵۴-۵) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\bar{B}(\bar{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \left[\frac{1}{R(\bar{r}, \bar{r}')} \nabla \times d\bar{l}'(\bar{r}') - \nabla \times \frac{d\bar{l}'(\bar{r}')}{R(\bar{r}, \bar{r}')} \right] \quad (55-5)$$

در رابطه (۵-۵۵) انتگرال‌گیری نسبت به نقاط واقع بر مسیر جریان که تابعی از \vec{r} هستند انجام میشود، در حالیکه عملگر کرل، مشتق‌گیری نسبت به نقاط میدان را که تابعی از \vec{r} می‌باشند شامل می‌گردد. بنابراین $\nabla \times d\vec{l}'(\vec{r}') = 0$ بوده و با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری، رابطه (۵-۵۵) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{c'} \nabla \times \frac{d\vec{l}'(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c'} \frac{I d\vec{l}'}{R} \right) \quad (الف-۵۶-۵)$$

در صورتی که به جای جریان خطی، یک جریان سطحی با چگالی \vec{J}_s روی سطح S' یا یک جریان حجمی با چگالی \vec{J} در حجم V' داشته باشیم، نتایج مشابهی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \left(\int_{s'} \frac{\mu_0 \vec{J}_s ds'}{4\pi R} \right) \quad (ب-۵۶-۵)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \left(\int_{v'} \frac{\mu_0 \vec{J} dv'}{4\pi R} \right) \quad (ج-۵۶-۵)$$

در روابط (۵-۵۶) عباراتی داریم که محاسبه میدان مغناطیسی را از طریق تعیین کرل یک کمیت برداری ممکن می‌سازد. اگر این کمیت برداری را با \vec{A} نشان دهیم، میتوان نوشت:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (۵۷-۵)$$

که در آن، بردار \vec{A} برای جریانهای خطی، سطحی و حجمی بترتیب عبارت است از:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{c'} \frac{I d\vec{l}'}{R} \quad (۵۸-۵)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s'} \frac{\vec{J}_s ds'}{R} \quad (۵۹-۵)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J} dv'}{R} \quad (۶۰-۵)$$

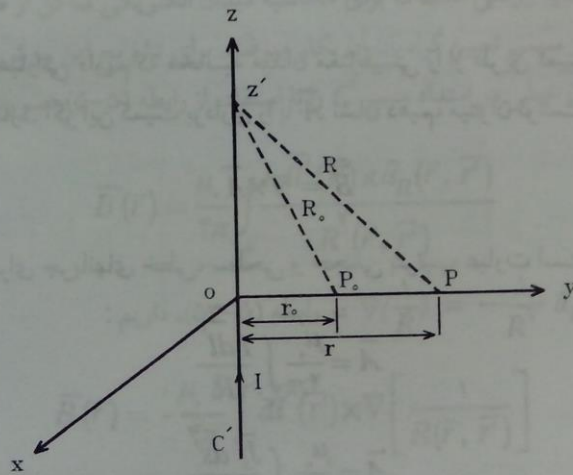
مقایسه روابط (۵۸-۵) تا (۶۰-۵) با روابط (۲-۹۱) تا (۲-۹۳)، که برای پتانسیل الکتریکی V ناشی از توزیعهای خطی، سطحی و حجمی بار می‌باشند، تشابه عبارات سمت راست آنها را بخوبی

مشهود میسازد. با توجه به این تشابه و از آنجا که \vec{A} بر خلاف V یک کمیت برداری است، بردار \vec{A} پتانسیل مغناطیسی برداری نامیده میشود. کمیت \vec{A} بر خلاف V دارای مفهوم فیزیکی نیست و فقط نقش یک واسطه را برای محاسبه میدان مغناطیسی \vec{B} ایفا میکند. استفاده از \vec{A} برای محاسبه \vec{B} ، بخصوص وقتی که نتایج مربوط به مسأله مشابه برای پتانسیل الکتریکی V در اختیار باشد، بسیار مطلوب است.

مثال (۸-۵) یک سیم به طول بینهایت حامل جریان I بوده و در امتداد محور z قرار دارد. مطلوب است محاسبه پتانسیل برداری \vec{A} و سپس میدان مغناطیسی \vec{B} که از این سیم جریان پدید می آید.
حل:

فرض کنید بخواهیم پتانسیل برداری \vec{A} را در نقطه دلخواه P بقاصله r از سیم جریان بدست آوریم. به دلیل وجود تقارن استوانه‌ای میتوان نقطه P را مطابق شکل (۵-۱۵) روی محور y در نظر گرفت. آنگاه با استفاده از رابطه (۵-۵۸)، داریم:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I dz'}{R} \hat{a}_z = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \right) \hat{a}_z \quad (۶۱-۵)$$



شکل (۵-۱۵) یک سیم جریان به طول بینهایت و محاسبه پتانسیل برداری ناشی از آن

اما به سادگی میتوان نشان داد که برای رابطه انتگرالی (۵-۶۱)، وقتی که بین حدود $z' = -\infty$ تا $z' = +\infty$ محاسبه شود، مقدار بینهایت بدست می آید. این اشکال در مثال (۲-۸)، مربوط به محاسبه پتانسیل الکتریکی یک خط بار به طول بینهایت، نیز بروز کرد و برای رفع آن پتانسیل

نقطه‌ای بفاصله r_2 از خط بار را برابر صفر فرض نمودیم. در اینجا نیز می‌توان به همان ترتیب عمل کرد و پتانسیل نقطه P را بصورت زیر نوشت:

$$\bar{A} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{r_1^2 + z'^2}} - \frac{dz'}{\sqrt{r_2^2 + z'^2}} \right) \hat{a}_z \quad (62-5)$$

انتگرال درون پراتنز در رابطه (62-5) را قبلاً ضمن محاسبه پتانسیل الکتریکی خط بار بدست آورده‌ایم که نتیجه در رابطه (2-102) خلاصه شده است. اکنون با استفاده از این نتیجه میتوان نوشت:

$$\bar{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_2} \hat{a}_z \quad (63-5)$$

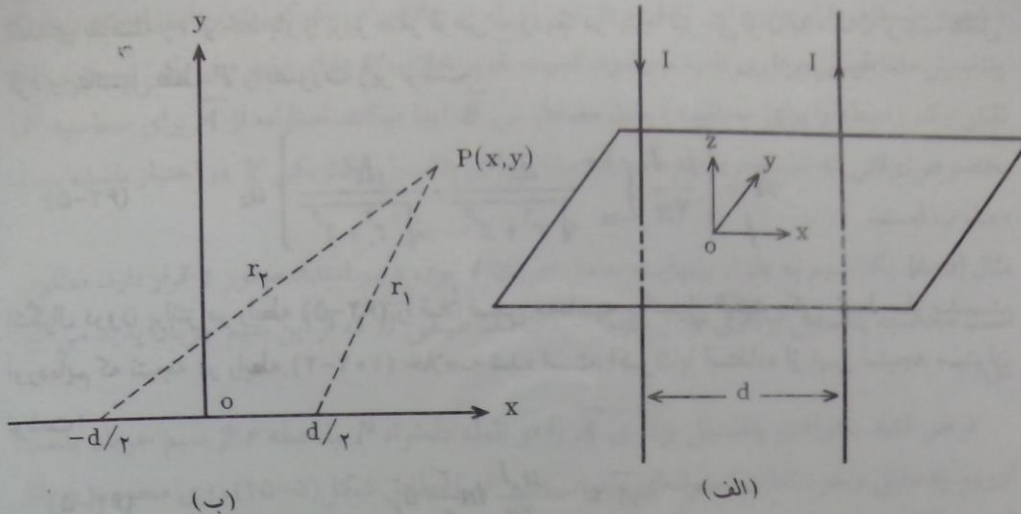
و سرانجام با محاسبه کول \bar{A} میدان مغناطیسی \bar{B} را بدست می‌آوریم:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \hat{a}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{a}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \quad (64-5)$$

یک راه دیگر برای اجتناب از بینهایت شدن \bar{A} آن است که این بردار را ابتدا برای بخشی از جریان که در فاصله $-L < z' < L$ قرار دارد بدست آوریم، سپس $\nabla \times \bar{A}$ را محاسبه کنیم و سرانجام L را به سمت بینهایت میل دهیم تا میدان \bar{B} برای سیم جریان با طول بینهایت بدست آید.

□

با داشتن نتیجه بدست آمده در رابطه (63-5)، پتانسیل برداری و میدان مغناطیسی ناشی از دو سیم موازی با جریانهای مساوی و مختلف‌الجهت و به فاصله d از یکدیگر را میتوان به سهولت محاسبه نمود. چنین ترکیبی، که در شکل (5-16-الف) نشان داده شده است، به دو قطبی مغناطیسی دویعدی (در مقایسه با یک حلقه دایره‌ای شکل جریان که یک دو قطبی مغناطیسی سه‌بعدی است) موسوم میباشد. با استفاده از رابطه (63-5) و با توجه به شکل (5-16-ب) پتانسیل برداری در نقطه P ، که به فاصله r_1 از سیم حامل جریان I در جهت \hat{a}_z و به فاصله r_2 از سیم حامل جریان I در جهت $-\hat{a}_z$ است، به شرح زیر محاسبه می‌گردد:



شکل (۵-۱۶) دو قطبی مغناطیسی دوبعدی (الف) متشکل از دو سیم موازی با جریانهای مساوی و مختلف جهت (ب) برای محاسبه پتانسیل برداری آن

لیکن:

$$r_1 = \left[\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \right]^{1/2}, \quad r_2 = \left[\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \right]^{1/2}$$

در نتیجه:

$$\bar{A} = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \ln \left[\frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} \right] \hat{a}_z = A_z \hat{a}_z$$

برای تعیین میدان مغناطیسی \bar{B} میتوان نوشت:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{a}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{a}_y$$

$$\bar{B} = -\frac{\mu \cdot Id}{4\pi} \left[\frac{2xy}{r_1^2 r_2^2} \hat{a}_x - \left(\frac{2x^2}{r_1^2 r_2^2} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2} \right) \hat{a}_y \right] \quad (5-65)$$

برای بدست آوردن میدان در فواصل دور از دو قطبی در مقایسه با d ، میتوان حد عبارت سمت راست رابطه (۵-۶۵) را وقتی که $d \rightarrow 0$ و Id ، که گشتاور دو قطبی است، ثابت نگهداشته شود محاسبه نمود. برای این منظور در رابطه مذکور r_1 و r_2 را با r جایگزین نموده و x ، y ، \hat{a}_x و \hat{a}_y را در مختصات استوانه‌ای می‌نویسیم و نتیجه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi r^2} (-\sin \varphi \hat{a}_r + \cos \varphi \hat{a}_\varphi) \quad (66-5)$$

مثال (۹-۵) برای دوقطبی مغناطیسی سه بعدی شکل (۶-۵)، پتانسیل مغناطیسی برداری را در فواصل دور ($r \gg a$) محاسبه کنید.

حل:

با توجه به علائم بکار رفته در شکل (۶-۵) و با استفاده از رابطه (۵۸-۵) میتوان نوشت:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c'} \frac{I d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c'} \frac{I d\vec{l}'}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha)^{1/2}}$$

که $a = |\vec{r}'|$ و α زاویه بین بردارهای \vec{r} و \vec{r}' بوده و میتوان نشان داد که $\cos \alpha$ برابر با $\sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$ می باشد. اکنون جمله $(r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha)^{-1/2}$ را بر اساس شرط $\frac{a}{r} \ll 1$ بسط داده و فقط دو جمله اول حاصل از بسط را در محاسبات بعدی بکار می بریم.

$$(r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{2a}{r} \cos \alpha \right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \alpha \right)$$

آنگاه:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\oint_{c'} d\vec{l}' + \oint_{c'} \frac{a}{r} \cos \alpha d\vec{l}' \right] \quad (67-5)$$

بدیهی است که $\oint_{c'} d\vec{l}' = 0$ است. برای محاسبه انتگرال دوم در عبارت سمت راست رابطه (۶۷-۵) از روابط $\vec{dl}' = a d\varphi' (-\sin \varphi' \hat{a}_x + \cos \varphi' \hat{a}_y)$ و $\cos \alpha = \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$ استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \varphi') (-\sin \varphi' \hat{a}_x + \cos \varphi' \hat{a}_y) d\varphi' \\ &= \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \pi (-\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y) = \frac{\mu_0 (I \pi a^2) \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{a}_\varphi \quad (68-5) \end{aligned}$$

با استخراج کرل \vec{A} همان نتیجه بدست آمده در رابطه (۲۱-۵) را میتوان مجدداً بازیافت. چون از طرفی بر حسب تعریف $\vec{m} = I \pi a^2 \hat{a}_z$ گشتاور دوقطبی و از طرف دیگر $\sin \theta \hat{a}_\varphi = \hat{a}_z \times \hat{a}_r$ است، نتیجه بدست آمده را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{a}_r}{4\pi r^2} \quad (69-5)$$

از این نتیجه در مطالعه میدان مغناطیسی در اجسام، در فصل بعد، استفاده خواهیم کرد. در ادامه مطالعه پتانسیل مغناطیسی برداری، به استخراج معادلات پواسون و لاپلاس برای \bar{A} ، که در میدان الکتریکی ساکن برای V بدست آوردیم، می پردازیم. برای این منظور از طرفین رابطه (۵۷-۵) کرل می گیریم:

$$\nabla \times \bar{B} = \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} \quad (۷۰-۵)$$

اما با بکار بردن شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر، که در رابطه (۵۱-۵) داده شده است، در رابطه (۷۰-۵) می توان نوشت:

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu_0 \bar{J} \quad (۷۱-۵)$$

حال ثابت می کنیم که برای یک جریان حلقه‌ای، یعنی یک جریان خطی که از مسیر بسته C' بگذرد، دیورژانس بردار \bar{A} برابر صفر است. برای این منظور $\nabla \cdot \bar{A}$ را با استفاده از رابطه (۵۸-۵) به شرح زیر محاسبه می کنیم:

$$\nabla \cdot \bar{A} = \nabla \cdot \oint_{C'} \frac{\mu_0 I d\bar{l}'}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \cdot \left(\frac{d\bar{l}'}{R} \right) \quad (۷۲-۵)$$

با استفاده از اتحاد برداری $\nabla \cdot (V\bar{A}) = \bar{A} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \bar{A}$ ، رابطه (۷۲-۵) را بصورت زیر می نویسیم:

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint_{C'} d\bar{l}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + \oint_{C'} \frac{1}{R} \nabla \cdot d\bar{l}' \right] \quad (۷۳-۵)$$

انتگرال دوم در رابطه (۷۳-۵) همواره برابر صفر است، زیرا عملگر ∇ نسبت به مختصات نقاط میدان (مختصات بدون پریم) عمل میکند ولی $d\bar{l}'$ تابعی از مختصات نقاط منبع (مختصات پریم‌دار) است و لذا $\nabla \cdot d\bar{l}'$ برابر صفر می باشد. برای محاسبه انتگرال اول در رابطه (۷۳-۵) از تساوی $\nabla(R^{-1}) = -\nabla'(R^{-1})$ ، که پریم به مفهوم مشتق گرفتن نسبت به مختصات پریم‌دار است، استفاده نموده و سپس قضیه استوکس، یعنی رابطه (۱۲۷-۱)، را بکار می بریم:

$$\oint_{C'} d\bar{l}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - \oint_{C'} \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\bar{l}' = - \int_{S'} \nabla' \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\bar{s}' \quad (۷۴-۵)$$

که S' یک سطح دلخواه محدود به منحنی بسته C' می‌باشد. اما چون کرل گرادیان یک تابع اسکالر همیشه صفر است، رابطه (۷۴-۵) برابر صفر بوده و بدین ترتیب نشان داده شده است که برای یک جریان حلقه‌ای $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ می‌باشد. این نتیجه برای جریانهای سطحی و حجمی نیز صادق است، زیرا اگر در مسیر این گونه جریانها تراکم بار الکتریکی وجود نداشته باشد میتوان آنها را بصورت مجموعه‌هایی از جریانهای حلقه‌ای بیان نمود که برای هر یک $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ بوده و در نتیجه برای کل جریان سطحی یا حجمی نیز $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ است. با استفاده از این نتیجه در رابطه (۷۱-۵)، داریم:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J} \quad (75-5)$$

رابطه (۷۵-۵)، که مشابه رابطه $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ برای پتانسیل الکتریکی است، به نام معادله پواسون برای پتانسیل برداری شناخته میشود. این معادله، پتانسیل مغناطیسی برداری را در هر نقطه از فضا به چگالی حجمی توزیع جریان در آن نقطه مربوط می‌سازد. رابطه (۷۵-۵) یک معادله دیفرانسیل برداری است و در حالت کلی معادل سه معادله اسکالر است. به عنوان مثال، در دستگاه مختصات مستطیلی رابطه (۷۵-۵) را میتوان به سه معادله زیر تجزیه کرد:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z \end{aligned} \quad (76-5)$$

در صورتی که در ناحیه‌ای از فضا $\bar{J} = 0$ باشد، رابطه (۷۵-۵) به شکل $\nabla^2 \bar{A} = 0$ ساده می‌شود که به معادله لاپلاس برای پتانسیل برداری موسوم است. این معادله نیز در دستگاه مختصات مستطیلی به سه معادله اسکالر تجزیه میشود که برای حل هر یک از آنها میتوان روشهای حل معادله لاپلاس برای پتانسیل الکتریکی، که در فصل چهارم ارائه گردید، را بکار برد. معادلات پواسون و لاپلاس برای پتانسیل برداری \bar{A} در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بسیار پیچیده هستند، زیرا برخلاف دستگاه مختصات مستطیلی مؤلفه‌های لاپلاسین بردار \bar{A} در این دو دستگاه مختصات مساوی لاپلاسین مؤلفه‌های آن نمی‌باشند.

اکنون ممکن است این سؤال به ذهن خطور کند که «آیا همانطور که برای میدان الکتریکی \bar{E} پتانسیل اسکالر V را بصورت $V = -\int \bar{E} \cdot d\bar{l}$ تعریف نمودیم، میتوان برای میدان مغناطیسی \bar{B} نیز پتانسیل اسکالری بصورت $V_m = -\frac{1}{\mu_0} \int \bar{B} \cdot d\bar{l}$ تعریف کرد و در نتیجه رابطه $\bar{B} = -\mu_0 \nabla V_m$ را که مشابه $\bar{E} = -\nabla V$ است داشت؟» جواب هم آری است و هم نه! در واقع اگر فرض کنیم پتانسیل V_m با ویژگیهای مذکور وجود داشته باشد، آنگاه میتوان نوشت:

$$\nabla \times \bar{B} = -\mu_0 \nabla \times \nabla V_m = 0 \quad (۷۷-۵)$$

از طرف دیگر، بر اساس شکل نقطه‌ای قانون آمپر $\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$ است. بنابراین اگر در ناحیه‌ای از فضا $\bar{J} \neq 0$ باشد، نمیتوان میدان مغناطیسی را متناسب با گرادیان یک تابع اسکالر فرض کرد، ولی در نقاطی که $\bar{J} = 0$ است رابطه $\bar{B} = -\mu_0 \nabla V_m$ امکان پذیر میباشد. البته ذکر این نکته ضروری است که چون میدان مغناطیسی یک میدان غیرپایستار است، $\int \bar{B} \cdot d\bar{l}$ به مسیر انتگرال‌گیری بستگی داشته و لذا نمیتوان V_m را به گونه واحدی تعیین کرد. به عبارت دیگر V_m تابعی چند مقداری خواهد بود. با این وجود، استفاده از V_m در حل پاره‌ای از مسائل مفید واقع میشود، زیرا آنچه که حائز اهمیت است نه خود V_m بلکه گرادیان V_m است. چون دیورژانس میدان مغناطیسی \bar{B} ، بطوری که در قسمت بعد خواهیم دید، همواره برابر صفر است، داریم:

$$\nabla \cdot \bar{B} = -\mu_0 \nabla \cdot \nabla V_m = -\mu_0 \nabla^2 V_m = 0$$

یا:

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad (۷۸-۵)$$

رابطه (۷۸-۵) معادله لاپلاس برای پتانسیل مغناطیسی اسکالر است. حل این معادله را میتوان به شیوه‌هایی که برای حل معادله لاپلاس در مورد پتانسیل الکتریکی بکار بردیم انجام داد.

۷-۵) معادله دیورژانس ماکسول برای میدان مغناطیسی ساکن

در قسمت قبل دیدیم که میدان مغناطیسی \bar{B} را همیشه میتوان بصورت کرل یک بردار، که آنرا پتانسیل مغناطیسی برداری نامیدیم، بیان داشت. از طرف دیگر دیورژانس کرل یک بردار همواره برابر صفر است. بنابراین چون $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ است، میتوان نتیجه گرفت که:

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (۷۹-۵)$$

رابطه (۷۹-۵) بعنوان معادله دیورژانس ماکسول برای میدان مغناطیسی شناخته میشود. این معادله توأم با معادله کرل ماکسول برای میدان مغناطیسی، یعنی $\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$ ، بطور کامل خصوصیات میدان مغناطیسی ساکن را بیان می‌دارند. معادله (۷۹-۵) تعیین میکند که آیا یک میدان برداری میتواند یک میدان مغناطیسی ساکن باشد یا نه، در صورتی که معادله کرل ماکسول میدان را به جریان مولد آن مربوط می‌سازد. اگر معادله (۷۹-۵) را با معادله دیورژانس ماکسول برای میدان الکتریکی، یعنی $\nabla \cdot \bar{E} = \rho/\epsilon_0$ ، مقایسه کنیم، روشن میشود که چیزی بنام بار مغناطیسی بطور مجزا

وجود خارجی ندارد. با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۷۹-۵) در حجم V ، داریم:

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{B}) dv = 0 \quad (۸۰-۵)$$

اما بر اساس قضیه دیورژانس میتوان نوشت:

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{B}) dv = \oint_S \bar{B} \cdot \bar{ds}$$

که S سطح بسته‌ای است که حجم V به آن محدود میشود. چون رابطه (۸۰-۵) برای هر حجم دلخواه V صادق است، میتوان نتیجه گرفت که برای هر سطح بسته S داریم:

$$\oint_S \bar{B} \cdot \bar{ds} = 0 \quad (۸۱-۵)$$

رابطه (۸۱-۵) در واقع شکل انتگرالی معادله دیورژانس ماکسول برای میدان مغناطیسی است. از آنجا که \bar{B} چگالی شار مغناطیسی است، $\oint_S \bar{B} \cdot \bar{ds}$ برابر مقدار کل شار مغناطیسی گذرنده از سطح بسته S است. بنابراین رابطه (۸۱-۵) بیان میکند که کل شار مغناطیسی گذرنده از یک سطح بسته همیشه صفر است، به عبارت دیگر هر مقدار شار که وارد سطح بسته S شود همان مقدار شار نیز از آن خارج می‌گردد. بر خلاف خطوط میدان الکتریکی که از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم میشوند، خطوط مغناطیسی همواره تشکیل منحنی‌های بسته می‌دهند. بعلاوه چون:

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 (\text{جریان دربرگرفته شده توسط مسیر } C)$$

منحنی‌های بسته باید حول جریان پدید آورنده میدان مغناطیسی تشکیل شوند. میدانهای برداری که وجه مشخصه آنها شار خالص صفر روی کلیه سطوح بسته ممکن باشد، میدانهای سلنوتیدی نامیده میشوند. میدان مغناطیسی \bar{B} و چگالی جریان الکتریکی \bar{J} (ثابت نسبت به زمان) مثالهایی از میدانهای سلنوتیدی هستند. طبیعت سلنوتیدی \bar{J} از این حقیقت ناشی می‌شود که در صورت عدم تراکم بار الکتریکی، جریان باید از یک مسیر بسته بگذرد. این نتیجه را میتوان از $\nabla \cdot \nabla \times \bar{B} = \nabla \cdot (\mu_0 \bar{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \bar{J} = 0$ نیز بدست آورد.

مثال (۱۰-۵) تحقیق نمایید که آیا میدانهای زیر میتوانند بعنوان میدانهای مغناطیسی ساکن وجود داشته باشند:

الف) در دستگاه مختصات استوانه‌ای: $\bar{B}_1 = \frac{B_0}{r} (-\sin \varphi \hat{a}_r + \cos \varphi \hat{a}_\varphi)$

ب) در دستگاه مختصات کروی: $\bar{B}_2 = B_0 (\sin \theta \hat{a}_r + \cos \theta \hat{a}_\theta)$

حل:

$$\nabla \cdot \bar{B}_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{B_0}{r} \sin \varphi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{B_0}{r^2} \cos \varphi \right) = 0 \quad (\text{الف})$$

در نتیجه \bar{B}_1 میتواند بعنوان یک میدان مغناطیسی ساکن وجود داشته باشد.

$$\nabla \cdot \bar{B}_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \theta) \neq 0 \quad (\text{ب})$$

چون $\nabla \cdot \bar{B}_2 \neq 0$ است، \bar{B}_2 نمی تواند بعنوان یک میدان مغناطیسی ساکن وجود داشته باشد.

■ خلاصه فصل

در این فصل میدان مغناطیسی ساکن را به منزله پدیده‌ای که از بارهای الکتریکی متحرک و با سرعت حرکت یکنواخت ناشی می‌شود مورد بحث و بررسی قرار دادیم. کلیه مطالعات این فصل بر اساس قانون نیروی آمپر، که به عنوان یک قانون تجربی بیان گردید، استوار می‌باشد. بطور خلاصه:

● پس از بیان قانون نیروی آمپر برای دو مدار حامل جریان، میدان مغناطیسی \vec{B} ، که چگالی شار مغناطیسی نامیده می‌شود، را تعریف کردیم. روابطی که میدان \vec{B} را بر حسب چگالیهای توزیع خطی، سطحی و حجمی جریان بیان می‌کنند نتیجه‌گیری نمودیم. از این روابط عموماً تحت عنوان قانون بیوساوار نام برده می‌شود.

● نیروی وارد آمده بر یک بار نقطه‌ای متحرک در میدان مغناطیسی را مطالعه کردیم. این نیرو همواره بر مسیر حرکت و نیز بر میدان عمود می‌باشد. رابطه نیروی لورنتز، که میدان الکتریکی \vec{E} و میدان مغناطیسی \vec{B} بر بار نقطه‌ای q که با سرعت \vec{v} حرکت می‌کند را به هم پیوند میدهد، را استخراج کردیم ($\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$).

● قانون مداری آمپر را به مثابه یک روش مهم برای مطالعه میدانهای مغناطیسی ساکن مورد بحث و بررسی قرار دادیم. بر اساس این قانون، نشان دادیم که برای هر مسیر بسته دلخواه C داریم:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (\text{جریان دربرگرفته شده توسط مسیر } C)$$

● شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$) را بدست آوردیم. این رابطه بعنوان یکی از معادلات ماکسول برای میدان مغناطیسی ساکن شناخته می‌شود.

● پتانسیل مغناطیسی برداری، \vec{A} ، را به گونه‌ای تعریف کردیم که $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ می‌باشد. با استفاده از مفهوم پتانسیل مغناطیسی برداری روش جدیدی را برای محاسبه میدان مغناطیسی \vec{B} ارائه نمودیم. روابطی که پتانسیل مغناطیسی برداری را بر حسب چگالیهای توزیع جریان خطی، سطحی و حجمی بیان می‌دارند بدست آوردیم.

● پتانسیل مغناطیسی اسکالر، V_m ، را به گونه‌ای مشروط (وقتی که $\vec{J} = 0$ باشد) تعریف کردیم. با استفاده از V_m ، میدان \vec{B} را میتوان از رابطه $\vec{B} = -\mu_0 \nabla V_m$ بدست آورد.

● معادله پواسون را برای پتانسیل مغناطیسی برداری نتیجه‌گیری کردیم ($\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$).

همچنین نشان دادیم که پتانسیل مغناطیسی اسکالر در معادله لاپلاس صدق می‌کند
 $(\nabla^2 V_m = 0)$.

• نشان دادیم که برای میدان مغناطیسی \vec{B} همواره $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ و $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ بوده و لذا خطوط میدان مغناطیسی همیشه منحنی‌های بسته‌ای هستند. رابطه $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ بعنوان یکی از معادلات ماکسول برای میدان مغناطیسی شناخته می‌شود.

• اشاره کردیم که روابط $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ و $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ برای بیان کامل میدان مغناطیسی اکتفا می‌کنند. رابطه دیورژانس و ویژگی سلنوییدی بودن میدان را بیان می‌کند، در حالیکه رابطه کرل میدان را به منبع آن یعنی \vec{J} مربوط می‌سازد.

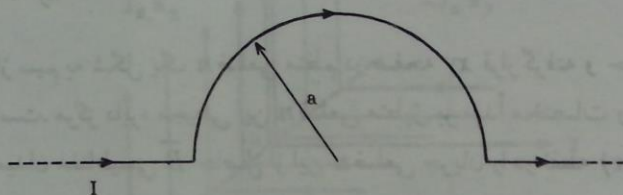
■ مسائل

۱-۵ دو مدار بسته C_1 و C_2 بترتیب حامل جریانهای I_1 و I_2 می‌باشند. ثابت کنید که نیروی کل وارد آمده بر مدار C_2 توسط مدار C_1 مساوی و در خلاف جهت نیروی کل وارد آمده بر مدار C_1 توسط مدار C_2 است.

۲-۵ یک قطعه سیم نازک مستقیم به طول l و جرم m بطور افقی در امتداد شرق به غرب و در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 که به سمت شمال است قرار می‌گیرد. چه جریانی باید از سیم عبور کند تا نیروی جاذبه وارد آمده بر سیم از طرف زمین بطور کامل خنثی شود. مقدار این جریان را وقتی که قطعه سیم دارای طول ۱ متر و جرم ۳۰ گرم بوده و در میدان مغناطیسی زمین، که برابر $W/m^2 \times 10^{-4} \times 0/3$ فرض میشود، قرار بگیرد محاسبه کنید.

۳-۵ نشان دهید که نیروی کل وارد آمده بر یک مدار بسته حامل جریان I وقتی که در میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} قرار گیرد همواره برابر صفر است.

۴-۵ یک رشته سیم مستقیم به طول بینهایت و حامل جریان I در قسمتی از مسیر، شکل یک نیمدایره به شعاع a ، مطابق شکل (م-۴-۵)، را به خود می‌گیرد. میدان مغناطیسی \vec{B} را در مرکز نیمدایره محاسبه کنید.

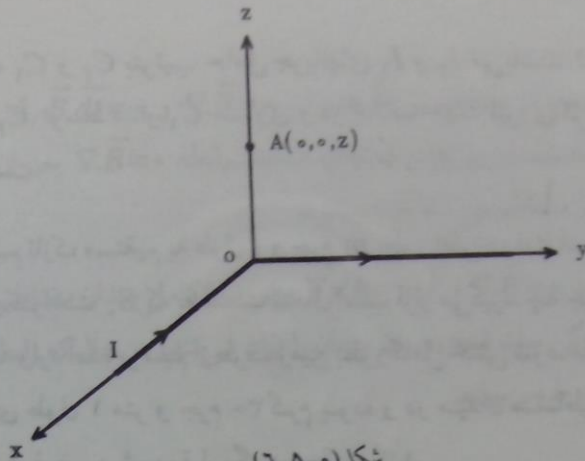


شکل (م-۴-۵)

۵-۵ یک دوقطبی مغناطیسی مستطیلی شکل به اضلاع a و b در نظر می‌گیریم. فرض میشود که دوقطبی در صفحه xy واقع و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد. نشان دهید که میدان مغناطیسی \vec{B} در فواصل بسیار دور از دوقطبی از رابطه (۵-۲۲) بدست می‌آید که در آن گشتاور دوقطبی برابر $m = lab$ میباشد.

۶-۵ جریان I در امتداد محورهای x و y ، مطابق شکل (م-۶-۵)، جریان دارد. میدان مغناطیسی \vec{E}

را در نقطه‌ای روی محور z محاسبه کنید.



شکل (م-۵-۶)

۷-۵ دو حلقه جریان دایره‌ای شکل در نظر می‌گیریم بطوری که مراکز هر دو منطبق بر محور z باشد، موازی با و متقارن نسبت به صفحه xy قرار بگیرند، فاصله آنها از یکدیگر $2d$ و شعاع هر یک برابر a باشد و حامل جریان I ولی در دو جهت مخالف باشند. چنین سیستمی را چهارقطبی مغناطیسی نامند. مطلوب است محاسبه میدان مغناطیسی \vec{B} در فواصل دور از چهارقطبی در نقطه‌ای واقع بر:

الف) محور z ,

ب) صفحه xy .

۸-۵ حلقه‌ای از سیم به شکل یک n ضلعی منظم در صفحه xy قرار گرفته و حامل جریان I در جهت کلی φ است. مرکز دایره محیطی این n ضلعی منطبق بر مبدأ مختصات و شعاع آن برابر a فرض میشود. میدان مغناطیسی \vec{B} حاصل از این n ضلعی جریان را در نقطه $(0, 0, z)$ محاسبه کنید. با میل دادن n به سمت بینهایت، میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار جریان دایره‌ای شکل به شعاع a را در نقطه $(0, 0, z)$ بدست آورید.

۹-۵ یک رشته سیم نازک بطور پیوسته به شکل حلزون در صفحه xy پیچیده میشود. این سیم پیچ حلزونی از مرکز مختصات شروع و در نقطه‌ای به شعاع a خاتمه می‌یابد. اگر تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول و در امتداد شعاعی برابر n و جریان گذرنده از آن برابر I و در جهت φ باشد، میدان مغناطیسی \vec{B} را در نقطه $(0, 0, z)$ محاسبه نمایید.

۱۰-۵ یک جریان سطحی در جهت z و از بخشی از صفحه $y=0$ که بین $x=a$ و $x=-a$ است

می‌گذرد. فرض میشود که چگالی جریان سطحی J_s تابع دلخواهی از x باشد. نشان دهید که مؤلفه‌های میدان مغناطیسی \vec{B} در نقطه $(0, y, 0)$ از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$B_x = -\frac{\mu_0 y}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_s dx}{x^2 + y^2}$$

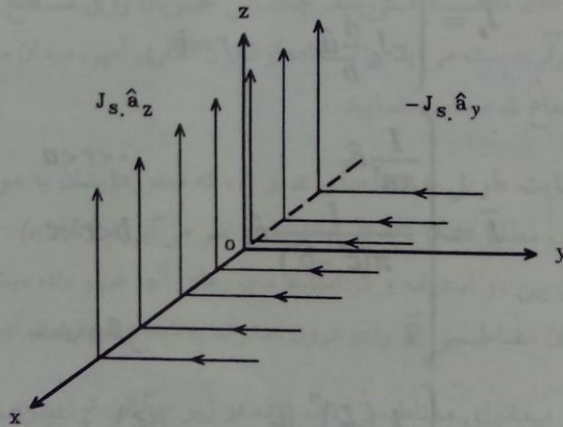
$$B_y = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_s x dx}{x^2 + y^2}$$

$$B_z = 0$$

مؤلفه‌های میدان را برای توزیعهای جریان زیر محاسبه کنید:

الف) $\vec{J}_s = J_{s_0} \hat{a}_z$ ب) $\vec{J}_s = J_{s_0} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \hat{a}_z$

۱۱-۵ یک جریان سطحی با چگالی توزیع یکنواخت J_s روی دو نیم صفحه $(y=0, z>0)$ و $(z=0, y>0)$ ، مطابق شکل (۱۱-۵-م)، توزیع شده است. میدان مغناطیسی \vec{B} حاصل از این توزیع جریان را در تمام نقاط فضا تعیین کنید.



شکل (۱۱-۵-م)

۱۲-۵ جریان I از یک سیم هادی مستقیم که هم محور با z در نظر گرفته میشود می‌گذرد. جریان I بطور یکنواخت در سطح مقطع سیم، که مستطیلی شکل و به ابعاد a و b میباشد، توزیع می‌گردد. میدان مغناطیسی \vec{B} را در مبدأ مختصات محاسبه نمایید. سیم هادی بینهایت طولی فرض میشود.

۱۳-۵ مسأله (۱۲-۵) را برای حالتی که سیم هادی فضای $a \leq r \leq b$ و $0 \leq \phi \leq \pi$ را در دستگاه

مختصات استوانه‌ای اشغال نماید تکرار کنید.

۱۴-۵ با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی \bar{B} ناشی از توزیعهای جریان زیر، که در دستگاه مختصات مستطیلی بیان شده‌اند، را بدست آورید:

$$\bar{J}_s = \begin{cases} J_s \hat{a}_z & y = a \\ -J_s \hat{a}_z & y = -a \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\bar{J} = \begin{cases} y \hat{a}_z & |y| < a \\ \cdot & |y| > a \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\bar{J} = \begin{cases} (a - |y|) \hat{a}_z & |y| < a \\ \cdot & |y| > a \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۱۵-۵ مسأله (۱۴-۵) را برای توزیعهای جریان زیر، که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده‌اند، تکرار نمایید:

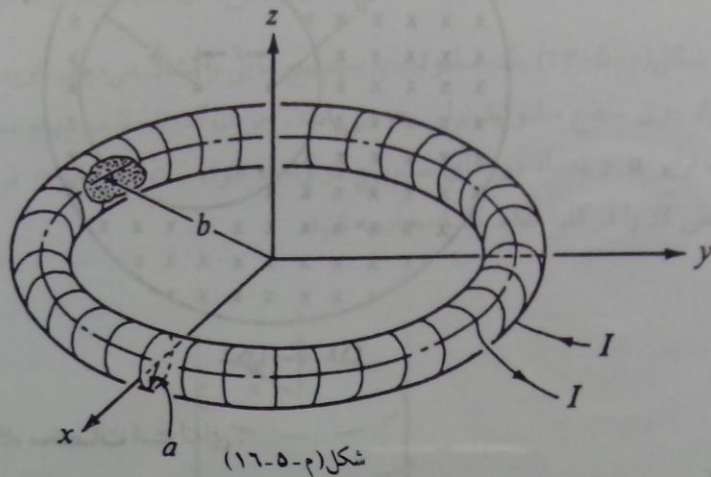
$$\bar{J}_s = \begin{cases} J_s \hat{a}_z & r = a \\ -J_s \frac{a}{b} \hat{a}_z & r = b \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\bar{J} = \begin{cases} \frac{I}{\pi a^2} \hat{a}_z & 0 < r < a \\ -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \hat{a}_z & b < r < c \\ \cdot & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\bar{J} = \begin{cases} J \left(\frac{r}{a}\right)^n \hat{a}_z & n \geq 1, 0 < r < a \\ \cdot & r > a \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۱۶-۵ یک چنبره با سطح مقطع دایره‌ای شکل از دوران دایره‌ای واقع در صفحه xz ، با شعاع a و به مرکز $(b, 0, 0)$ حول محور z بوجود می‌آید ($a < b$). یک رشته سیم نازک حامل جریان I بطور پیوسته و یکنواخت به دور چنبره پیچیده می‌شود. تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول و در امتداد

محیط متوسط چنبره برابر n فرض میشود. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی \bar{B} را در درون و بیرون چنبره بدست آورید. شکل (م-۵-۱۶) ابعاد چنبره و سیم پیچ آن را نشان می دهد.



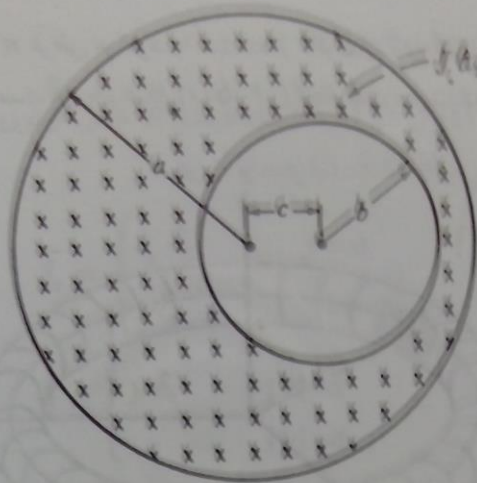
۱۷-۵ جریان I از یک رشته سیم در امتداد محور z از $z = \infty$ تا $z = a$ گذشته و سپس از طریق یک سطح کروی به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات به نقطه $z = -a$ رسیده و در امتداد یک رشته سیم از $z = -a$ تا $z = -\infty$ ادامه می یابد. چگالی جریان روی سطح کروی از رابطه $\bar{J}_s = (I/2\pi a \sin \theta) \hat{a}_\theta$ بدست می آید. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی \bar{B} را در درون و بیرون کره به شعاع a محاسبه نمایید.

۱۸-۵ دو استوانه بینهایت طویل به شعاعهای a و b ، که محورهایشان به موازات و به فاصله $c < a - b$ از یکدیگرند، مطابق شکل (م-۵-۱۸)، را در نظر می گیریم ($a > b$). جریانی با چگالی یکنواخت J_0 از فضای بین دو استوانه و در امتداد محورهای آنها عبور داده میشود. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی \bar{B} را در درون استوانه به شعاع b بدست آورید.

۱۹-۵ برای هر یک از میدانهای مغناطیسی داده شده در زیر چگالی توزیع جریان مولد میدان را بدست آورید:

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی:

$$\bar{B} = \begin{cases} \mu_0 J_s \hat{a}_x & -\infty < y < 0 \\ \frac{1}{3} \mu_0 J_s \hat{a}_x & 0 < y < a \\ -\mu_0 J_s \hat{a}_x & a < y < +\infty \end{cases}$$



شکل (۴-۵-۱۱)

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\bar{B} = \begin{cases} \mu_0 J_s r \hat{a}_\phi & 0 < r < a \\ \mu_0 J_s \frac{a^2}{r} \hat{a}_\phi & a < r < b \\ 0 & b < r < +\infty \end{cases}$$

ج) در دستگاه مختصات کروی:

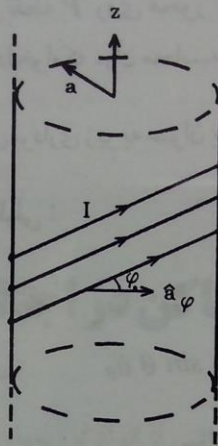
$$\bar{B} = \begin{cases} \mu_0 J_s (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta) & 0 < r < a \\ \frac{1}{r} \mu_0 J_s \left(\frac{a}{r}\right)^2 (r \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) & a < r < +\infty \end{cases}$$

۴۵-۵ بار الکترونیکی با چگالی یکنواخت ρ در یک فضای کروی به شعاع a توزیع شده است. این کره بار با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z و در جهت φ می‌چرخد. پتانسیل مغناطیسی برداری حاصل از این بار کروی چرخنده را در فواصل دور از مرکز کره محاسبه نمایید. مرکز کره را منطبق بر مبدأ مختصات فرض کنید.

۴۶-۵ بار الکترونیکی با چگالی یکنواخت ρ_s روی سطح یک دیسک به شعاع a توزیع شده است. این دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور خود می‌چرخد. نشان دهید که میدان مغناطیسی در مرکز دیسک از رابطه $B = \mu_0 \rho_s \omega a / 2$ بدست می‌آید.

۲۲-۵ جریان I از یک رشته سیم در امتداد محور z از $z = -\infty$ تا $z = 0$ گذشته و سپس روی یک سطح مخروطی با نیم‌زاویه θ_0 و محوری منطبق بر نیمه مثبت محور z بطور متقارن و شعاعی توزیع می‌گردد. میدان مغناطیسی \vec{B} ناشی از این توزیع جریان را در تمام نقاط فضا تعیین نمایید.

۲۳-۵ شکل (م-۵-۲۳) یک سلنویید با سیم‌پیچ مایل را نشان می‌دهد. زاویه بین سیم‌پیچ و بردار واحد \hat{a}_φ روی سطح سلنویید برابر φ می‌باشد. جریان گذرنده از سیم‌پیچ سلنویید برابر I ، شعاع سلنویید برابر a و تعداد دورهای سیم‌پیچ در واحد طول سلنویید برابر n فرض می‌شود. میدان مغناطیسی \vec{B} را در کلیه نقاط فضا محاسبه کنید.



شکل (م-۵-۲۳)

۲۴-۵ پتانسیل مغناطیسی برداری \vec{A} را برای توزیعی جریان در مسائل (۵-۱۴-الف) و (۵-۱۵-الف) بدست آورید. پس از یافتن \vec{A} میدان مغناطیسی \vec{B} را بدست آورید. صحت نتایج بدست آمده برای \vec{B} را، با مقایسه آنها با نتایج بدست آمده بر اساس قانون مداری آمپر، تحقیق کنید.

۲۵-۵ ضمن مطالعه معادله پواسون برای پتانسیل مغناطیسی برداری \vec{A} ، اشاره نمودیم که در دستگاه مختصات مستطیلی مؤلفه‌های لاپلاسین یک بردار برابر لاپلاسین مؤلفه‌های آن بردار هستند. یعنی برای $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$ داریم:

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{a}_x + (\nabla^2 A_y) \hat{a}_y + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z$$

همچنین تأکید کردیم که این ویژگی برای لاپلاسین یک بردار در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و

کروی وجود ندارد. نشان دهید که :

الف) در دستگاه مختصات استوانه‌ای : $\nabla^2 \bar{A} \neq (\nabla^2 A_r) \hat{a}_r + (\nabla^2 A_\phi) \hat{a}_\phi + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z$

ب) در دستگاه مختصات کروی : $\nabla^2 \bar{A} \neq (\nabla^2 A_r) \hat{a}_r + (\nabla^2 A_\theta) \hat{a}_\theta + (\nabla^2 A_\phi) \hat{a}_\phi$

۲۶-۵ حلقه‌ای به شعاع a و حامل جریان I در صفحه xy واقع شده و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات می‌باشد. پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m را در نقطه‌ای مثل $P(0, 0, z)$ روی محور z بدست آورید.

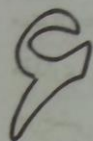
۲۷-۵ برای حلقه جریان مسأله (۲۶-۵) نشان دهید که $V_m = (I/4\pi)\Omega$ که Ω زاویه‌ای فضایی محدود به حلقه جریان و دیده شده از نقطه P روی محور z می‌باشد. (این نتیجه برای یک حلقه جریان با شکل دلخواه و برای هر نقطه دلخواه که در آن محاسبه V_m مورد نظر است صادق می‌باشد.)

۲۸-۵ تحقیق کنید کدامیک از میدانهای برداری زیر به عنوان یک میدان مغناطیسی قابل قبول است :

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی : $\bar{B}_1 = \frac{1}{z} (y \hat{a}_y - z \hat{a}_z)$

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای : $\bar{B}_2 = \frac{1}{r^n} \hat{a}_\phi$

ج) در دستگاه مختصات کروی : $\bar{B}_3 = (1 + \frac{2}{r}) \cos \theta \hat{a}_r - (1 - \frac{1}{r}) \sin \theta \hat{a}_\theta$



میدان مغناطیسی ساکن در اجسام و انرژی مغناطیسی

در فصل قبل میدان مغناطیسی ناشی از انواع توزیعهای جریان را در فضای آزاد مطالعه نمودیم. اکنون، در ادامه بحث خود پیرامون میدان مغناطیسی ساکن، به بررسی تأثیرات ماده و میدان مغناطیسی بر یکدیگر می‌پردازیم. وقتی که یک جسم در معرض میدان مغناطیسی واقع می‌شود، ذرات باردار در اتمهای جسم از خود عکس‌العمل نشان می‌دهند که به شکل پدیدآمدن میدان جدیدی بروز میکنند. ویژگیهای این میدان جدید به خواص مغناطیسی جسم بستگی دارد. در اینجا نیز به همان منوال که در مورد ماده و میدان الکتریکی عمل کردیم، خواص مغناطیسی ماده را بطور کیفی در مقیاس میکروسکوپی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم، ولی تأثیر ماده بر میدان، یعنی تغییراتی که حضور یک جسم در میدان مغناطیسی بوجود می‌آورد و نتایجی که حائز اهمیت کاربردی و مهندسی هستند، را در مقیاس ماکروسکوپی مطالعه می‌کنیم.

۶-۱) خواص مغناطیسی اجسام و دسته‌بندی آنها

برای تشریح خواص مغناطیسی اجسام از مدل ساده شده اتم استفاده می‌کنیم. بر اساس چنین

مدلی، در هر اتم الکترونها در مدارهای دایره‌ای شکلی به دور هسته گردش می‌کنند و در عین حال هر الکترون حول محوری به دور خود نیز می‌چرخد. این حرکات الکترونها که شبیه حرکات انتقالی و وضعی کره زمین هستند را بترتیب حرکت مداری و حرکت چرخشی می‌نامیم. علاوه بر الکترونها، هسته نیز به نوبه خود دارای حرکت چرخشی می‌باشد. از آنجا که حرکت ذرات باردار ایجاد جریان الکتریکی می‌کند، حرکات مداری و چرخشی ذرات اتم را میتوان به مثابه حلقه‌های جریان و به تعبیر دیگر بعنوان دو قطبی‌های مغناطیسی با گشتاورهایی در مقیاس اتمی دانست. گشتاور مداری یک الکترون مقادیر متفاوتی را بسته به نوع اتم و شعاع مدار الکترون دارا است، ولی محاسبات مکانیک کوانتومی نشان میدهد که گشتاور چرخشی هر الکترون فقط ممکن است یکی از دو مقدار $\pm 9/3 \times 10^{-24}$ را بر حسب واحد آمپر متر مربع به خود اختصاص دهد. بدین ترتیب هر اتم را میتوان بصورت مجموعه‌ای از دو قطبی‌های مغناطیسی در نظر گرفت که گشتاور کل آن ممکن است مقداری برابر صفر یا غیر صفر داشته باشد. اما، هسته اتم بدلیل جرم سنگینش دارای سرعت چرخشی به مراتب کوچکتر از سرعت چرخش یک الکترون است، بطوری که جریان ناشی از چرخش هسته بسیار کوچکتر از جریان حاصل از چرخش یک الکترون بوده و در نتیجه از گشتاور مغناطیسی هسته در مقابل گشتاور چرخشی الکترون میتوان صرف‌نظر کرد. پس بطور خلاصه، حاصل جمع گشتاورهای مداری و چرخشی الکترونها یک اتم گشتاور مغناطیسی خالص آن اتم را تشکیل میدهد و چگونگی ترکیب گشتاورهای اتمهای یک جسم خاصیت مغناطیسی آن را تعیین میکند. بنابراین، ماهیت و خواص مغناطیسی اجسام را میتوان منحصرأ در حرکات مداری و چرخشی الکترونها جستجو کرد.

بطور کلی سه پدیده مغناطیسی اصلی به نامهای دیامغناطیس^۱، پارامغناطیس^۲ و فرومغناطیس^۳ شناخته شده‌اند که پدیده اول به حرکت مداری الکترونها نسبت داده می‌شود و دو پدیده دیگر را ناشی از حرکت چرخشی الکترونها میدانند. علاوه بر پدیده‌های مزبور دو پدیده دیگر به نامهای ضد فرومغناطیس^۴ و فری مغناطیس^۵ نیز وجود دارند که شکلهای تغییر یافته پدیده فرومغناطیس محسوب میشوند. وقتی که جسمی تحت یک میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرد یکی از پدیده‌های مذکور بطور عمده در جسم رخ میدهد. بر حسب اینکه تأثیر کدام پدیده جنبه غالب داشته باشد، جسم را از حیث خاصیت مغناطیسی به اسم آن پدیده نامگذاری میکنند. در اینجا به اختصار بشرح هر یک از این پدیده‌ها می‌پردازیم.

1 - Diamagnetism

2 - Paramagnetism

■ دیامغناطیس

در بسیاری از اجسام گشتاور مغناطیسی کل هر اتم در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی برابر صفر است. برای آنکه ببینیم اعمال یک میدان مغناطیسی چه تأثیری بر این گونه اجسام می‌گذارد، تغییراتی را که در حرکت مداری الکترون بوجود می‌آید مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور الکترونی را در نظر می‌گیریم که قبل از اعمال میدان خارجی در مدارش به شعاع a و با سرعت زاویه‌ای ω_0 حول هسته اتم خود گردش کند. گردش الکترون به دور هسته را میتوان معادل جریان $I = e\omega_0 / 2\pi$ و در خلاف جهت حرکت الکترون دانست. بنابراین، گشتاور مغناطیسی ناشی از گردش این الکترون به دور هسته برابر $m_0 = \frac{e\omega_0}{2\pi} \pi a^2$ خواهد بود. نیرویی که حرکت دورانی الکترون به دور هسته را تأمین میکند همان نیروی جاذبه کولمب بین بار منفی الکترون و بار مثبت هسته است. حال فرض کنید که یک میدان مغناطیسی خارجی با چگالی شار \vec{B}_0 بر الکترون اعمال شود. جهت سهولت میدان را عمود بر صفحه مدار الکترون در نظر می‌گیریم. میدان \vec{B}_0 بر الکترون متحرک نیرو وارد می‌آورد، بطوری که پس از اعمال میدان الکترون باید تحت تأثیر دو نیرو، یکی نیروی کولمب و دیگری نیروی مغناطیسی ناشی از \vec{B}_0 ، به حرکت خود ادامه دهد. بدیهی است که تغییر نیروی کل اعمال شده بر الکترون باید یا تغییر شعاع مدار یا تغییر سرعت زاویه‌ای آن را به دنبال داشته باشد. ولی ضرورت‌های مکانیک کوانتومی ایجاب میکند که شعاع مدار الکترون ثابت بماند. ^۴ لذا اعمال میدان \vec{B}_0 منجر به تغییر سرعت زاویه‌ای الکترون از ω_0 به ω و در نتیجه تغییر گشتاور مغناطیسی m_0 به m میشود. میتوان نشان داد که تغییر گشتاور برابر $\Delta m = m - m_0 = -e^2 a^2 \vec{B}_0 / 2me$ است، که m_e جرم الکترون است (مطالعه جزئیات بیشتر به مسأله (۱-۶) مוקول می‌گردد). ملاحظه می‌کنیم که این تغییر گشتاور به جهت گردش الکترون بستگی ندارد. به عبارت دیگر، اگر دو الکترون در دو جهت مخالف یکدیگر در یک مدار گردش کنند، تغییر گشتاور برای هر دو در یک جهت خواهد بود. بنابراین میتوان چنین نتیجه گرفت که یک اتم حتی وقتی که گشتاور مغناطیسی کل آن صفر است پس از اعمال میدان دارای گشتاور خالص غیر صفر میشود و به بیان دیگر میدان گشتاوری را در اتم القا میکند. القای گشتاور مغناطیسی در یک جسم در حقیقت به منزله مغناطیس شدن جسم است، زیرا جسم خود بصورت منبع میدان مغناطیسی عمل میکند. گشتاور القا شده در اتمها منشأ میدان مغناطیسی ثانویه‌ای می‌شود که در

^۴ مکانیک کوانتومی پیش‌بینی میکند که الکترون‌ها میتوانند فقط در مدارهای معینی باشند، یعنی شعاع مدار الکترون چندی شده‌بوده‌نمی‌تواند بطور پیوسته تغییر کند. در این مبحث، به دلیل کوچک بودن نیروی مغناطیسی، شعاع مدار الکترون ثابت باقی می‌ماند.

خلاف جهت میدان خارجی (چون $\Delta \vec{m}$ و \vec{B} در خلاف جهت یکدیگرند) ولی بسیار ضعیفتر از آن می‌باشد. این پدیده، که مغناطیس شدن یک جسم در خلاف جهت میدان اعمال شده است و نظیر قطبی شدن اجسام عایق تحت تأثیر میدان الکتریکی است، را دیامغناطیس و اجسامی که گشتاور مغناطیسی خالص هر یک از اتم‌هایشان در غیاب یک میدان خارجی برابر صفر است و در نتیجه این پدیده در آنها روی میدهد را اجسام دیامغناطیسی نامند. میدان مغناطیسی در اجسام دیامغناطیسی معمولاً به میزان بسیار ناچیزی از میدان اعمال شده کوچکتر است. پدیده دیامغناطیس مستقل از درجه حرارت بوده و پدیده‌ای است که در کلیه اجسام، وقتی که در معرض میدان مغناطیسی واقع شوند، رخ میدهد. ولی باید توجه داشت که همه اجسام دیامغناطیسی نیستند، زیرا پدیده‌های دیگر ممکن است خاصیت دیامغناطیسی جسم را تحت الشعاع قرار داده و به آن خواص دیگری ببخشند. مس، روی، سیلیسیم، نقره و جیوه نمونه‌هایی از اجسام دیامغناطیسی هستند.

■ پارامغناطیس

دسته‌های دیگری از اجسام وجود دارند که هر یک از اتم‌هایشان، حتی در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی، دارای گشتاور مغناطیسی خالص غیر صفر است. این گشتاور غیر صفر ناشی از فزونی گشتاور چرخشی یوگشتاور مداری الکترونها است. بر حسب اینکه گشتاور اتمها در این قبیل اجسام به چه نحو با یکدیگر ترکیب شوند، جسم ممکن است پارامغناطیسی، فرومغناطیسی، ضدفرومغناطیسی یا قوی مغناطیسی باشد. در اجسام پارامغناطیسی گرچه هر یک از اتمها دارای گشتاور خالص غیر صفر است ولی به دلیل اغتشاشات حرارتی موجود در درون آنها، دو قطبی‌های مغناطیسی اتمها فاقد هر گونه آرایش منظم بوده و در کلیه جهات بطور تصادفی توزیع میشوند، بطوری که جسم در مجموع از نظر مغناطیسی خنثی است. اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی، همان گونه که در شکل (۶-۱) نشان داده شده است، دو قطبی‌های اتمی را تحت گشتاور قرار داده و آنها را بطور نسبی با خود هم‌جهت می‌سازد. البته، اغتشاشات حرارتی همواره سعی در برهم زدن آرایش دو قطبی‌ها داشته و از اینرو هم‌جهتی دو قطبی‌ها با میدان بطور کامل صورت نمی‌پذیرد. در واقع هرچه میدان قویتر باشد، دو قطبی‌ها بهتر و بیشتر با میدان هم‌جهت میشوند. آرایش دو قطبی‌های مغناطیسی اتمی در اجسام پارامغناطیسی به گونه‌ای است که میدان کل حاصل از آنها هم‌جهت با میدان خارجی ولی بسیار ضعیفتر از آن است. بنابراین میدان مغناطیسی در اجسام پارامغناطیسی به میزان ناچیزی بزرگتر از میدان خارجی است. پدیده مغناطیس شدن یک جسم را بطور ضعیف و در جهت میدان اعمال شده پارامغناطیس نامند. نظر به اینکه اغتشاشات حرارتی در برهم زدن آرایش دو قطبی‌های اتمی دخالت دارند، پارامغناطیس تابع درجه حرارت جسم بوده و هرچه درجه حرارت افزایش یابد این پدیده به میزان ضعیفتری بروز میکند. نمونه‌هایی از اجسام

■ فرو

برخ

به میزان

نزون این

چندین

حوزه‌های

سانتیمتر

خوردی را

پدیده فرو

به درجه

فرومغناط

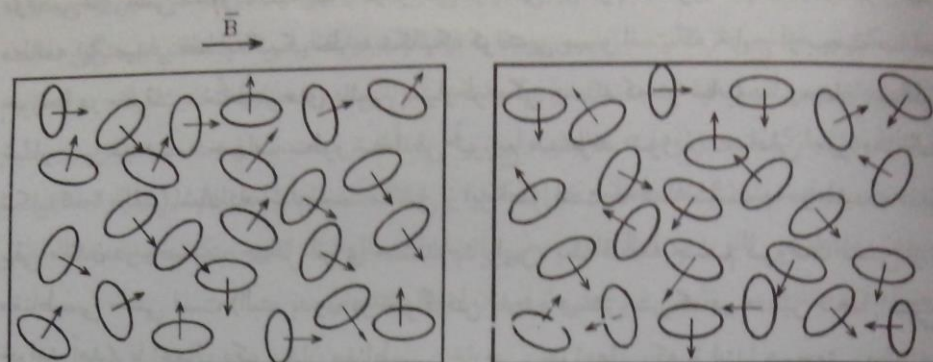
فرومغناط

فرومغناط

فرومغناط

فرومغناط

پارامغناطیسی آلومینیم، کرم، منگنز، قلع و پلاتین می‌باشند.



(ب)

(الف)

شکل (۱-۶) اجسام پارامغناطیسی (الف) توزیع تصادفی دو قطبی‌های مغناطیسی اتمی در غیاب میدان خارجی

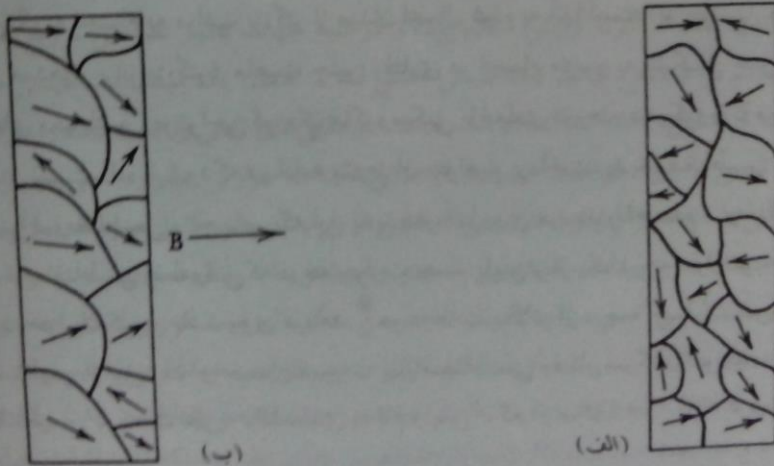
(ب) هم‌جهتی نسبی دو قطبی‌های مغناطیسی با میدان خارجی پس از اعمال میدان

■ فرومغناطیس

برخی اجسام مانند آهن، نیکل، کبالت و آلیاژهای آنها تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی به میزان بسیار زیادی در جهت میدان اعمال شده مغناطیس میشوند، بطوری که میدان مغناطیسی در درون اینگونه اجسام به مراتب بزرگتر از میدان اعمال شده به آنها است (تا چندین هزار و حتی چندین صدهزار برابر بزرگتر). ماهیت چنین رفتاری در اجسام مزبور به تشکیل خود به خودی حوزه‌های مغناطیسی در نواحی کوچک ماکروسکوپی با ابعادی در حدود میکرون تا میلیمتر و حتی سانتیمتر نسبت داده میشود که در ادامه بشرح آن خواهیم پرداخت. پدیده مغناطیس شدن خود به خودی را فرومغناطیس و اجسامی که این پدیده در آنها روی میدهد را اجسام فرومغناطیسی نامند. پدیده فرومغناطیس فقط وقتی که درجه حرارت جسم پایین‌تر از یک درجه حرارت بحرانی موسوم به درجه حرارت کوری باشد روی میدهد.^۱ در درجات بالاتر از درجه حرارت کوری خاصیت فرومغناطیس از بین رفته و جسم بصورت پارامغناطیسی رفتار میکند. توجیه رفتار اجسام فرومغناطیسی به کمک نظریه دانشمندی به نام وایس^۱، که در سال ۱۹۰۶ ارائه گردید، امکان‌پذیر

^۱ درجه حرارت کوری (Curie Temperature) برای آهن $1043^{\circ}K$ ، برای نیکل $631^{\circ}K$ و برای کبالت $1394^{\circ}K$ میباشد.

است. بر اساس این نظریه، در اجسام فرومغناطیسی یک میدان بسیار قوی ناشی از اندرکنش دو قطبی های اتمی مجاور، کلیه آنها را در نواحی کوچکی موسوم به حوزه در یک امتداد قرار میدهد. مطالعه این میدان فقط به کمک نظریه مکانیک کوانتومی میسر است که خارج از بحث ما است. حوزه ها در حقیقت مغناطیس های دائمی بسیار کوچکی هستند که در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی در همه جهات بطور تصادفی توزیع میشوند. توزیع تصادفی حوزه ها، که در شکل (۶-۲-الف) نشان داده شده است، ناشی از این اصل است که همه سیستمها در طبیعت مایل به باقی ماندن در وضعیت حداقل انرژی هستند. بنابراین، یک قطعه جسم فرومغناطیسی از نظر مغناطیسی خنثی است (البته بدون در نظر گرفتن پدیده هیستریزیس که در همین فصل شرح آن خواهد آمد). با اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی، حوزه هایی که از ابتدا هم جهتی بیشتری با میدان خارجی دارند، در ازای کوچکتر شدن بقیه حوزه ها، گسترش می یابند. در صورتی که میدان خارجی به اندازه کافی قوی باشد برخی حوزه ها از طریق چرخیدن با میدان هم جهت میشوند. شکل (۶-۲-ب) هم جهتی نسبی حوزه ها با میدان خارجی را نشان میدهد. ایجاد حوزه های نسبتاً وسیع و هم جهت (بطور نسبی) با میدان خارجی به معنای بوجود آمدن یک میدان مغناطیسی بسیار قویتر از میدان خارجی در درون جسم است. اگر میدان خارجی ضعیف باشد، پس از برداشتن آن، حوزه ها و در نتیجه خود جسم به وضعیتی نزدیک به وضعیت قبل از اعمال میدان برمیگردند. ولی اگر میدان خارجی به اندازه کافی قوی باشد گسترش حوزه ها به حدی میرسد که دیگر بازگشت به حالت اولیه غیرممکن میشود و پس از برداشتن میدان خارجی جسم مقداری از مغناطیس القا شده

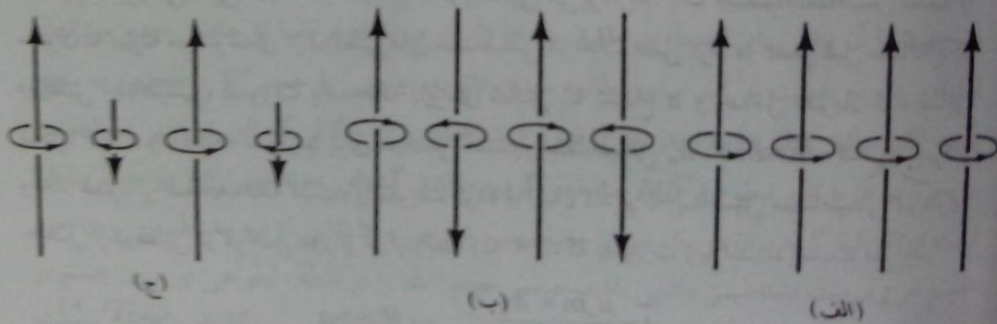


شکل (۶-۲) اجسام فرومغناطیسی (الف) توزیع تصادفی حوزه ها در غیاب میدان خارجی (ب) گسترش و چرخش حوزه ها پس از اعمال میدان خارجی و هم جهتی نسبی آنها با میدان

در خود را حفظ میکند. بنابراین، اگر یک جسم فرومغناطیسی تحت یک میدان مغناطیسی قوی قرار داده شود، پس از حذف میدان جسم بصورت مغناطیس دائم (آهنربا) عمل میکند. این پدیده را که وضعیت کنونی جسمی از نظر مغناطیس بودن به وضعیت مغناطیسی گذشته‌اش بستگی داشته باشد هیستریزیس^۱ نامند. (هیستریزیس یک کلمه یونانی به معنای تأخیر است. در اجسام فرومغناطیسی بازگشت حوزه‌ها به حالت اولیه توأم با تأخیر است.) مبحث هیستریزیس بطور مشروحتری در قسمت (۶-۷) مطالعه خواهد شد. بر خلاف اجسام دیامغناطیسی و پارامغناطیسی که میدان مغناطیسی ثانویه در آنها بطور خطی با میدان اعمال شده تغییر میکند، میدان مغناطیسی در اجسام فرومغناطیسی تابعی غیرخطی از میدان اعمال شده است.

■ ضد فرومغناطیس و فری مغناطیس

این دو پدیده شکل‌های تغییر یافته فرومغناطیس در اجسامی هستند که دارای دو دسته اتم با پیوندهای قوی بین اتمی میباشند. اگر گشتاور چرخشی مربوط به این دو دسته اتم، مطابق شکل (۶-۳-الف)، موازی و هم‌جهت با یکدیگر قرار بگیرند جسم فرومغناطیسی است. دلیل فرومغناطیسی بودن برخی آلیاژهای منگنز که خود عنصری غیرفرومغناطیسی است، بوجود آمدن گشتاورهای چرخشی هم‌جهت، مطابق شکل (۶-۳-الف)، در آنها است. اما اگر، همانگونه که شکل (۶-۳-ب) نشان میدهد، گشتاورهای اتمی موازی و مختلف‌الجهت و دارای اندازه‌های مساوی باشند بطوری که گشتاور کل جسم حتی پس از اعمال یک میدان خارجی صفر باشد، جسم ضد فرومغناطیسی نامیده میشود. اکسید منگنز نمونه‌ای از یک جسم ضد فرومغناطیسی است.



شکل (۳-۶) آرایش گشتاورهای اتمی در (الف) اجسام فرومغناطیسی (ب) اجسام ضد فرومغناطیسی

(ج) اجسام فری مغناطیسی

بالاخره، اگر گشتاورهای اتمی، همانطور که در شکل (۶-۳-ج) نشان داده شده است، موازی و مختلف‌الجهت ولی با اندازه‌های نامساوی باشند گفته میشود که جسم از نوع فری مغناطیسی است. گروهی از اجسام فری مغناطیسی موسوم به فریت‌ها هستند که از ترکیب Fe_3O_4 با اکسید فلزاتی از قبیل آهن، منگنز، کبالت و نیکل بوجود می‌آیند. فریت‌ها دارای کاربردهای صنعتی فراوانی هستند، زیرا هدایت الکتریکی آنها کم است و تلفات حرارتی به مراتب کمتری از اجسام فرومغناطیسی دارند در حالیکه خواص مغناطیسی آنها با اجسام فرومغناطیسی قابل مقایسه است. اکسید آهن با فرمول Fe_3O_4 نمونه‌ای از فریت و یک جسم فری مغناطیسی است.

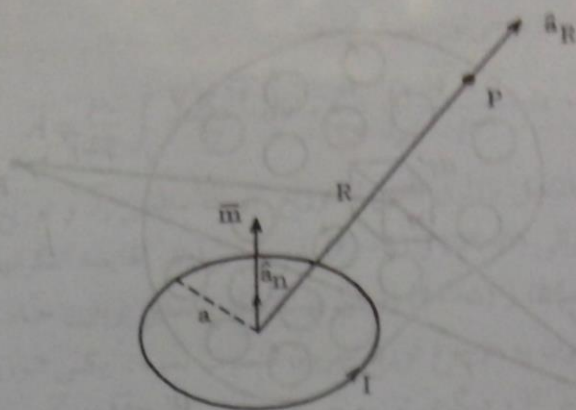
بطور خلاصه، در این قسمت نشان داده شد که هرگاه جسمی در معرض میدان مغناطیسی واقع شود، در صورتی که از نوع دیامغناطیسی باشد دو قطبی‌های مغناطیسی اتمی در خلاف جهت میدان در آن پدید می‌آیند و چنانچه از انواع دیگر باشد دو قطبی‌های موجود در آن به سمت هم جهت شدن با میدان سوق داده میشوند و لذا همواره این نتیجه حاصل میشود که، بجز در اجسام ضد فرومغناطیسی، اعمال میدان به بوجود آمدن یک گشتاور مغناطیسی با مقدار متوسط غیر صفر در جسم می‌انجامد. پیدایش گشتاور مغناطیسی در جسم را تحت تأثیر یک میدان خارجی مغناطیس شدن یا قطبی شدن مغناطیسی جسم می‌نامیم. مغناطیس شدن یک جسم در میدان مغناطیسی نظیر قطبی شدن یک عایق در میدان الکتریکی است.

۶-۲) میدان مغناطیسی در حضور اجسام

اکنون که با چگونگی مغناطیس شدن اجسام مختلف تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی آشنا شده‌ایم به بررسی کمی مسأله در مقیاس ماکروسکوپی می‌پردازیم. یک جسم مغناطیس شده را میتوان به منزله مجموعه‌ای از دو قطبی‌های مغناطیسی در خلاء تلقی کرد. در فصل قبل مسأله یک دو قطبی مغناطیسی، بصورت یک حلقه دایره‌ای شکل به شعاع a و حامل جریان I مطابق شکل (۶-۴)، را مطالعه نمودیم. برای دو قطبی گشتاور مغناطیسی $\vec{m} = I\pi a^2 \hat{a}_n$ که بردار واحد عمود بر صفحه حلقه است، را تعریف کرده و نشان دادیم که پتانسیل مغناطیسی برداری حاصل از دو قطبی در فواصل دور از آن از رابطه (۵-۶۹)، که بصورت زیر است، بدست می‌آید.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \quad R \gg a \quad (1-6)$$

برای بیان میزان مغناطیس شدگی اجسام مختلف مبادرت به تعریف کمیتی برداری موسوم به بردار مغناطیس شدگی یا بردار پلاریزاسیون مغناطیسی، که با حرف \vec{M} نمایش داده میشود، می‌کنیم. این بردار نظیر بردار \vec{P} در مورد قطبی شدن اجسام در میدان الکتریکی میباشد. بردار \vec{M} بصورت



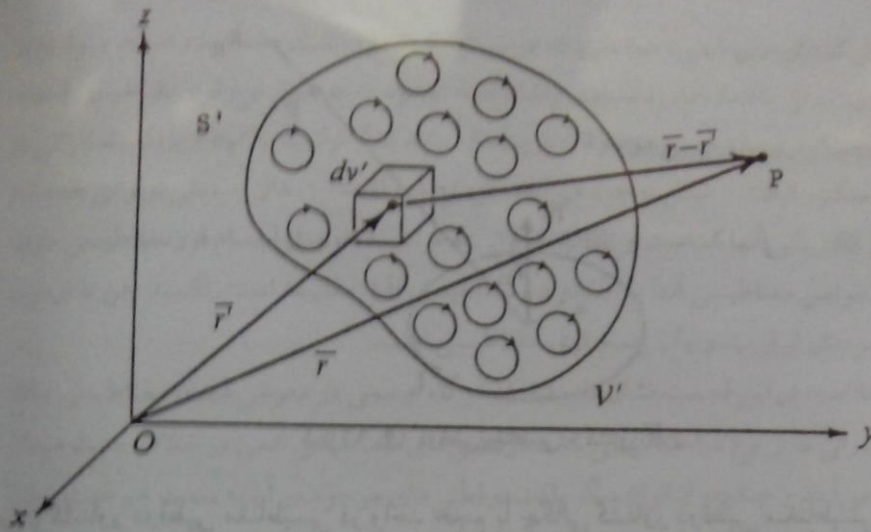
شکل (۶-۶) دو قطبی مغناطیسی با گشتاور \bar{m}

میزان گشتاور دو قطبی مغناطیسی در واحد حجم یا چگالی گشتاور دو قطبی مغناطیسی تعریف میشود و در حالت کلی تابعی از مختصات نقاط جسم است. برای تعیین \bar{M} در نقطه‌ای از جسم، عنصر حجم Δv را حول آن نقطه در نظر گرفته و حاصل جمع گشتاورهای اتمها یا ملکولهای موجود در آن را بدست آورده و نتیجه را بر Δv تقسیم می‌کنیم. بنابراین اگر N تعداد اتمها یا ملکولها در واحد حجم و \bar{m}_i گشتاور اتم یا ملکول i ام در Δv باشد، میتوان نوشت:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{N \Delta v} \bar{m}_i = N \bar{m} \quad (۲-۶)$$

که \bar{m} گشتاور متوسط به ازای یک اتم یا ملکول است. بردار \bar{M} منشأ میدان مغناطیسی ثانویه‌ای در درون و اطراف جسم میشود که در خلاف جهت میدان اعمال شده برای اجسام دیامغناطیسی و هم‌جهت با آن برای سایر اجسام می‌باشد. میدان کل در هر نقطه از فضا از حاصل جمع میدانهای اولیه و ثانویه بدست می‌آید. برای مطالعه میدان ثانویه، جسمی با حجم V' و محدود به سطح بسته S' ، مطابق شکل (۶-۵)، در نظر گرفته و فرض میکنیم که چگالی گشتاور دو قطبی مغناطیسی موجود در آن با تابع معلوم $\bar{M}(\bar{r}')$ مشخص گردیده باشد. گشتاور مغناطیسی \bar{M} در جسم ممکن است در اثر قرار گرفتن آن در یک میدان مغناطیسی خارجی و یا ناشی از فرومغناطیسی بودن خود جسم در وضعیت مغناطیسی دائمی باشد. عنصر حجم dv' را در نقطه دلخواهی در درون جسم در نظر می‌گیریم. این عنصر حجم را میتوان به مثابه یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور $\bar{M} dv'$ دانست که پتانسیل برداری ناشی از آن در نقطه $P(\bar{r})$ ، با استفاده از رابطه (۶-۱)، عبارت است از:

$$d\bar{A} = \frac{\mu_0 \bar{M} dv' \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\bar{M} \times \frac{\hat{a}_R}{R^2}) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \bar{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv' \quad (۳-۶)$$



شکل (۵-۶) محاسبه پتانسیل برداری ناشی از گشتاور مغناطیسی القاء شده در یک جسم

در استخراج رابطه (۳-۶) از تساوی $\nabla' \cdot (\mathbf{1}/R) = \delta_R / R^2$ ، که در آن علامت پریم به معنای مشتق گرفتن نسبت به \mathbf{r}' است، استفاده شده است. با بکار بردن اتحاد برداری $\nabla \times (U\bar{A}_1) = \nabla U \times \bar{A}_1 + U \nabla \times \bar{A}_1$ که در آن U و \bar{A}_1 بترتیب توابع اسکالر و برداری دلخواه هستند، میتوان نشان داد که:

$$\bar{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \times \bar{M} - \nabla' \times \left(\frac{\bar{M}}{R} \right) \quad (۴-۶)$$

با استفاده از رابطه (۴-۶) در رابطه (۳-۶) میتوان نوشت:

$$d\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\nabla' \times \bar{M}}{R} - \nabla' \times \left(\frac{\bar{M}}{R} \right) \right] dv' \quad (۵-۶)$$

سرانجام، پتانسیل برداری ناشی از تمامی گشتاور مغناطیسی جسم را با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۵-۶) در حجم V' بدست می‌آوریم:

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \bar{M}}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\bar{M}}{R} \right) dv' \quad (۶-۶)$$

اکنون با استفاده از اتحاد برداری $\int_V (\nabla \times \bar{A}_1) \cdot d\mathbf{s} = -\oint_S \bar{A}_1 \times d\mathbf{s}$ ، که اثبات آن در پاورقی ارائه شده است، انتگرال دوم در عبارت سمت راست رابطه (۶-۶) را به یک انتگرال سطح تبدیل کرده و

برای اثبات اتحاد $\int_V (\nabla \times \bar{A}_1) \cdot d\mathbf{s} = -\oint_S \bar{A}_1 \times d\mathbf{s}$ که در آن \bar{A}_1 یک بردار دلخواه و V یک حجم دلخواه محدود به

رابطه مذکور را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \bar{M}}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\bar{M} \times \hat{a}_n}{R} ds' \quad (۷-۶)$$

قبلاً نشان دادیم که پتانسیل برداری ناشی از توزیع جریان سطحی \bar{J}_s و توزیع جریان حجمی \bar{J} بترتیب از روابط انتگرالی (۵-۵۹) و (۵-۶۰) بدست می‌آیند. مقایسه انتگرالهای رابطه (۷-۶) با انتگرالهای روابط (۵-۵۹) و (۵-۶۰) روشن می‌سازد که پتانسیل برداری حاصل از پلاریزاسیون مغناطیسی \bar{M} را میتوان به دو نوع توزیع جریان منسوب نمود: یکی توزیع جریان حجمی $\bar{J}_m = \nabla' \times \bar{M}$ در حجم V' و دیگری توزیع جریان سطحی $\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n$ روی سطح S' ، اگر چه این جریانهای مغناطیسی، که به جریانهای آمپری نیز موسومند، همانند جریانهای ناشی از حرکت بارهای آزاد (که ممکن است آنها را جریانهای آزاد بنامیم) نیستند، ولی همانند جریانهای آزاد تولید میدان مغناطیسی میکنند. این جریانها را میتوان، در تشابه با بارهای الکتریکی مقید که ضمن قطبی شدن اجسام عایق تحت تأثیر میدان الکتریکی بوجود می‌آیند، جریانهای مقید نامید.

بدین ترتیب، برای محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از یک جسم مغناطیس شده با چگالی \bar{M} میتوان جسم را با جریانهای مغناطیسی معادل \bar{J}_m و \bar{J}_{ms} در خلاء جایگزین نمود و سپس یکی از روشهای محاسبه میدان مغناطیسی، که در فصل گذشته مطالعه گردیدند، را بکار برد. بعنوان مثال اگر بخواهیم از روش مبتنی بر قانون بیوساوار استفاده کنیم، با استفاده از روابط (۵-۱۱) و (۵-۱۲) میتوان نوشت:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\bar{J}_m \times \hat{a}_R}{R^2} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\bar{J}_{ms} \times \hat{a}_R}{R^2} ds' \quad (۸-۶)$$

← سطح بسته S میباشد، ابتدا حاصل ضرب داخلی جمله سمت چپ در \hat{a}_z را بدست آورده و سپس از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{a}_z \cdot \int_V (\nabla \times \bar{A}_1) dv &= \int_V \hat{a}_z \cdot \nabla \times \bar{A}_1 dv = - \int_V \nabla \cdot (\hat{a}_z \times \bar{A}_1) dv \\ &= - \oint_S \hat{a}_z \times \bar{A}_1 \cdot \hat{a}_s ds = - \oint_S \hat{a}_z \cdot (\bar{A}_1 \times \hat{a}_s) ds = - \hat{a}_z \cdot \oint_S \bar{A}_1 \times \hat{a}_s ds \end{aligned}$$

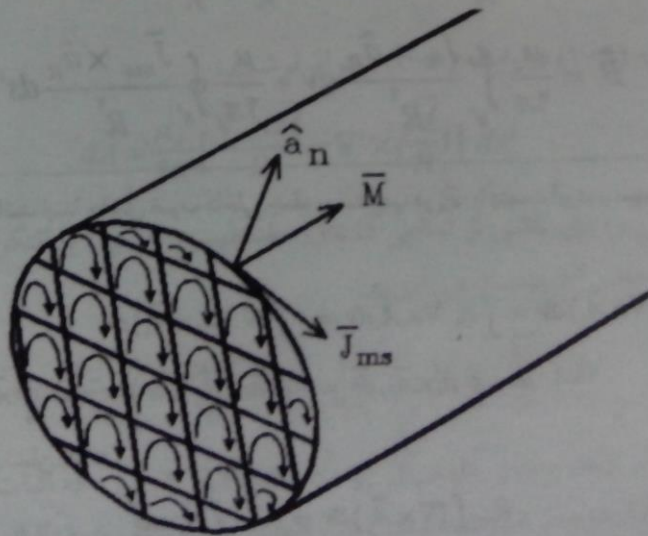
به همین ترتیب میتوان نشان داد که:

$$\hat{a}_y \cdot \int_V (\nabla \times \bar{A}_1) dv = - \hat{a}_y \cdot \oint_S \bar{A}_1 \times \hat{a}_s ds$$

$$\hat{a}_x \cdot \int_V (\nabla \times \bar{A}_1) dv = - \hat{a}_x \cdot \oint_S \bar{A}_1 \times \hat{a}_s ds$$

به دلیل تساوی مؤلفه‌های همنام در رابطه برداری $\int_V (\nabla \times \bar{A}_1) dv = - \oint_S \bar{A}_1 \times \hat{a}_s ds$ ، صحت این رابطه محقق است.

برای روشن ساختن ماهیت فیزیکی جریانهای آمپری، یک میله استوانه‌ای شکل به طول l ، مطابق شکل (۶-۶)، را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که بطور یکنواخت با چگالی \bar{M} مغناطیس شده باشد. تصور کنید که این میله به نواحی بسیار کوچکی با ابعاد اتمی، که در شکل بگونه افراق‌آمیزی نشان داده شده‌اند، تقسیم گردد و در هر ناحیه یک اتم قرار بگیرد. در هر یک از این نواحی میکروسکوپی یک جریان حلقه‌ای متعلق به اتم موجود در آن و به اندازه J_{ms} برقرار است. همه جریانهای حلقه‌ای به دلیل یکنواختی مغناطیس بودن میله با یکدیگر برابرند. با مراجعه به شکل (۶-۶) میتوان مشاهده نمود که جریان هر ناحیه کوچک در درون جسم با جریانهای نواحی مجاور بطور کامل خنثی میشود، ولی جریانهای آن عده از نواحی که به سطح استوانه منتهی میشوند در بخشی از محیطهای خود خنثی نشده باقی می‌مانند و مجموعاً تشکیل یک جریان سطحی را میدهند که مقدار آن همان J_{ms} است. حال گشتاور مغناطیسی کل میله از یک طرف برابر MSI و از طرف دیگر برابر حاصل جمع گشتاورهای تقسیمات ایجاد شده در میله یعنی برابر $J_{ms}SI$ است، که S مساحت سطح مقطع میله میباشد. با مساوی قرار دادن این دو مقدار، نتیجه $J_{ms} = M$ بدست می‌آید. لیکن باید توجه داشت که \bar{J}_{ms} در جهت \hat{a}_p بوده در حالیکه \bar{M} در جهت \hat{a}_z است و چون $\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n$ در واقع همان \hat{a}_n است، نتیجه بدست آمده را میتوان به شکل کلی $\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n$ نوشت. در صورتی که چگالی مغناطیس شدگی جسم یکنواخت نباشد، جریانهای نواحی میکروسکوپی در درون جسم یکدیگر را کاملاً خنثی نمی‌کنند و نتیجتاً یک جریان مغناطیسی حجمی در درون جسم ظاهر میگردد. بدین ترتیب، منشأ جریانهای سطحی و حجمی مغناطیسی را



شکل (۶-۶) یک میله استوانه‌ای شکل مغناطیس شده و ماهیت فیزیکی جریانهای مغناطیسی آن

باید جریانهای دانست که در مقیاس اتمی در جسم وجود دارند. چون $\bar{J}_m = \nabla' \times \bar{M}$ است، دیورژانس \bar{J}_m همواره برابر صفر است و از اینرو جریان مغناطیسی حجمی نمی تواند منجر به انباشته شدن بار الکتریکی شود. بعلاوه جریانهای مغناطیسی تولید حرارت نمی کنند، زیرا آنها توأم با جابجایی شدن الکترونها، به شکلی که در جریانهای هدایتی رخ میدهد، نیستند.

پس بطور خلاصه پس از حذف علامت پریم از ∇' داریم:

$$\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n \quad (9-6)$$

$$\bar{J}_m = \nabla \times \bar{M} \quad (10-6)$$

اکنون بخاطر می آوریم که محاسباتی که به نتایج بدست آمده در روابط (۷-۶) تا (۱۰-۶) انجامیده است را با رابطه (۱-۶) آغاز نمودیم. اما این رابطه توأم با محدودیتی مبنی بر اینکه نقطه میدان باید در فاصله دوری از دو قطبی مغناطیسی باشد بود، لذا اعتبار نتایج بدست آمده منوط به رعایت شدن محدودیت مذکور است. روشن است که برای نقاط بیرون جسم این محدودیت همواره رعایت می شود و بنابراین نتایج مزبور را میتوان بدون هیچگونه ابهامی در محاسبه میدان مغناطیسی بکار برد. ولی ممکن است سؤال شود که آیا این نتایج برای نقاط درون جسم نیز معتبرند؟ جواب خوشبختانه آری است، زیرا در رابطه (۳-۶) وقتی که عنصر حجم dv' در حد به سمت صفر میل میکند، شعاع دو قطبی معادل مربوط به عنصر حجم نیز به سمت صفر میل کرده و درستی این رابطه همچنان به قوت خود باقی است. پس بطور خلاصه از جریانهای سطحی و حجمی آمپری، که در روابط (۹-۶) و (۱۰-۶) داده شده اند، میتوان برای محاسبه میدان مغناطیسی ثانویه هم در نقاط بیرون و هم در نقاط درون جسم استفاده نمود.

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، جریانهای مقید مغناطیسی همانند جریانهای آزاد الکتریکی تولید میدان مغناطیسی می کنند. بنابراین شکل نقطه ای قانون مداری آمپر در نقطه دلخواهی در درون جسم (که فقط \bar{J}_m وجود دارد) بشرح زیر نوشته می شود:

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 (\bar{J} + \bar{J}_m) \quad (11-6)$$

که \bar{J} چگالی جریان آزاد در صورت موجود بودن است. با جایگزین نمودن \bar{J}_m با $\nabla \times \bar{M}$ در رابطه (۱۱-۶)، داریم:

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \nabla \times \bar{M}$$

یا:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J} \quad (12-6)$$

در اینجا مبادرت به تعریف برداری می‌کنیم که بتوان شدت میدان مغناطیسی شناخته شده و با علامت \vec{H} نمایش داده می‌شود:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (13-6)$$

آنگاه:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (14-6)$$

اهمیت \vec{H} در آن است که کُرل آن مستقل از جریانهای مغناطیسی بوده و همانطور که رابطه (۱۴-۶) نشان میدهد فقط به چگالی جریان آزاد بستگی دارد. رابطه (۱۴-۶) در حقیقت بیان کلی‌تری برای شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر است. شکل انتگرالی این قانون بر حسب \vec{H} عبارت است از:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (15-6)$$

که I کل جریان آزاد در برگرفته شده توسط مسیر بسته C است. واحد شدت میدان مغناطیسی آمپر بر متر است.

در اجسام خطی و همسانگرد^۱ بردار \vec{M} را میتوان بر حسب \vec{H} یا \vec{B} توسط یک رابطه خطی بیان داشت:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{(1 + \chi_m) \mu_0} \vec{B} \quad (16-6)$$

که χ_m ضریب حساسیت مغناطیسی^۱ جسم نامیده میشود. این ضریب در اجسام دیامغناطیسی و پارامغناطیسی که خطی هستند مقدار ثابتی دارد. رابطه (۱۶-۶) را میتوان برای اجسام غیر خطی نظیر اجسام فرومغناطیسی نیز بکار برد، ولی همواره باید بخاطر داشت که ضریب χ_m در این دسته اجسام مقدار ثابتی نداشته، بلکه تابعی از \vec{B} میباشد. با حذف \vec{M} از روابط (۱۳-۶) و (۱۶-۶)، داریم:

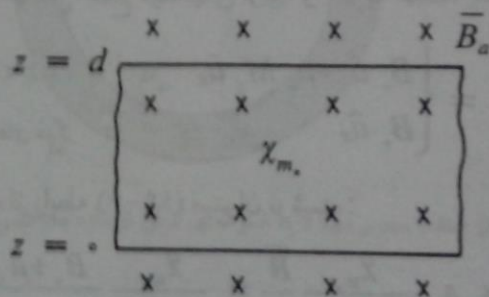
^۱ یک جسم از نظر مغناطیسی خطی است اگر اندازه بردار \vec{M} ایجاد شده در آن در هر نقطه متناسب با اندازه میدان کل در آن نقطه باشد و یک جسم از نظر مغناطیسی همسانگرد است وقتی که بردار \vec{M} در هر نقطه آن موازی بردار میدان کل در آن نقطه باشد.

$$\vec{B} = \mu_r (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_r (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_r \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (17-6)$$

در رابطه (۱۷-۶)، $\mu_r = 1 + \chi_m$ را قابلیت نفوذ نسبی یا تراوایی نسبی و $\mu = \mu_r \mu_0$ را قابلیت نفوذ یا تراوایی جسم می‌نامند. در اجسام دیامغناطیسی اندکی از واحد کوچکتر و در اجسام پارامغناطیسی اندکی از واحد بزرگتر است. ولی در اجسام فرومغناطیسی، μ_r تابعی از میدان \vec{B} بوده و مقداری به مراتب بزرگتر از واحد دارد. بطور خلاصه میتوان نوشت:

- برای اجسام دیامغناطیسی: $\mu_r < 1$, $\chi_m < 0$
- برای اجسام پارامغناطیسی: $\mu_r > 1$, $\chi_m > 0$
- برای اجسام فرومغناطیسی: $\mu_r \gg 1$, $\chi_m \gg 1$

مثال (۱-۶) یک ماده مغناطیسی با ضریب حساسیت ثابت χ_m ناحیه‌ای از فضا که بین دو صفحه موازی $z=0$ و $z=d$ قرار دارد، مطابق شکل (۷-۶)، را پر میکند. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}_0 = B_0 \hat{a}_z$ به ماده مغناطیسی اعمال میگردد. چگالی شار مغناطیسی \vec{B} و شدت میدان مغناطیسی \vec{H} را در درون و بیرون جسم و همچنین چگالیهای جریانهای آمپری پدید آمده در درون و روی سطوح آن را محاسبه کنید.



شکل (۷-۶) ماده مغناطیسی در فضای محصور بین صفحات $z=0$ و $z=d$ و میدان مغناطیسی یکنواخت اعمال شده بر آن

حل:

به دلیل یکنواخت بودن میدان اعمال شده \vec{B}_0 و نیز ثابت بودن ضریب حساسیت مغناطیسی χ_m ، جسم بطور یکنواخت مغناطیس میشود. لذا میتوان نوشت:

$$\vec{M} = M_s \hat{a}_x \quad (18-6)$$

جریانهای آمپری ناشی از گشتاور مغناطیسی حاصله با استفاده از روابط (۹-۶) و (۱۰-۶) عبارتند از:

$$\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n = \begin{cases} M_0 \hat{a}_x \times \hat{a}_z = -M_0 \hat{a}_y & z=d \\ M_0 \hat{a}_x \times (-\hat{a}_z) = M_0 \hat{a}_y & z=0 \end{cases} \quad (19-6)$$

و:

$$\bar{J}_m = \nabla \times \bar{M} = 0 \quad (20-6)$$

بدین ترتیب ماده مغناطیسی را میتوان با دو صفحه بینهایت جریان با چگالیهای داده شده در رابطه (۱۹-۶) جایگزین نمود. میدانی که این دو صفحه موازی جریان ایجاد میکنند همان میدان ثانویه است. قبلاً میدان مغناطیسی ناشی از یک صفحه بینهایت جریان را مطالعه نموده‌ایم و نتیجه در رابطه (۲۴-۵) خلاصه شده است. با استفاده از این رابطه میتوان به سادگی نشان داد که میدان حاصل از دو صفحه جریان مذکور برابر است با:

$$\bar{B}_s = \begin{cases} \mu_0 M_0 \hat{a}_x & 0 < z < d \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (21-6)$$

میدان مغناطیسی کل برابر حاصل جمع میدانهای اولیه و ثانویه است، یعنی:

$$\bar{B} = \bar{B}_a + \bar{B}_s = \begin{cases} B_0 \hat{a}_x + \mu_0 M_0 \hat{a}_x & 0 < z < d \\ B_0 \hat{a}_x & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (22-6)$$

اما از طرف دیگر با استفاده از رابطه (۱۶-۶) میتوان نوشت:

$$\bar{M} = M_0 \hat{a}_x = \frac{\chi_{m_0}}{1 + \chi_{m_0}} \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \frac{\chi_{m_0}}{1 + \chi_{m_0}} \frac{B_0 + \mu_0 M_0}{\mu_0} \hat{a}_x \quad (23-6)$$

پس از حل این معادله برای M_0 داریم:

$$M_0 = \frac{\chi_{m_0}}{\mu_0} B_0 \quad (24-6)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۲۴-۶) در رابطه (۲۳-۶)، میدانهای \bar{H} و \bar{B} را میتوان محاسبه و به شرح زیر خلاصه نمود:

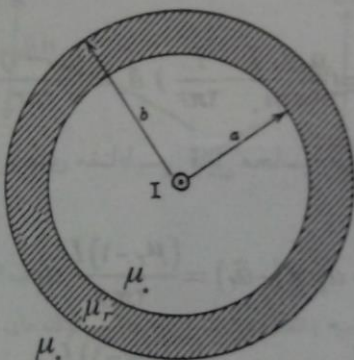
$$\bar{B} = \begin{cases} B_0 (1 + \chi_{m_0}) \hat{a}_x & 0 < z < d \\ B_0 \hat{a}_x & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (25-6)$$

و:

$$\bar{H} = \begin{cases} \frac{\bar{B}}{\mu_r \mu_0} = \frac{B_0 (1 + \chi_m)}{\mu_0 (1 + \chi_m)} \hat{a}_x = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{a}_x & 0 < z < d \\ \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{a}_x & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (26-6)$$

□

مثال (۲-۶) ناحیه $a < r < b$ در مختصات استوانه‌ای با یک ماده مغناطیسی که قابلیت نفوذ نسبی آن μ_r می‌باشد اشغال شده است. یک رشته سیم حامل جریان I ، مطابق شکل (۸-۶)، در امتداد محور z قرار داده می‌شود. میدانهای \bar{B} و \bar{H} را در تمام نقاط فضا و چگالیهای جریانهای مغناطیسی را در درون و روی سطوح ماده مغناطیسی محاسبه کنید.



شکل (۸-۶) جریان I در امتداد محور یک لایه استوانه‌ای شکل از ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی μ_r

حل:

به دلیل وجود تقارن استوانه‌ای نسبت به محور z و بینهایت بودن طول لایه استوانه‌ای شکل، میدان مغناطیسی مستقل از z و φ بوده و بعلاوه فقط دارای مؤلفه \hat{a}_φ می‌باشد، یعنی $\bar{H} = H_\varphi \hat{a}_\varphi$ است. حال با استفاده از شکل انتگرالی قانون آمپر بر حسب \bar{H} میتوان نوشت:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I$$

که C محیط دایره‌ای به شعاع دلخواه r است که مرکز آن بر سیم جریان منطبق می‌باشد. به دلیل ثابت بودن \bar{H} روی مسیر C و اینکه جریان دربرگرفته شده توسط C مستقل از شعاع r و همیشه برابر I است، داریم:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = H_\varphi (\gamma \pi r) = I$$

یا:

$$\bar{H} = H_\varphi \hat{a}_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi \quad 0 < r < \infty$$

اکنون بردار \bar{B} را میتوان به سادگی از رابطه $\bar{B} = \mu_r \mu_0 \bar{H}$ در هر ناحیه محاسبه کرد:

$$\bar{B} = \begin{cases} \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi & a < r < b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi & 0 < r < a, \quad r > b \end{cases} \quad (28-6)$$

با در دست داشتن \bar{B} و \bar{H} ، چگالی گشتاور دو قطبی مغناطیسی \bar{M} در ناحیه $a < r < b$ عبارت است از:

$$\bar{M} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{H} = \left(\frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r \mu_0} - \frac{I}{2\pi r} \right) \hat{a}_\varphi = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi \quad (29-6)$$

با داشتن \bar{M} ، چگالیهای جریانهای مغناطیسی قابل محاسبه می‌باشند. برای جریان سطحی داریم:

$$\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{a}_n = \begin{cases} \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \hat{a}_\varphi \times (-\hat{a}_r) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \hat{a}_z & r = a \\ \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi b} \hat{a}_\varphi \times (\hat{a}_r) = -\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi b} \hat{a}_z & r = b \end{cases} \quad (30-6 \text{ الف})$$

و بالاخره چگالی جریان مغناطیسی حجمی برابر است با:

$$\bar{J}_m = \nabla \times \bar{M} = -\frac{\partial M_\varphi}{\partial z} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\varphi) \hat{a}_z = 0 \quad (30-6 \text{ ب})$$

□

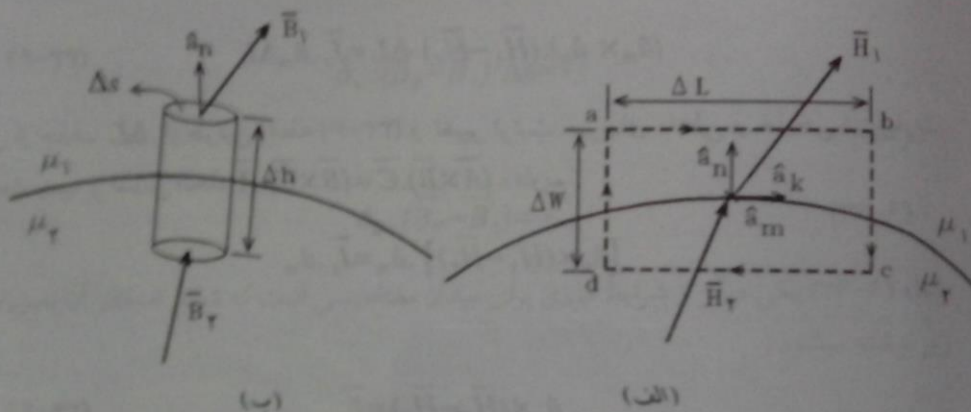
در مثال (۲-۶)، در صورتیکه $a \rightarrow 0$ و $b \rightarrow \infty$ ، تمام فضا را ماده مغناطیسی پر میکند و جریان مغناطیسی سطحی روی $r = a$ به یک جریان خطی به مقدار $I_m = (\mu_r - 1)I$ تبدیل میشود، بطوری که اگر بخواهیم قانون مداری آمپر را بر حسب میدان \bar{B} بنویسیم باید مجموع جریانهای I و I_m ، یعنی $I_m + I = \mu_r I$ ، را در رابطه (۳۲-۵) بکار ببریم.

۳-۶) شرایط مرزی

برای بررسی رفتار میدان مغناطیسی در مرز مشترک دو ناحیه با قابلیت‌های نفوذ متفاوت از روشی

مشابه آنچه که در مورد میدان الکتریکی در قسمتهای (۳-۶) و (۳-۹) بکار رفت استفاده می‌کنیم. برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های مماسی میدانهای مغناطیسی در مرز مشترک دو ناحیه با قابلیت‌های نفوذ μ_1 و μ_2 ، مسیر بسته مستطیلی شکل $abcd$ را با ابعاد ΔL و ΔW ، مطابق شکل (۶-۹-الف)، در نظر گرفته شکل انتگرالی قانون آمپر را بکار می‌بریم:

$$\oint_{abca} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \int_{abcd} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (۳۱-۶)$$



شکل (۶-۹) میدان مغناطیسی در مرز دو ناحیه (الف) برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های مماسی میدانها (ب) برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های عمودی میدانها

اکنون حد هر یک از دو طرف رابطه (۳۱-۶) را، وقتی که $\Delta W \rightarrow 0$ به سمت صفر میل کند، بدست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا انتگرال سمت چپ رابطه (۳۱-۶) را به چهار انتگرال روی اضلاع مستطیل $abcd$ تجزیه می‌کنیم. واضح است که مقدار این انتگرال روی اضلاع bc و da ، وقتی که $\Delta W \rightarrow 0$ ، بسیار کوچک گشته و در حد به سمت صفر میل میکند و در نتیجه سمت چپ رابطه (۳۱-۶) به $(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \Delta \vec{L}$ ساده می‌شود که برداری در جهت a به b است. حال ببینیم که حد سمت راست رابطه مذکور، وقتی که $\Delta W \rightarrow 0$ ، چیست. تردیدی نیست که وقتی $\Delta W \rightarrow 0$ ، سطح مستطیل $abcd$ نیز به سمت صفر میل کرده و چنانچه در اطراف مرز مشترک دو ناحیه فقط یک جریان حجمی وجود داشته باشد، مقدار انتگرال سمت راست رابطه (۳۱-۶) و عبارت دیگر جریان دربرگرفته شده توسط مسیر $abcd$ ، صفر خواهد شد. اما در صورتی که جریانی سطحی با چگالی \vec{J}_s در مرز مشترک دو ناحیه موجود باشد، این انتگرال مقداری غیر صفر و برابر با $\Delta L (\vec{J}_s \cdot \vec{a}_n)$ خواهد داشت که بردار واحد عمود بر سطح مستطیل $abcd$ است. به این ترتیب

رابطه (۳۱-۶) بصورت زیر خلاصه میگردد:

$$(\bar{H}_1 - \bar{H}_r) \cdot \bar{\Delta L} = \bar{J}_s \cdot \hat{a}_m \Delta L \quad (32-6)$$

در اینجا جهت تسهیل محاسبات بعدی، بردار واحد \hat{a}_k را موازی با $\bar{\Delta L}$ و بردار واحد \hat{a}_n را عمود بر سطح مشترک دو ناحیه، در نقطه‌ای از مرز که میدان مغناطیسی در آن مورد بررسی است و در جهت ناحیه ۲ به ناحیه ۱ تعریف می‌کنیم. شکل (۶-۹-الف) این دو بردار را نشان میدهد. اکنون با توجه به اینکه $\bar{\Delta L} = \Delta L \hat{a}_k$ و $\hat{a}_k = \hat{a}_m \times \hat{a}_n$ است، رابطه (۳۲-۶) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$(\hat{a}_m \times \hat{a}_n) \cdot (\bar{H}_1 - \bar{H}_r) \Delta L = \bar{J}_s \cdot \hat{a}_m \Delta L \quad (33-6)$$

پس از حذف ΔL از طرفین رابطه (۳۳-۶) و تغییر ترتیب ضربهای داخلی و خارجی در عبارت سمت چپ بر اساس اتحاد $\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C}$ ، داریم:

$$[\hat{a}_n \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_r)] \cdot \hat{a}_m = \bar{J}_s \cdot \hat{a}_m$$

یا:

$$\hat{a}_n \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_r) = \bar{J}_s \quad (34-6)$$

رابطه (۳۴-۶) یکی از شرایط مرزی مورد نظر میباشد. ^۴ باید توجه داشت که این رابطه بصورت برداری است. در صورتی که \bar{J}_s در امتداد عمود بر مؤلفه‌های مماسی \bar{H}_1 و \bar{H}_r باشد، شرط مرزی (۳۴-۶) شکل اسکالر زیر را پیدا میکند:

$$H_{1t} - H_{rt} = J_s \quad (35-6)$$

که H_{1t} و H_{rt} بترتیب مؤلفه‌های مماسی \bar{H}_1 و \bar{H}_r می‌باشند. روابط (۳۴-۶) و (۳۵-۶) بیان می‌دارند که در هر نقطه در مرز مشترک دو ناحیه، مؤلفه مماسی شدت میدان مغناطیسی به اندازه چگالی جریان سطحی در آن نقطه ناپیوسته است. یادآوری میشود که \bar{J}_s چگالی جریان آزاد است و در صورتیکه مقدار آن صفر باشد، مؤلفه مماسی شدت میدان مغناطیسی در مرز دو ناحیه همواره پیوسته است.

برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های عمودی میدانها در مرز دو ناحیه، یک سطح استوانه‌ای شکل به

۴ سؤال: اگر $\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{C} \cdot \bar{B}$ باشد، لزوماً $\bar{A} = \bar{C}$ نخواهد بود. چرا شرط مرزی مندرج در رابطه (۳۴-۶) که از رابطه قبلی‌اش نتیجه‌گیری شده است همواره صحیح است؟

ارتفاع Δh و مساحت قاعده Δs ، مطابق شکل (۶-۹-ب)، در نظر گرفته و رابطه (۵-۸۱) را بکار می‌بریم:

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0, \quad S = \text{سطح کل استوانه}$$

حد انتگرال مزبور، وقتی که $\Delta h \rightarrow 0$ ، عبارت است از:

$$\bar{B}_r \cdot \bar{\Delta s} - \bar{B}_l \cdot \bar{\Delta s} = 0$$

یا:

$$\hat{a}_n \cdot (\bar{B}_r - \bar{B}_l) \Delta s = 0$$

و سرانجام:

$$\hat{a}_n \cdot (\bar{B}_r - \bar{B}_l) = 0 \quad (۶-۳۶)$$

رابطه (۶-۳۶) یکی دیگر از شرایط مرزی برای میدان مغناطیسی است که شکل اسکالر آن بصورت زیر نوشته میشود:

$$B_{nr} - B_{nl} = 0 \quad (۶-۳۷)$$

که B_{nr} و B_{nl} بترتیب مؤلفه‌های عمودی میدانهای مغناطیسی \bar{B}_r و \bar{B}_l میباشند. رابطه (۶-۳۷) بیان میکند که در هر نقطه در مرز مشترک دو ناحیه مؤلفه عمودی چگالی شار مغناطیسی همواره پیوسته است.

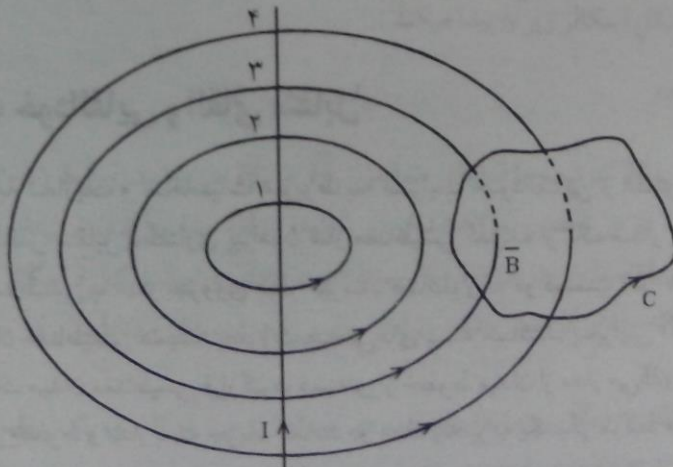
۶-۴) ضرایب خودالقایی و القای متقابل

قبل از پرداختن به تعاریف و محاسبات مربوط به ضرایب خودالقایی و القای متقابل (اندوکتانس و اندوکتانس متقابل)، گفتاری پیرامون شار مغناطیسی گذرنده از یک مدار جریان و مفهوم پیوند شار مغناطیسی با مدار ضروری بنظر میرسد. همانطور که در قسمت (۵-۷) تشریح گردید، خطوط میدان مغناطیسی همیشه بصورت منحنی‌های بسته میباشند. بنابراین اگر مدار جریانی در معرض یک میدان مغناطیسی قرار گیرد، دسته‌ای از خطوط میدان از مدار می‌گذرند، بدین معنا که هر یک از این خطوط و مدار بسته جریان همانند دو حلقه زنجیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند. در اینجا اصطلاحاً گفته میشود که این دسته خطوط میدان با مدار جریان پیوند دارند. اما دسته دیگری از خطوط میدان از مدار جریان عبور نکرده و بصورت حلقه‌هایی جدا از مدار بسته می‌باشند

و عبارت دیگر با مدار پیوند ندارند. شکل (۶-۱۰) تصویر روشنتری از مفهوم پیوند خطوط میدان با یک مدار را نشان میدهد. در این شکل خطوط میدان متعلق به یک سیم طویل جریان می‌باشند. بطوری که ملاحظه می‌شود، خطوط میدان ۳ و ۲ با مدار C دارای پیوند بوده در حالی که خطوط ۱ و ۲ پیوندی با آن ندارند. میزان پیوند میدان مغناطیسی \vec{B} با مدار جریان C را ممکن است با مقدار شار گذرنده از آن بیان داشت. با توجه به اینکه \vec{B} چگالی شار مغناطیسی محسوب میشود، مقدار شار گذرنده از مدار C عبارت است از:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (۶-۳۸)$$

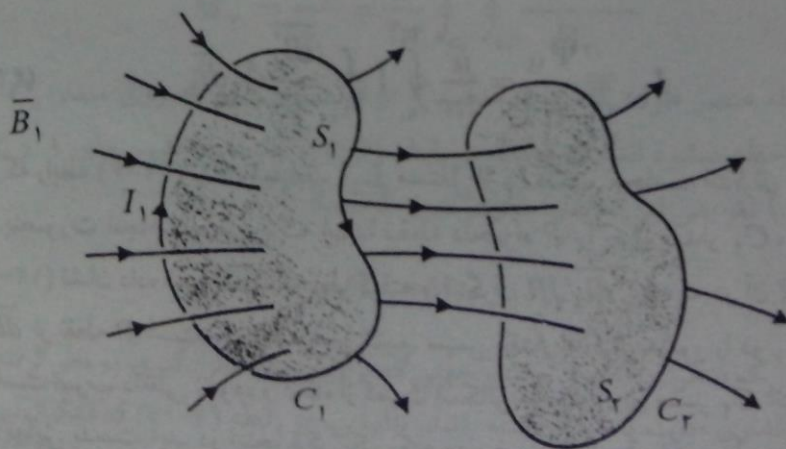
که S سطح دلخواهی است که به مدار بسته C محدود گردد. بدیهی است که هر جریانی با تمامی میدان مغناطیسی ناشی از خودش پیوند دارد. محاسبه شار گذرنده از مداری که همانند مدار C در شکل (۶-۱۰) دارای یک حلقه باشد را همواره میتوان بدون ابهام انجام داد. اما در بسیاری از موارد عملی تعداد حلقه‌های یک مدار بیش از یک است و لذا در تعیین شار گذرنده از چنین مدارهایی باید دقت کافی مبذول داشت. در واقع آنچه در اینگونه مدارها در خور توجه است سطحی است که خطوط میدان از آن میگذرند. برای روشن شدن مطلب مداری به شکل یک سیم پیچ با N حلقه یکسان را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که خطوط میدان \vec{B} به یک میزان از تمام حلقه‌ها بگذرند. با گذشتن خطوط میدان از یک حلقه تنها شار $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ایجاد میشود، اما چون همان خطوط میدان از N-۱ حلقه دیگر نیز می‌گذرند در هر یک از آنها شاری باندازه ϕ ایجاد میشود. بنابراین، مقدار کل شار گذرنده از سیم پیچ برابر $\Psi = N\phi$ است. به عبارت دیگر میتوان بیان داشت که خطوط میدان از



شکل (۶-۱۰) نمایش پیوند خطوط میدان مغناطیسی B با مدار C

سطحی معادل N برابر سطح یک حلقه، که در حقیقت همان سطح سیم پیچ است، میگذرند و لذا شارگی به اندازه N برابر شار یک حلقه را بوجود می‌آورند. در حالت کلی که حلقه‌های سیم پیچ ممکن است یکسان نباشند و یا خطوط میدان به یک میزان از آنها نگذرند، شار حلقه‌ها با یکدیگر مساوی نیستند و شار کل را باید از مجموع شارهای حلقه‌ها بدست آورد، یعنی $\Psi = \sum_{i=1}^N \phi_i$ که ϕ_i شار گذرنده از حلقه i ام است. پس بطور خلاصه در مداری با N حلقه، شار ϕ عموماً با N حلقه پیوند دارد و N بار جریان مدار را در بر می‌گیرد. کمیت Ψ ، که معرف میزان پیوند یک میدان مغناطیسی با یک مدار جریان است، را پیوند شار^۱ می‌نامند و با واحد وبر - دور اندازه‌گیری می‌کنند. اکنون پس از توضیحات فوق به اصل مطلب که مطالعه ضرایب خودالقایی و القای متقابل است بر می‌گردیم. برای این منظور دو مدار تک حلقه‌ای C_1 و C_2 را مطابق شکل (۶-۱۱) در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که مدار C_1 حامل جریان I_1 باشد. یادآوری میشود که تک حلقه‌ای در نظر گرفتن مدارهای C_1 و C_2 صرفاً جهت سهولت کار بوده و لطمه‌ای به عمومیت مسأله وارد نمی‌سازد. جریان I_1 تولید میدان مغناطیسی \bar{B}_1 را می‌نماید که تماماً با مدار C_1 و بخشی از آن با مدار C_2 پیوند پیدا می‌کند. اگر شار کل گذرنده از مدار C_1 و ناشی از جریان I_1 را با Ψ_{11} و شار کل گذرنده از مدار C_2 و ناشی از جریان مدار C_1 را با Ψ_{21} نشان دهیم، ضرایب خودالقایی و القای متقابل بترتیب بصورت زیر تعریف میشوند:

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{\text{شار کل گذرنده از مدار } C_1 \text{ و ناشی از جریان } I_1}{\text{جریان مدار } C_1} \quad (۶-۳۹)$$



شکل (۶-۱۱) پیوند میدان مغناطیسی \bar{B}_1 حاصل از جریان I_1 با مدارهای C_1 و C_2

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{I_2 \text{ ناشی از جریان } C_2}{\text{جریان مدار } C_1} \quad (40-6)$$

که L_{11} ضریب خودالقایی مدار C_1 و M_{21} ضریب القای متقابل بین دو مدار C_1 و C_2 میباشد. ضرایب خودالقایی و القای متقابل همانند ظرفیت و مقاومت فقط به شکل و ابعاد هندسی مدارها و پارامترهای محیط (در اینجا قابلیت نفوذ) بستگی داشته و مستقل از جریانهای مدارها هستند. واحد اندازه گیری این ضرایب هانری نام دارد. یک هانری مساوی یک وبر بر یک آمپر است. قبلاً در رابطه (۳-۹۶) نشان داده ایم که انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک خازن متناسب با ظرفیت آن است و بطوری که بعداً خواهیم دید انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک خودالقا نیز متناسب با ضریب L میباشد. بنابراین اگر C ظرفیت الکتریکی تلقی شود L مفهوم ظرفیت مغناطیسی را دربرخواهد داشت. برای کسب شناخت بیشتر نسبت به این دو کمیت جدید به محاسبه آنها می پردازیم.

$$\Psi_{11} = \int_{S_1} \bar{B}_1 \cdot d\bar{s} = \int_{S_1} (\nabla \times \bar{A}_1) \cdot d\bar{s} = \oint_{C_1} \bar{A}_1 \cdot d\bar{l}_1 \quad (41-6)$$

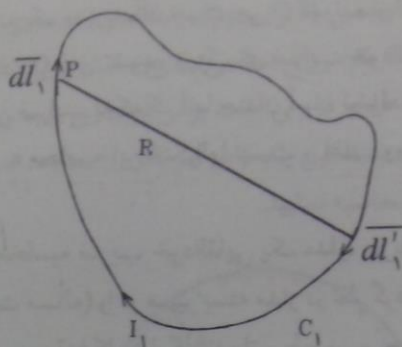
در رابطه (۴۱-۶) تبدیل انتگرال سطح به انتگرال خط با استفاده از قضیه استوکس صورت گرفته است. پتانسیل برداری \bar{A}_1 به نوبه خود با یک انتگرال خط از نوعی که در رابطه (۵-۵۸) داده شده است بیان میگردد. لذا میتوان نوشت:

$$\Psi_{11} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \left(\oint_{C_1} \frac{d\bar{l}'_1}{R} \right) \cdot d\bar{l}_1$$

آنگاه:

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \left(\oint_{C_1} \frac{d\bar{l}'_1}{R} \right) \cdot d\bar{l}_1 \quad (42-6)$$

همانطور که رابطه (۴۲-۶) نشان میدهد، L_{11} مستقل از I_1 است. محاسبه انتگرال دوگانه در رابطه مزبور بدینصورت انجام می پذیرد که ابتدا نقطه دلخواه P را روی مدار C_1 ، که مجدداً در شکل (۶-۱۲) نشان داده شده است، در نظر گرفته و انتگرال $\oint_{C_1} d\bar{l}'_1 / R$ ، که در آن R فاصله عنصر طول $d\bar{l}'_1$ از نقطه P است، را محاسبه می کنیم. سپس مقدار انتگرال مزبور را در $d\bar{l}_1$ که در محل نقطه P است ضرب داخلی نموده و آنگاه از کمیت اسکالر حاصله روی مسیر C_1 انتگرال می گیریم تا نتیجه نهایی بدست آید. در اینجا ذکر یک نکته مهم ضروری است. اگر سطح مقطع سیم مدار جریان بینهایت کوچک باشد، در محاسبه انتگرال $\oint_{C_1} d\bar{l}'_1 / R$ ، وقتی که $d\bar{l}'_1$ در محل نقطه P قرار می گیرد، R صفر شده و مقدار این انتگرال و در نتیجه ضریب خودالقایی بینهایت میشود. البته در عمل چون جریان مدار از سطح مقطع غیرصفر و محدودی میگذرد، ضریب خودالقایی مدار همواره



شکل (۶-۱۲) مدار تک حلقه‌ای C_1 حامل جریان I_1 و نحوه محاسبه انتگرال دوگانه در رابطه (۶-۴۲)

مقدار محدودی دارد.

برای محاسبه ضریب القای متقابل بین مدارهای C_1 و C_2 ، در شکل (۶-۱۱)، میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} \Psi_{21} &= \int_{S_2} \bar{B}_1 \cdot d\bar{s}_2 = \int_{S_2} (\nabla \times \bar{A}_1) \cdot d\bar{s}_2 = \oint_{C_2} \bar{A}_1 \cdot d\bar{l}_2 \\ &= \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\bar{l}_1 \cdot d\bar{l}_2}{R_{21}} \end{aligned}$$

آنگاه:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\bar{l}_1 \cdot d\bar{l}_2}{R_{21}} \quad (۶-۴۳)$$

که R_{21} فاصله عنصر طول $d\bar{l}_2$ روی مدار C_2 از عنصر طول $d\bar{l}_1$ روی مدار C_1 میباشد. بطوری که ملاحظه میشود انتگرال دوگانه در رابطه (۶-۴۳) نسبت به اندیس‌های ۱ و ۲ متقارن است، بنابراین با تعویض این اندیسها میتوان نتیجه گرفت که:

$$M_{21} = M_{12} \quad (۶-۴۴)$$

میدانیم که یک انتگرال خط، بر حسب جهتی که برای مسیر انتگرال‌گیری در نظر گرفته میشود، ممکن است مقداری مثبت یا منفی داشته باشد. بنابراین، در رابطه (۶-۴۲) که انتگرال‌گیری دوبار روی یک مسیر انجام میگیرد همواره مقدار مثبتی برای ضریب خودالقایی یک مدار بدست می‌آید. اما، در رابطه (۶-۴۳)، بر حسب اینکه جهت‌های مدارهای C_1 و C_2 چه وضعیتی نسبت به یکدیگر داشته باشند، ضریب القای متقابل بین دو مدار ممکن است مقداری مثبت یا منفی داشته باشد.

یادآوری میشود که جهت یک مدار همان جهت جریان گذرنده از آن است. گرچه انتگرالهای دوگانه در روابط (۴۲-۶) و (۴۳-۶) برای تشریح ویژگیهای ضرایب خودالقایی و القای متقابل بسیار مفید هستند، ولی محاسبه این ضرایب به کمک آنها چندان آسان نخواهد بود. خوشبختانه در بسیاری از مسائل عملی نیازی هم به محاسبه این انتگرالها نیست و اغلب روابط ساده (۳۹-۶) و (۴۰-۶) کفایت میکنند.

بطور خلاصه، برای محاسبه ضریب خودالقایی یک مدار، جریان I (با توزیع خطی، سطحی یا حجمی بر حسب موقعیت مسأله) را در مسیر بسته مدار در نظر گرفته و میدان مغناطیسی حاصل از آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مقدار کل شار گذرنده از سطح مسیر جریان (Ψ) را از رابطه $\int_V \mathbf{N} \cdot d\mathbf{s}$ بدست می‌آوریم. باید توجه شود که N ممکن است همیشه عدد صحیحی نباشد. آنگاه، ضریب خودالقایی مدار از رابطه $L = \Psi/I$ بدست می‌آید. (مرحله آخر را میتوان بگونه دیگری نیز انجام داد که ممکن است سهولت بیشتری در محاسبه ضریب خودالقایی فراهم آورد. پس از محاسبه میدان مغناطیسی، انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در سیستم را با استفاده از رابطه $W_m = \frac{1}{2} \mu \int_V H^2 dv$ بدست می‌آوریم. آنگاه، $L = 2W_m/I^2$ خواهد بود. بحث کامل این روش در قسمت (۶-۶) خواهد آمد.)

برای محاسبه ضریب القای متقابل بین دو مدار، به یکی از مدارها جریان I_1 را منسوب می‌کنیم و میدان مغناطیسی حاصل از آن مدار را محاسبه می‌نماییم. معمولاً، مداری را برای این منظور در نظر می‌گیریم که محاسبه میدان آن از سهولت بیشتری برخوردار باشد. سپس شار کل گذرنده از مدار دیگر (Ψ_{21}) را بدست می‌آوریم. سرانجام نسبت Ψ_{21}/I_1 ضریب القای متقابل بین دو مدار را تعیین میکند.

مثال (۳-۶) ضریب خودالقایی یک سلنوئید طویل را به ازای واحد طول تعیین کنید. شعاع سلنوئید برابر a و تعداد دورهای سیم‌پیچ آن در واحد طول برابر n فرض می‌شود.

حل:

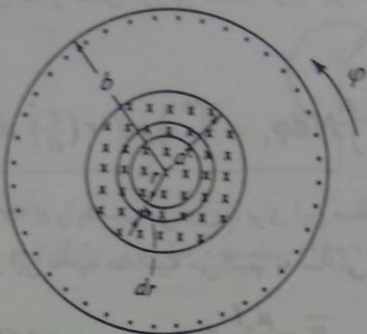
میدان مغناطیسی یک سلنوئید طویل را قبلاً در مثال (۶-۵) محاسبه نمودیم. نتیجه که در رابطه (۴۱-۵) خلاصه شده است نشان میدهد که میدان در درون سلنوئید یکنواخت و برابر $B = \mu_0 n I$ و در خارج آن صفر است. بنابراین شار کل گذرنده از واحد طول سلنوئید عبارت است از:

$$\Psi = n\phi = nB\pi a^2 = \mu_0 \pi a^2 n^2 I$$

آنگاه:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \pi a^2 n^2 \quad (۴۵-۶)$$

مثال (۴-۶) جریان I با چگالی حجمی یکنواخت $\vec{J}=J \hat{a}_z$ از یک هادی استوانه‌ای شکل به طول بینهایت و به شعاع a گذشته و با یک توزیع سطحی یکنواخت از طریق یک سطح استوانه‌ای هادی به شعاع $b > a$ که هم محور با هادی درونی است برمی‌گردد. این مجموعه که سطح مقطع آن در شکل (۶-۱۳) نشان داده شده است تشکیل یک کابل هم‌محور را میدهد. ضریب خودالقایی این کابل هم‌محور را به ازای واحد طول محاسبه نمایید.



شکل (۶-۱۳) سطح مقطع یک کابل هم‌محور و نحوه محاسبه ضریب خودالقایی آن

حل:

با توجه به تقارن استوانه‌ای مسأله و جهت جریان I ، میتوان نتیجه گرفت که میدان مغناطیسی فقط مؤلفه‌ای در جهت \hat{a}_ϕ دارد که مستقل از z و ϕ است. لذا با بکار بردن قانون آمپر روی یک مسیر دایره‌ای شکل به شعاع $r < a$ ، میدان در هادی درونی بشرح زیر محاسبه میشود:

$$B_{\phi 1}(2\pi r) = \mu \pi r^2 J$$

یا:

$$\vec{B}_1 = B_{\phi 1} \hat{a}_\phi = \frac{1}{4} \mu J r \hat{a}_\phi \quad 0 < r < a$$

که μ قابلیت نفوذ هادی درونی است. برای محاسبه شار کل گذرنده از واحد طول هادی درونی که با جریان I پیوند داشته باشد، ابتدا مستطیلی به طول واحد در جهت z و به عرض dr در جهت r و به فاصله r از محور کابل در نظر می‌گیریم. شار گذرنده از این سطح مستطیلی شکل عبارت است از:

$$d\phi_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \frac{1}{4} \mu J r (\hat{a}_z \times dr) = \frac{1}{4} \mu J r dr$$

اما شار $d\phi_1$ فقط کسری از جریان I را دربرمی‌گیرد. اگر این کسر را N بنامیم، میتوان گفت که شار $d\phi_1$ ، N بار جریان I را دربرگرفته است و به عبارت دیگر $d\phi_1$ به میزان $d\psi_1 = Nd\phi_1$ با تمامی جریان I پیوند دارد. اما مقدار N عبارت است از:

$$N = \frac{\text{جریان دربرگرفته شده توسط دایره به شعاع } r}{I} = \frac{\pi r^2 J_0}{\pi a^2 J_0} = \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

برای بدست آوردن مقدار کل شاری که 'ز هادی درونی گذشته و با جریان I پیوند داشته باشد از $d\psi_1$ انتگرال میگیریم:

$$\psi_1 = \int N d\phi_1 = \int_0^a \frac{1}{4\pi} \mu J_0 r \left(\frac{r}{a}\right)^2 dr = \frac{1}{8\pi} \mu J_0 a^2 \quad (46-6)$$

حال، شار گذرنده از ناحیه $a < r < b$ را بدست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا میدان مغناطیسی را با استفاده از قانون مداری آمپر در این ناحیه محاسبه می‌کنیم. به سادگی میتوان نشان داد که:

$$\bar{B}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi \quad a < r < b$$

شار گذرنده از عنصر سطح $ds_\varphi = r dr$ به ازای همه مقادیر $a < r < b$ تمامی جریان I را دربرمی‌گیرد و به عبارت دیگر در این حالت N برابر واحد است. لذا میتوان نوشت:

$$d\phi_2 = \bar{B}_\varphi \cdot ds_\varphi = \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r}$$

و:

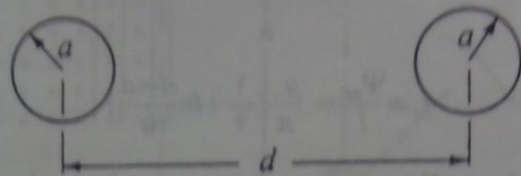
$$\psi_2 = \int N d\phi_2 = \int_a^b \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

و سرانجام ضریب خودالقایی به ازای واحد طول عبارت است از:

$$L = \frac{\psi_1 + \psi_2}{I} = \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (47-6)$$

ملاحظه میشود که L از دو جزء تشکیل میشود. جزء $\mu/8\pi$ را ضریب خودالقایی درونی هادی درونی می‌نامند. جالب توجه است که ضریب خودالقایی درونی یک هادی مستقل از شعاع آن بوده و همیشه برابر مقدار ثابت $\mu/8\pi$ است. اگر هادی درونی کابل نیز به صورت یک سطح استوانه‌ای (توخالی) به شعاع a باشد، ضریب خودالقایی کابل در واحد طول فقط شامل جزء دوم، یعنی برابر با $(\mu_0/2\pi) \ln(b/a)$ ، خواهد بود.

مثال (۵-۶) یک نوع خط انتقال که کاربرد فراوانی در سیستمهای مخابراتی دارد از دو سیم موازی طویل تشکیل میشود. شکل (۶-۱۴) سطح مقطع این خط انتقال، که در آن شعاع هر یک از سیمهای هادی برابر a و فاصله هادها از یکدیگر برابر d است ($d > a$)، را نشان میدهد. ضریب خودالقایی این خط انتقال را به ازای واحد طول تعیین کنید. قابلیتهای نفوذ محیط و هادها را برابر μ فرض کنید.



شکل (۶-۱۴) سطح مقطع خط انتقالی متشکل از دو سیم هادی موازی

حل:

برای تعیین ضریب خودالقایی خط انتقال در واحد طول، باید شار کلی که از یک سطح مستطیلی شکل به طول واحد و به عرض فاصله دو هادی میگذرد و با جریان I پیوند دارد را محاسبه کنیم. ابتدا هادی سمت چپ را در نظر می‌گیریم. شاری که از جریان این هادی ناشی میشود و با I پیوند دارد شامل سه مؤلفه به شرح ذیل میباشد:

- شار ایجاد شده در درون خود هادی که در مثال قبل مقدار آن را برابر $\Psi_1 = \mu I / 4\pi$ محاسبه نمودیم.

- شاری که از ناحیه $a < r < d - a$ میگذرد و مقدار آن برابر است با:

$$\Psi_r = \phi_r = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^{d-a} \left(\frac{\mu I}{2\pi r} \right) (1 dr) = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

- شاری که از ناحیه $d - a < r < d + a$ میگذرد و فقط با کسری از I پیوند دارد، زیرا خطوط

میدان مغناطیسی بخشی از جریان برگشت را دربرمی‌گیرند. از این مؤلفه به استناد $d > a$ و کمتر بودن پیوند آن با I در مقایسه با دو مؤلفه دیگر، صرفنظر می‌کنیم.

بدیهی است که برای $r > d + a$ ، شار متعلق به هادی سمت چپ هیچگونه پیوندی با I ندارد.

پس بطور خلاصه، شار کل ناشی از جریان هادی سمت چپ که از سطح مستطیلی شکل به طول

واحد میگذرد عبارت است از:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_r = \frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d-a}{a} \right) \quad (۶-۴۸)$$

حال باید شار کل ناشی از جریان هادی سمت راست را که از سطح مستطیلی شکل مذکور می‌گذرد نیز بدست آورد. پس از قدری تعمق میتوان دریافت که این شار مساوی شار محاسبه شده برای هادی سمت چپ است، بطوری که شار ناشی از هر دو هادی دو برابر مقدار داده شده در رابطه (۶-۴۸) میباشد. یعنی:

$$\Psi_{tot} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a} \right)$$

آنگاه:

$$L = \frac{\Psi_{tot}}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a} \right)$$

اما چون $d \gg a$ است، $d-a \approx d$ بوده و نتیجه بصورت زیر خلاصه میشود:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right) \quad (۶-۴۹)$$

ملاحظه می‌کنیم که در رابطه (۶-۴۹) اگر $a \rightarrow 0$ ، ضریب خودالقایی به سمت بینهایت میل خواهد کرد و این همان چیزی است که وقوع آنرا قبلاً ضمن بررسی انتگرال دوگانه رابطه (۶-۴۲) پیش‌بینی کرده بودیم.

□

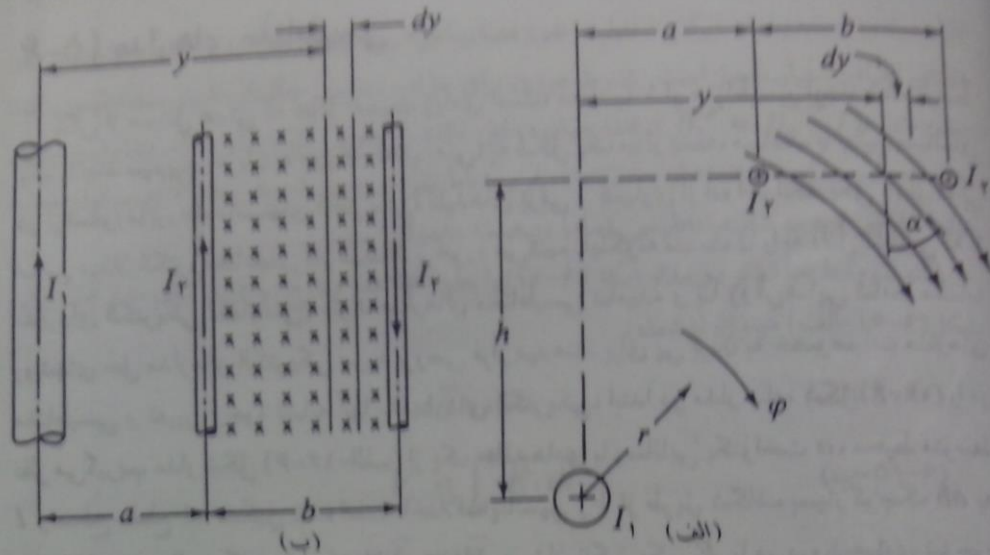
مثال (۶-۶) یک رشته سیم مستقیم بینهایت طویل و حامل جریان I_1 در پایین، سمت چپ و موازی با یک خط تلفن دو سیمی که جریان I_2 از آن می‌گذرد قرار می‌گیرد. شکل (۶-۱۵) سطح مقطع و تصویر از بالای این مجموعه را نشان میدهد. ضریب القای متقابل بین رشته سیم تنها و خط تلفن را به ازای واحد طول محاسبه نمایید. قطر سیمهای تلفن ناچیز فرض میشوند.

حل:

با انتخاب یک سیستم مختصات که محور z آن بر سیم حامل جریان I_1 منطبق باشد و بکار بردن قانون مداری آمپر روی یک مسیر دایره‌ای شکل حول این سیم، میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 عبارت میشود از:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

شار مغناطیسی $d\Psi_{21}$ که از جریان I_1 ناشی شود و از یک سطح مستطیلی شکل واقع بین دو سیم تلفن، به طول واحد و به عرض dy ، بگذرد عبارت است از:



شکل (۶-۱۵) یک خط نلفن دوسیمی و یک رشته سیم موازی با آن و نحوه محاسبه ضریب القای متقابل بین آنها
(الف) سطح مقطع (ب) تصویر از بالا

که α زاویه بین خطوط میدان و بردار واحد عمود بر سطح مستطیلی شکل ds است. با مراجعه به شکل (۶-۱۵) میتوان نشان داد که:

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}}$$

لذا:

$$d\Psi_{r1} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{y dy}{y^2 + h^2}$$

و:

$$\Psi_{r1} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{y dy}{y^2 + h^2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln \frac{h^2 + (a+b)^2}{h^2 + a^2}$$

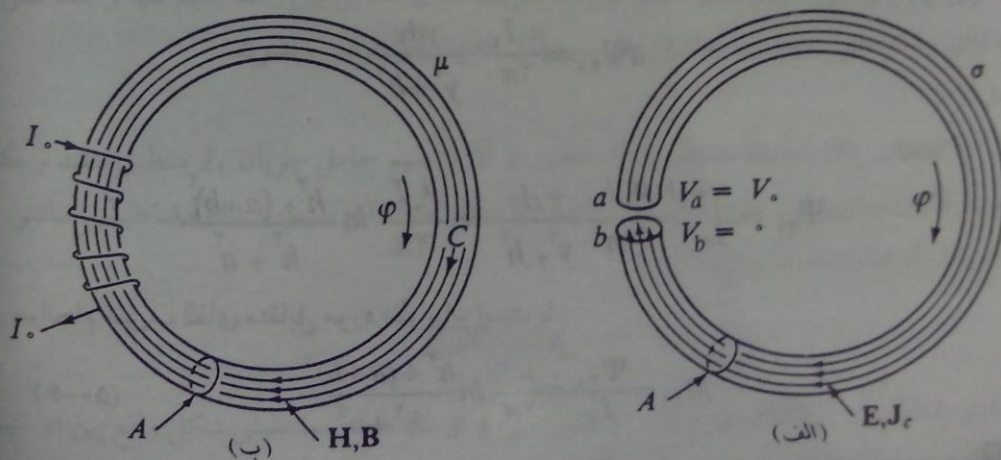
و سرانجام ضریب القای متقابل مورد نظر برابر است با:

$$M_{r1} = \frac{\Psi_{r1}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{h^2 + (a+b)^2}{h^2 + a^2} \quad (۶-۵۰)$$

□

۵-۶ مدارهای مغناطیسی

یکی از مسائل عملی که حائز اهمیت زیادی است، محاسبه شار مغناطیسی ایجاد شده توسط یک یا چند سیم پیچ جریان به دور هسته‌ای آهنی، به شکل یک مدار بسته، میباشد. با چنین مسأله‌ای در ترانسفورماتورها، ماشینهای الکتریکی، کلیدهای برقی و بسیاری از ادوات الکتریکی دیگر که بر اساس میدان الکترومغناطیس کار میکنند برخورد می‌کنیم. اینگونه سیستمها را به دلیل تشابهی که با مدارهای الکتریکی (مقاومتی) دارند مدارهای مغناطیسی نامیده و با روش‌هایی کاملاً مشابه روشهای حل مدارهای الکتریکی مورد بررسی قرار میدهند. برای پی بردن به خصوصیات مدارهای مغناطیسی و تعیین وجوه تشابه آنها با مدارهای الکتریکی، ابتدا دو مدار ساده شکل (۶-۱۶) را در نظر می‌گیریم. مدار شکل (۶-۱۶-الف) از یک حلقه هادی با رسانایی یکنواخت σ ، محیط متوسط l و سطح مقطع A تشکیل شده است. اختلاف پتانسیل V_0 از طریق شکاف بسیار کوچک ab به حلقه هادی اعمال میگردد. این اختلاف پتانسیل میدان الکتریکی \vec{E} را در درون هادی بوجود می‌آورد که از آن جریان هدایتی $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ ناشی میشود. مدار شکل (۶-۱۶-ب) نیز از یک حلقه با ابعادی برابر ابعاد حلقه شکل (۶-۱۶-الف) و از جنس یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ یکنواخت μ تشکیل میشود. به دور این حلقه، سیم پیچی با N دور تعبیه شده و از آن جریان I_0 عبور داده میشود. سیم پیچ جریان، میدان مغناطیسی \vec{H} را پدید می‌آورد که از آن چگالی شار $\vec{B} = \mu \vec{H}$ حاصل میشود. در مدار الکتریکی شکل (۶-۱۶-الف) جریان هدایتی نمیتواند به فضای اطراف هادی نشت کند و تماماً در درون هادی محصور است، ولی در مدار مغناطیسی شکل (۶-۱۶-ب) شار مغناطیسی میتواند به فضای اطراف هسته نفوذ کند. با این وجود، وقتی که $\mu \gg \mu_0$ باشد، یعنی



شکل (۶-۱۶) تشابه بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی (الف) مدار الکتریکی (ب) مدار مغناطیسی

قابلیت نفوذ هسته بسیار بزرگتر از قابلیت نفوذ فضای اطراف که عموماً هوا است باشد، شار نشتی در فضای اطراف بسیار ناچیز است. شرط مرزی برای مؤلفه مماسی چگالی شار مغناطیسی، که بصورت $B_1^{\text{موا}} = B_1^{\text{هسته}} / \mu_r$ نوشته میشود، این نکته را بخوبی آشکار می‌سازد. بنابراین برای تمام موارد عملی که هسته از جنس ماده فرومغناطیسی بوده و شرط $\mu > \mu_0$ برقرار است، میتوان فرض کرد که شار مغناطیسی تماماً در هسته متمرکز است.

اکنون روابط حاکم بر دو مدار شکل (۶-۱۶) را بطور خلاصه مطرح می‌کنیم. برای مدار الکتریکی شکل (۶-۱۶-الف) میتوان نوشت:

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (۶-۵۱-الف)$$

$$V_c = \int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (۶-۵۱-ب)$$

$$\bar{J}_c = \sigma \bar{E} \quad (۶-۵۱-ج)$$

$$I_c = \int_A \bar{J}_c \cdot d\bar{s} \quad (۶-۵۱-د)$$

برای مدار مغناطیسی شکل (۶-۱۶-ب)، با توجه به اینکه چگالی جریان هدایتی در درون هسته صفر است، داریم:

$$\nabla \times \bar{H} = 0 \quad (۶-۵۲-الف)$$

$$NI_c = \oint_c \bar{H} \cdot d\bar{l} \quad (۶-۵۲-ب)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (۶-۵۲-ج)$$

$$\phi = \int_A \bar{B} \cdot d\bar{s} \quad (۶-۵۲-د)$$

مقایسه روابط (۶-۵۱) و (۶-۵۲) وجوه تشابه زیر را بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی آشکار می‌سازد:

$$\bar{E} \leftrightarrow \bar{H} \quad (۶-۵۳-الف)$$

$$V_c \leftrightarrow NI_c \quad (۶-۵۳-ب)$$

$$\bar{J}_c \leftrightarrow \bar{B} \quad (۶-۵۳-ج)$$

$$I_c \leftrightarrow \phi \quad (۶-۵۳-د)$$

$$\sigma \leftrightarrow \mu \quad (۶-۵۳-ه)$$

در مدار شکل (۶-۱۶-الف) نسبت V_0 به I_c را مقاومت حلقه هادی می‌نامند که با آن آشنایی کافی داریم. به سادگی میتوان نشان داد که مقدار این مقاومت برابر است با:

$$R = \frac{V_0}{I_c} = \frac{l}{\sigma A}$$

کمیت مشابه مقاومت در مدار شکل (۶-۱۶-ب) از نسبت NI_0 به ϕ بدست می‌آید. این کمیت را رلوکتانس^۱ یا مقاومت مغناطیسی نام نهاده و با علامت \mathcal{R} نشان می‌دهند. بنابراین، برحسب تعریف میتوان نوشت:

$$\mathcal{R} = \frac{NI_0}{\phi} \quad (۶-۵۴)$$

با فرض آنکه میدان مغناطیسی در سطح مقطع هسته یکنواخت باشد (میدان مغناطیسی در درون یک سیم‌پیچ با تعداد دورهای کافی تقریباً یکنواخت است)، رلوکتانس مدار شکل (۶-۱۶-ب) بشرح زیر محاسبه میشود:

$$NI_0 = \oint_c \bar{H} \cdot d\bar{l} = H_\phi l$$

$$\phi = \int_A \bar{B} \cdot d\bar{s} = B_\phi A = \mu H_\phi A$$

آنگاه:

$$\mathcal{R} = \frac{NI_0}{\phi} = \frac{l}{\mu A} \quad (۶-۵۵)$$

بطوری که از رابطه (۶-۵۵) مشهود است، رلوکتانس نیز همانند مقاومت فقط تابعی از ابعاد هندسی حلقه و البته قابلیت نفوذ آن میباشد. بالاخره مشابه رابطه $\bar{E} = -\nabla V$ که در آن پتانسیل الکتریکی است، میتوان رابطه $\bar{H} = -\nabla V_m$ را تعریف کرد، که در آن V_m پتانسیل اسکالر مغناطیسی نامیده میشود و در فصل پنجم نیز به آن اشاره‌ای شد. یادآوری میشود تعریف مذکور برای پتانسیل مغناطیسی V_m فقط وقتی معتبر است که $\nabla \times \bar{H} = 0$ باشد و البته در مدارهای مغناطیسی به دلیل صفر بودن چگالی جریان هدایتی، کرل شدت میدان مغناطیسی همواره صفر است. در این ارتباط اختلاف پتانسیل مغناطیسی بین دو سطح هم‌پتانسیل عبارت است از:

$$V_{m,ab} = - \int_a^b \bar{H} \cdot d\bar{l} \quad (۶-۵۶)$$

اکنون ببینیم که یک مدار مغناطیسی را که در حالت کلی ممکن است دارای شاخه‌های متعددی با ابعاد مختلف و سیم‌پیچهای جریان گوناگونی باشد چگونه میتوان تجزیه و تحلیل نمود. برای این منظور، ابتدا روش حل مدارهای الکتریکی را یادآوری می‌کنیم. مطالعه مدارهای الکتریکی بر اساس حل همزمان معادلات KCL و KVL و روابط ولتاژ - جریان اجزاء مدار استوار است. یک معادله KCL در واقع بیان رابطه $\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$ روی سطح بسته‌ای حول یک گره جریان است و عموماً بصورت $\sum I_i = 0$ نوشته میشود. از آنجا که \vec{B} مشابه \vec{J} و $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ است، مشابه قانون KCL میتوان قانون KFL را داشت. این قانون بیان میدارد که مجموع جبری شارهایی که به یک گره در مدار مغناطیسی وارد میشوند برابر صفر است:

$$\sum_i \phi_i = 0 \quad (57-6)$$

همچنین یک رابطه KVL در حقیقت بیان رابطه $\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ در یک مسیر بسته است که V_s به منزله نیروی محرکه الکتریکی خالص موجود در مسیر بسته و $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ مجموع افت پتانسیلها روی اجزاء مختلف واقع در مسیر میباشد. این قانون اغلب بصورت $V_s - \sum_i V_i = 0$ نوشته میشود. از آنجا که \vec{H} مشابه \vec{E} ، NI_s مشابه V_s ، V_m مشابه V و $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ است، مشابه قانون KVL میتوان قانون $(KVL)_m$ را برای مدارهای مغناطیسی داشت و آن را بصورت زیر نوشت:

$$\sum_j (NI_s)_j = \sum_i V_{mi} = \sum_i H_i l_i \quad (58-6)$$

در رابطه (۵۸-۶)، $\sum_j (NI_s)_j$ مجموع جبری نیروهای محرکه مغناطیسی در مسیر بسته بوده و میدان مغناطیسی در هر شاخه یکنواخت فرض شده است. بالاخره مشابه رابطه $V=RI$ برای یک مقاومت، رابطه زیر را برای یک رلوکتانس داریم:

$$V_m = \mathcal{R}\phi \quad (59-6)$$

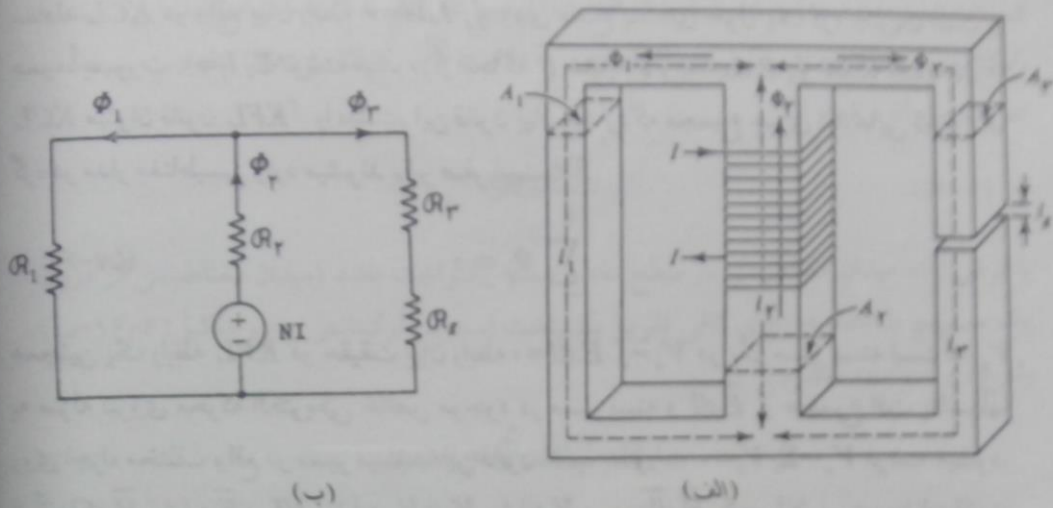
حل یک مدار مغناطیسی با حل همزمان روابط (۵۷-۶)، (۵۸-۶) و (۵۹-۶) انجام می‌پذیرد. برای نشان دادن شیوه کار به بررسی چند مثال می‌پردازیم. مثال (۷-۶) شکل (۱۷-۶-الف) ساختمان یک مدار مغناطیسی را نشان میدهد که از سه شاخه با یک شکاف هوا در شاخه سمت راست تشکیل شده است. سیم‌پیچ تعبیه شده به دور شاخه میانی نیروی

1 - Krichhoff Current Law

2 - Kirchhoff Voltage Law

3 - Krichhoff Flux Law

محرکهای بهمیزان ۱۰۰۰ آمپر دور را تأمین میکنند. مدار الکتریکی معادل را رسم نموده و چگالی شار مغناطیسی را در شکاف هوا بدست آورید. قابلیت نفوذ نسبی هسته $\mu_r = 1000$ و ابعاد آن عبارت از $l_r = 10 \text{ cm}$ ، $l_1 = l_r = 20 \text{ cm}$ ، $A_g = 10 \text{ N cm}^2$ ، $A_r = 10 \text{ cm}^2$ ، $A_1 = A_r = 8 \text{ cm}^2$ و $l_g = 0.1 \text{ cm}$ می باشند.



شکل (۱۷-۶) یک مدار مغناطیسی برای مثال (۷-۶) (الف) مدار مغناطیسی (ب) مدار الکتریکی معادل

حل:

مدار الکتریکی معادل مدار مغناطیسی مورد مطالعه در این مثال در شکل (۱۷-۶) نشان داده شده است. برای حل این مدار ابتدا رلوکتانسهای شاخه های مدار را محاسبه می کنیم.

$$R_1 = R_r = \frac{l_1}{\mu A_1} = \frac{20 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7} \times 1000)(8 \times 10^{-2})} = 19/89 \times 10^4 \text{ آبر دور بر دور}$$

$$R_r = \frac{l_r}{\mu A_r} = \frac{10 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7} \times 1000)(10 \times 10^{-2})} = 7/96 \times 10^4 \text{ آبر دور بر دور}$$

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 A_g} = \frac{0.1 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(10 \text{ N} \times 10^{-2})} = 74/37 \times 10^4 \text{ آبر دور بر دور}$$

حال با استفاده از روابط (۵۷-۶) تا (۵۹-۶)، روابط KFL و $(KVL)_m$ را به شرح زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} \phi_r - \phi_1 - \phi_g = 0 \\ 1000 - R_r \phi_r - (R_r + R_g) \phi_g = 0 \\ R_1 \phi_1 - (R_r + R_g) \phi_g = 0 \end{cases}$$

پس از حل سه معادله فوق برای ϕ_r داریم:

$$\phi_r = 1000 / \mathcal{R}_r \left[1 + (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \right) \right]$$

$$\phi_r = 1000 / (7/96 \times 10^4) \left[1 + (19/89 + 74/37) \left(\frac{1}{19/89} + \frac{1}{7/96} \right) \right] = 714/6 \times 10^{-6} \text{ در}$$

$$B_g = \phi_r / A_g = 714/6 \times 10^{-6} / 10/7 \times 10^{-2} = 0/668 \text{ و بر مترمربع}$$

□

مثال (۸-۶) اگر در مدار مغناطیسی شکل (۶-۱۷-الف) شکاف هوای شاخه میانی تعبیه شود، آمپر دور لازم برای آنکه همان چگالی شار مغناطیسی، یعنی ۰/۶۶۸ و بر مترمربع، در شکاف ایجاد شود را بدست آورید.

حل:

مدار الکتریکی معادل در این مثال بصورت شکل (۶-۱۸) خواهد بود. در این مدار رلوکتانسهای موازی \mathcal{R}_1 و \mathcal{R}_2 را میتوان با رلوکتانس معادل $\mathcal{R}_r = \mathcal{R}_1 / 2$ جایگزین نمود و رابطه $(KVL)_m$ را در مدار معادل حاصله نوشت:

$$NI = \phi_r (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_{eq})$$

اما:

اما:

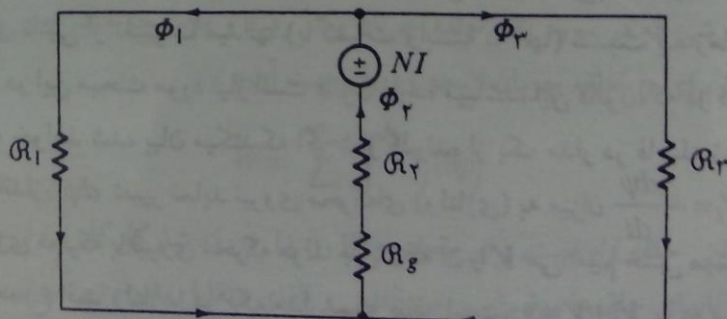
$$\phi_r = B_g A_g = 0/668 \times 10/7 \times 10^{-2} = 714/6 \times 10^{-6} \text{ در}$$

آنگاه:

آنگاه:

$$NI = (714/6 \times 10^{-6}) (7/96 + 74/37 + 9/945) (10^4) = 659/4 \text{ آمپر دور}$$

□



شکل (۶-۱۸) مدار الکتریکی معادل مدار مغناطیسی شکل (۶-۱۷-الف) با شکاف هوای منتقل شده به شاخه میانی

۶-۶) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

در مبحث انرژی میدان الکتریکی که در قسمت (۳-۱۲) مطالعه گردید، ملاحظه نمودیم که برای تشکیل سیستمی از بارهای نقطه‌ای، یعنی جمع‌آوری بارها از اطراف بینهایت دور، مقدار معینی کار باید توسط یک عامل خارجی انجام شود. این کار را بصورت انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی ناشی از مجموعه بارهای نقطه‌ای تعبیر نمودیم و سپس نتایج بدست آمده را به توزیعهای پیوسته بار الکتریکی تعمیم دادیم. همانطور که تشکیل سیستمی از بارهای نقطه‌ای و بطور کلی تشکیل یک توزیع پیوسته بار مستلزم انجام کار است، برای تشکیل سیستمی مرکب از حلقه‌های جریان نیز باید کار انجام شود. در این مورد نیز کار انجام شده را میتوان به منزله انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی تعبیر کرد. به بیان دیگر اگر تعدادی حلقه جریان داشته باشیم و بخواهیم جریان هر یک را از صفر تا مقدار معینی افزایش دهیم، برای رسیدن به این منظور باید مقداری انرژی صرف کرد. این انرژی در حقیقت همان انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی حاصل از این سیستم حلقه‌های جریان میباشد.

محاسبه انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را ممکن است به روشهای مختلفی انجام داد. در اینجا ما ابتدا انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی یک مدار بسته حامل جریان I را بدست می‌آوریم، سپس نتیجه را به n حلقه جریان و سرانجام به یک توزیع پیوسته جریان تعمیم می‌دهیم. فرض کنید مدار بسته C را داشته باشیم. قبل از آنکه مولد جریانی به این مدار وصل شود، جریان مدار و شار گذرنده از آن هر دو صفر هستند. پس از وصل مولد به مدار، جریان مدار رو به افزایش می‌نهد و شار گذرنده از مدار نیز افزایش می‌یابد تا اینکه پس از گذشت زمان t جریان و شار به مقدار نهایی خود، که بترتیب برابر I و Ψ فرض می‌شوند، میرسند. باید دقت شود که در فاصله زمانی t پس از وصل مولد به مدار، جریان و شار توابعی از زمان می‌باشند و لذا به ناچار باید برخی پدیده‌های ناشی از تغییرات میدانها (یا کمیات وابسته به آنها) نسبت به زمان را ملحوظ داشت. آنچه که در این مبحث مورد نیاز است قانون فاراده میباشد. این قانون، که در فصل بعد بطور مشروح مطالعه خواهد شد، بیان میکند که اگر شار گذرنده از یک مدار در فاصله زمانی بینهایت کوچک dt به اندازه $d\psi$ تغییر نماید نیروی محرکه‌ای (ولتاژی) به میزان $V_i = -\frac{d\psi}{dt}$ در مدار القا میشود. این نیروی محرکه با نیروی محرکه مولد جریان که آن را V می‌نامیم خنثی میشود. به عبارت دیگر، چون مجموع افت ولتاژها در یک مدار بسته صفر است، $V_i + V = 0$ بوده و آنگاه میتوان نوشت:

$$V = -\frac{d\psi}{dt}$$

اگر جریان لحظه‌ای مدار را در فاصله زمانی t, t_0 بنامیم، توان دریافت شده از مولد جریان برابر $V\dot{t}$ و انرژی دریافت‌شده از آن در فاصله زمانی dt برابر است با:

$$dW = V i dt = i d\psi \quad (61-6)$$

بنابراین، مقدار کل انرژی دریافت‌شده از مولد برای آنکه جریان i از صفر به I ، یا بطور متناظر شار ψ از صفر به Ψ ، افزایش یابد برابر است با:

$$W = \int_0^I i d\psi = \int_0^\Psi i d\psi \quad (62-6)$$

اما از طرف دیگر، شار گذرنده از یک مدار و جریان آن در هر لحظه از طریق رابطه $\psi = Li$ ، که L ضریب خودالقایی مدار است، به یکدیگر مربوطند. لذا با جایگزین نمودن $d\psi$ با $L di$ در رابطه (62-6) داریم:

$$W = \int_0^I i L di = L \int_0^I d\left(\frac{1}{2} i^2\right) = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Psi \quad (63-6)$$

در رابطه (63-6)، مقدار کل انرژی است که ضمن ایجاد شدن جریان I از مولد، که در واقع یک عامل خارجی محسوب میشود، اخذ میگردد و در میدان مغناطیسی حاصل از جریان I ذخیره میشود. پس از گذشت زمان t_0 که شار و جریان به مقادیر نهایی خود رسیده و از آن به بعد ثابت باقی می‌مانند، صدور انرژی از مولد جریان به میدان نیز پایان می‌یابد.

حال سیستمی را در نظر می‌گیریم که مرکب از n حلقه جریان باشد. انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در سیستم را ممکن است با محاسبه انرژی لازم برای برقرار نمودن یکایک جریانها در مدارهایشان، یعنی انرژی مورد نیاز برای افزایش جریان هر مدار از صفر تا مقدار نهایی اش، بدست آورد. با دنبال نمودن همان روشی که در مورد یک حلقه جریان بکار رفت و به نتیجه مندرج در رابطه (62-6) انجامید، میتوان برای n حلقه جریان نتیجه زیر را بدست آورد:

$$W = \sum_{j=1}^n \int_0^{I_j} i_j d\psi_j \quad (64-6)$$

که I_j جریان نهایی حلقه j ام است. برای محاسبه W ، ابتدا ψ_j ، که شار کل گذرنده از حلقه j ام است، را بر حسب جریانهای حلقه‌ها و ضرایب خودالقایی و القای متقابل شرح زیر می‌نویسیم:

$$\psi_j = L_{jj} i_j + \sum_{k=1}^n M_{jk} i_k \quad k \neq j \quad (65-6)$$

در رابطه (۶-۶۵)، L_{jj} ضریب خودالقایی حلقه j ام و M_{jk} ضریب القای متقابل بین حلقه‌های j ام و k ام می‌باشد. با دیفرانسیل گرفتن از طرفین رابطه (۶-۶۵)، داریم:

$$d\psi_j = L_{jj} di_j + \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} di_k$$

علامت Σ' در رابطه اخیر معرف حاصل جمعی است که در آن جمله مربوط به $j=k$ وجود نداشته باشد. با توجه به رابطه (۶-۶۱)، مقدار کار جزئی dW_j عبارت است از:

$$dW_j = i_j d\psi_j = i_j \left(L_{jj} di_j + \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} di_k \right)$$

آنگاه:

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{j=1}^n dW_j = \sum_{j=1}^n i_j \left(L_{jj} di_j + \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} di_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n L_{jj} d\left(\frac{1}{2} i_j^2\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} d(i_j i_k) \end{aligned} \quad (6-66)$$

ضریب $1/2$ در جلوی جمع دوگانه به دلیل دوبار ظاهر شدن $M_{jk}=M_{kj}$ در حاصل جمع است. اکنون با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۶-۶۶)، مقدار کل انرژی ذخیره شده در سیستم مرکب از n حلقه جریان بدست می‌آید. این انرژی را با W_m نشان می‌دهیم که اندیس m برای منسوب نمودن انرژی به میدان مغناطیسی است.

$$\begin{aligned} W_m = W &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_{jj} I_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} I_j I_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n I_j \left(L_{jj} I_j + \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} I_k \right) \end{aligned}$$

یا:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n I_j \Psi_j \quad (6-67)$$

که Ψ_j شار کل گذرنده از حلقه j ام در وضعیت نهایی است. دقت کنید که رابطه (۶-۶۷) در حقیقت تعمیم رابطه (۶-۶۳) به n حلقه جریان می‌باشد.

در حجم V توزیع شده باشد تعمیم داد. از آنجا که \bar{J} یک کمیت سنوئیدی فرض میشود حجم V به شکل یک لوله مسدود خواهد بود. برای محاسبه انرژی در این حالت، ابتدا توزیع جریان را به تعدادی حلقه جریان که اندازه هر یک برابر $\bar{J} \cdot \Delta s$ باشد تقسیم نموده و آنگاه با استفاده از رابطه (۶۷-۶) عبارت انرژی را برای این تعداد حلقه جریان نوشته و حد آن را وقتی که Δs به سمت صفر میل کند بدست می آوریم:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_j [\bar{J} \cdot \Delta s]_j \Psi_j = \frac{1}{\mu_0} \int_S \Psi \bar{J} \cdot d\bar{s} \quad (۶۸-۶)$$

که S سطح مقطع توزیع جریان، که همان سطح مقطع حجم لوله ای شکل V است، میباشد. توجه کنید که در انتگرال رابطه (۶۸-۶)، Ψ شار گذرنده از سطحی مانند S' است که به مسیر بسته جریان $\bar{J} \cdot \Delta s$ ، که آن را C می نامیم، محدود شود. به منظور ساده نمودن این انتگرال، Ψ را بر حسب میدان مغناطیسی \bar{B} و سپس پتانسیل برداری \bar{A} می نویسیم:

$$\Psi = \int_{S'} \bar{B} \cdot d\bar{s}' = \int_{S'} (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s}' = \oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} \quad (۶۹-۶)$$

حال با جایگزین نمودن Ψ از این رابطه در رابطه (۶۸-۶)، داریم:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_S \oint_C (\bar{A} \cdot d\bar{l})(\bar{J} \cdot d\bar{s}) = \frac{1}{\mu_0} \int_S \oint_C (\bar{A} \cdot \bar{J})(d\bar{l} \cdot d\bar{s})$$

جایجا نمودن $d\bar{l}$ و \bar{J} به این دلیل صحیح است که این دو بردار هم جهت هستند، زیرا هر دو در امتداد منحنی C میباشند. اکنون، چون $d\bar{l} \cdot d\bar{s} = dv$ است، خواهیم داشت:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_V \bar{J} \cdot \bar{A} dv \quad (۷۰-۶)$$

به همین ترتیب، میتوان نشان داد که برای یک توزیع سطحی جریان با چگالی \bar{J}_s روی سطح S ، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی عبارت است از:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_S \bar{J}_s \cdot \bar{A} ds \quad (۷۱-۶)$$

برای آنکه انرژی را بر حسب میدان مغناطیسی \bar{B} بدست آوریم، در رابطه (۷۰-۶) را با $\frac{\nabla \times \bar{B}}{\mu_0}$ جایگزین می کنیم:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_V \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \bar{B}) \cdot \bar{A} dv \quad (۷۲-۶)$$

چون در نقاطی از فضا که جریان الکتریکی وجود ندارد $\nabla \times \bar{B} = 0$ میباشد، تغییر حجم انتگرالگیری در رابطه (۷۲-۶) از V به تمامی فضا مقدار انتگرال را تغییر نخواهد داد. لذا میتوان نوشت:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} (\nabla \times \bar{B}) \cdot \bar{A} \, dv \quad (۷۳-۶)$$

اکنون از اتحاد برداری $\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot \nabla \times \bar{A} - \bar{A} \cdot \nabla \times \bar{B}$ استفاده نموده و در رابطه (۷۳-۶) $(\nabla \times \bar{B}) \cdot \bar{A}$ را با $(\bar{B} \cdot \nabla \times \bar{A} - \nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}))$ جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} [\bar{B} \cdot \nabla \times \bar{A} - \nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B})] \, dv \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} \bar{B} \cdot \bar{B} \, dv - \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} \nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) \, dv \quad (۷۴-۶) \end{aligned}$$

در رابطه (۷۴-۶)، از رابطه $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ در استخراج انتگرال اول استفاده نموده‌ایم. با بکاربردن قضیه دیورژانس انتگرال دوم را به یک انتگرال سطح تبدیل می‌کنیم:

$$\int_{\text{تمام فضا}} \nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) \, dv = \oint_{\text{سطح تمام فضا}} (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{d}s \quad (۷۵-۶)$$

که منظور از سطح تمام فضا سطح کره‌ای به شعاع بینهایت است. با این وجود، روی چنین سطحی هر توزیع جریان سلنوتیدی با حجم محدود بصورت یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور محدود \bar{m} بنظر می‌رسد. بنابراین، وقتی که r به سمت بینهایت میل کند، \bar{A} و \bar{B} به سمت حدود زیر میل میکنند:

$$\begin{aligned} \bar{B} &\rightarrow \frac{\mu_0 \bar{m}}{4\pi r^3} (\gamma \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) \\ \bar{A} &\rightarrow \frac{\mu_0 \bar{m}}{4\pi r^2} \sin \theta \hat{a}_\phi \end{aligned}$$

که \bar{m} در امتداد محور z فرض شده است. بدین ترتیب ملاحظه میشود که $|\bar{A} \times \bar{B}|$ از مرتبه r^{-5} می‌باشد، در حالیکه ds از مرتبه r^2 است. در نتیجه انتگرال سمت راست رابطه (۷۵-۶) برابر صفر است. این نتیجه حتی برای یک توزیع جریان بینهایت نیز صادق خواهد بود بشرط آنکه میدان مغناطیسی \bar{B} حداقل با نرخ r^{-2} و پتانسیل برداری \bar{A} حداقل با نرخ r^{-1} کاهش یابد. پس بطور خلاصه، رابطه (۷۴-۶) بصورت زیر نوشته میشود:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} \bar{B} \cdot \bar{B} \, dv = \int_{\text{تمام فضا}} \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \, dv \quad (۷۶-۶)$$

رابطه (۶-۷۶) به وضوح نشان میدهد که تصور ذخیره شدن انرژی در میدان مغناطیسی کاملاً درست است و تردیدی نیست که کمیت $\frac{1}{2\mu_0} B^2$ چگالی انرژی مغناطیسی میباشد. چنانچه قابلیت نفوذ محیط μ باشد در روابط (۶-۷۲) تا (۶-۷۶) باید μ_0 را با μ جایگزین نمود.

پس بطور خلاصه، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را میتوان از رابطه (۶-۶۷) برای جریانهای خطی، از رابطه (۶-۷۱) برای جریانهای سطحی، از رابطه (۶-۷۰) برای جریانهای حجمی و بالاخره از رابطه (۶-۷۶) برای هر نوع توزیع جریان اعم از خطی، سطحی و حجمی بدست آورد. اگرچه هر یک از روابط مزبور ممکن است در مورد معینی از سادگی خاصی برخوردار باشد، عموماً از رابطه (۶-۷۶) برای محاسبه انرژی مغناطیسی استفاده میشود. انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را همچنین میتوان بر حسب ضریب خودالقایی و جریان بیان داشت. رابطه (۶-۶۳) در واقع چنین شکلی از بیان انرژی را بصورت $W_m = \frac{1}{4} LI^2$ برای یک مدار تک حلقه‌ای حامل جریان I نشان میدهد. برای یک مدار چندحلقه‌ای نیز به سهولت میتوان رابطه مشابهی استخراج نمود. آنچه که در این شکل از بیان انرژی جلب توجه میکند متناسب بودن انرژی با مربع جریان است. رابطه (۶-۷۶) نیز این ویژگی را به دلیل وجود جمله B^2 در بردارد. از اینرو، میتوان این شکل بیان انرژی را به توزیعهای پیوسته نیز تعمیم داد و رابطه زیر را برای انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی حاصل از یک توزیع جریان با مقدار کل I آمپر نوشت:

$$W_m = \frac{1}{4} LI^2 \quad (۶-۷۷)$$

که L ضریب خودالقایی مدار حامل جریان I میباشد. اکنون با استفاده از روابط (۶-۷۶) و (۶-۷۷) میتوان تعریف جدیدی برای ضریب خودالقایی بشرح زیر پیشنهاد نمود:

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int_{\text{تمام فضا}} B^2 dv \quad (۶-۷۸)$$

این رابطه بویژه برای محاسبه ضریب خودالقایی در مواردی که جریان بصورت حجمی توزیع شده باشد بسیار مناسب است.

مثال (۶-۹) مطلوب است محاسبه انرژی ذخیره شده در واحد طول یک سلنوئید طویل با استفاده از الف) رابطه (۶-۶۷)،

ب) رابطه (۶-۷۶).

جریان سلنوئید برابر I ، شعاع آن برابر a و تعداد دورهای سیم پیچ آن در واحد طول برابر n فرض میشود.

حل:

یک سلنوئید در واقع یک سیستم چندحلقه‌ای جریان محسوب میشود که در آن جریانهای همه حلقه‌ها یکسان میباشند. لذا در رابطه (۶-۶۷)، $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_n = I$ ، بوده و میتوان نوشت:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n I_j \Psi_j = \frac{1}{2} I \sum_{j=1}^n \Psi_j = \frac{1}{2} I \Psi_{tot}$$

اما از طرف دیگر، طبق تعریف اولیه ضریب خودالقایی که در رابطه (۶-۳۹) داده شده است، $\Psi_{tot} = LI$ و آنگاه:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

که L ضریب خودالقایی سلنوئید در واحد طول میباشد. با جایگزین نمودن L از رابطه (۶-۴۵) داریم:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \pi a^2 n^2 l I^2 \quad (۶-۷۹)$$

برای محاسبه انرژی با استفاده از رابطه (۶-۷۶)، ابتدا میدان مغناطیسی سلنوئید را که در رابطه (۵-۴۱) بدست آورده‌ایم می‌نویسیم:

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{a}_z & 0 < r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

آنگاه انتگرال حجم در رابطه (۶-۷۶) را بشرح زیر محاسبه میکنیم:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V'} \vec{B} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V'} (\mu_0 n I)^2 dv + 0$$

که V' یک حجم استوانه‌ای به ارتفاع واحد و شعاع بینهایت است. ولی چون میدان مغناطیسی برای $r > a$ صفر است، انتگرال را باید فقط در حجم V_1' که استوانه‌ای به ارتفاع واحد و شعاع a است محاسبه نمود، لذا میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{z=0}^{z=l} \int_{r=0}^{r=a} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} (\mu_0 n I)^2 r dr d\varphi dz \\ &= \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 \left[\int_0^l dz \right] \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \right] \left[\int_0^a r dr \right] = \frac{1}{2} \mu_0 \pi a^2 n^2 l I^2 \end{aligned}$$

□

مثال (۶-۱۰) انرژی مغناطیسی ذخیره شده را در واحد طول کابل هم‌محور شکل (۶-۱۳) بیابید. نوره و سپس ضریب خودالقایی کابل را به ازای واحد طول تعیین کنید.

برای محاسبه انرژی به کمک رابطه (۶-۱۶)، به میدان مغناطیسی \vec{B} نیاز است که به سهولت با استفاده از قانون مدار آمپر بدست می‌آید، ولی چون این میدان در مثال (۶-۴) محاسبه شده است از محاسبه دوباره آن در اینجا خودداری کرده و فقط به ذکر نتیجه اکتفا می‌کنیم:

$$\vec{B} = \vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi & 0 < r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

نگاه کنید:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_{z=-L}^{z=L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} B^2(r) r dr d\phi dz$$

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{\mu_0} \left[\int_{-L}^L dz \right] \left[\int_0^{2\pi} d\phi \right] \left[\int_0^a \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 r^2 dr + \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \frac{dr}{r} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} [2L] [2\pi] \left[\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 \frac{a^3}{3} + \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \frac{b}{a} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi} \left(\frac{1}{3} + \ln \frac{b}{a} \right) \quad (۶-۱۰) \end{aligned}$$

با مسوی قرار دادن W_m با $\frac{1}{2} LI^2$ ، ضریب خودالقایی کابل هم‌محور در واحد طول بدست می‌آید:

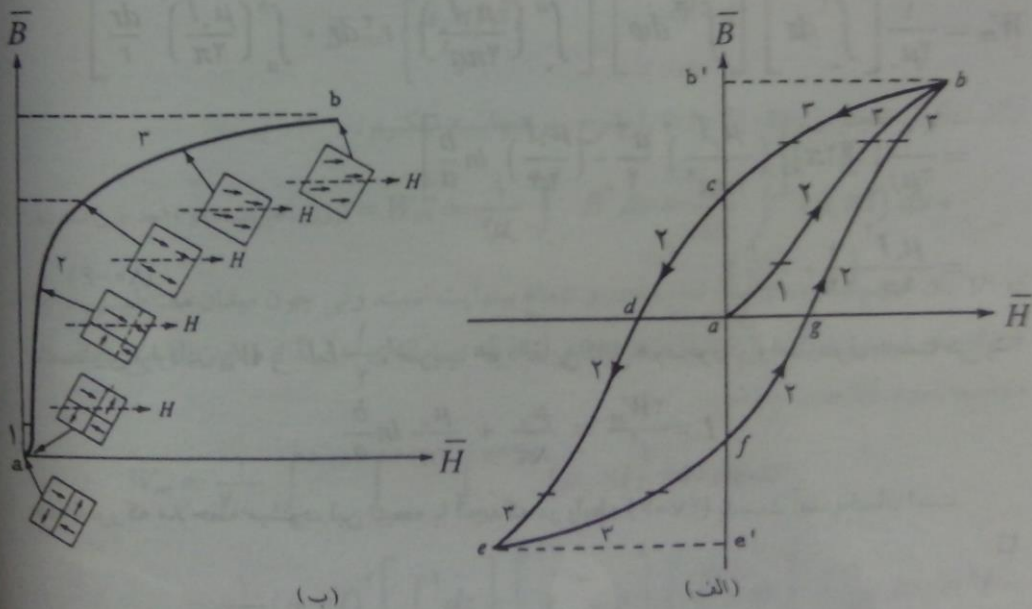
$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{3\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

ملاحظه می‌شود این نتیجه با آنچه که در رابطه (۶-۲۷) بدست آمد یکسان است.

□

۷-۶ هیستریزیس

در قسمت (۲-۶) ضمن مطالعه میدان مغناطیسی در اجسام گفته شد که قابلیت نفوذ مواد فرومغناطیسی تابعی از میدان بوده و مقدار ثابتی ندارد. در حقیقت، رابطه بین میدانهای \vec{H} و \vec{B} در اینگونه اجسام غیرخطی و توأم با هیستریزیس است. از اینرو رابطه بین \vec{H} و \vec{B} عموماً به روش ترسیمی بیان میشود. شکل (۶-۱۹-الف) یک منحنی $\vec{B}-\vec{H}$ نوعی را برای اجسام فرومغناطیسی نشان میدهد. این منحنی را منحنی هیستریزیس نیز می نامند. به منظور تشریح منحنی هیستریزیس، با نمونه‌ای از یک جسم فرومغناطیسی مغناطیس نشده شروع می کنیم. در بدو امر \vec{H} و \vec{B} هر دو صفر هستند. این حالت متناظر با نقطه a روی منحنی است. با افزایش \vec{H} ، مغناطیس شدن جسم آغاز گشته و رو به توسعه می نهد و در نتیجه میدان \vec{B} در امتداد منحنی ab افزایش می یابد تا اینکه سرانجام به نقطه اشباع b برسد. یادآوری میشود که مغناطیس شدن اجسام فرومغناطیسی طی مراحل صورت می پذیرد که بترتیب عبارتند از: ۱- گسترش برگشت پذیر حوزه‌ها، ۲- گسترش برگشت ناپذیر حوزه‌ها، ۳- چرخش حوزه‌ها. شکل (۶-۱۹-ب) گسترش و چرخش حوزه‌ها را در مراحل مختلف نشان میدهد. نواحی مختلف در امتداد منحنی ab و در سایر قسمتهای منحنی هیستریزیس در شکل (۶-۱۹-الف)، که متناظر با وقوع یکی از مراحل مزبور است، بترتیب با اعداد ۱، ۲، ۳ مشخص شده اند. بعنوان مثال آن نواحی که با عدد ۳ مشخص شده اند مترادف با چرخش



شکل (۶-۱۹) پدیده هیستریزیس (الف) منحنی هیستریزیس برای اجسام فرومغناطیسی (ب) نمایش گسترش و چرخش حوزه‌ها

حوزه‌ها میباشند. در نقطه b که تمام حوزه‌ها بطور کامل با میدان اعمال شده هم‌جهت میشوند، افزایش بیشتر H تغییری در B نمی‌دهد و گفته میشود که جسم تا حد اشباع مغناطیس شده است. حال اگر H از مقداری که در نقطه b دارد به سمت صفر کاهش داده شود، B نیز کاهش می‌یابد ولی کاهش یافتن B منحنی ab را در جهت عکس نمی‌پیماید، بلکه منحنی دیگری مانند bc را دنبال میکند و این به مفهوم باقی ماندن مقداری از میدان مغناطیسی القا شده در جسم، حتی پس از برداشتن میدان خارجی، است. در حقیقت، همانطور که قسمت cd منحنی هیستریزس نشان میدهد یک شدت میدان مغناطیسی در جهت عکس باید به جسم اعمال گردد تا B به صفر کاهش یابد. مقدار B را در نقطه c پس‌ماند جسم و مقدار H در نقطه d را نیروی بازگرداننده می‌نامند. افزایش بیشتر H در جهت جدید منجر به افزایش یافتن B در این جهت و سرانجام اشباع آن در نقطه e می‌گردد که قرینه نقطه b است. بالاخره اگر H را از مقداری که در نقطه e دارد به صفر کاهش داده سپس جهت آنرا معکوس نموده و افزایش دهیم، تغییرات بوجود آمده در B منحنی $efgb$ را دنبال میکند و بدین ترتیب حلقه هیستریزس کامل میشود. اکنون بخوبی آشکار است که اگر یک جسم فرومغناطیسی در اختیار داشته باشیم، وضعیت مغناطیسی کنونی آن به تاریخچه گذشته‌اش بستگی دارد (بدین معنی که قبلاً تحت تأثیر چه میدانی و به چه نحو قرار داشته است).

برای آنکه یک دور کامل منحنی هیستریزس طی گردد، مقداری انرژی باید صرف شود. این انرژی، در حقیقت صرف‌گسترش دیواره‌های حوزه‌ها و عبور دادن آنها از ناخالصی‌ها و ناهمگنی‌های جسم میشود و تماماً به حرارت تبدیل گشته و قابل بازیابی نیست. نکته جالب توجه در مورد منحنی هیستریزس متناسب بودن تلفات هیستریزس با مساحت این منحنی بسته است. اما قبل از آنکه به بررسی این مطلب پردازیم، انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در محیطهای غیرخطی را اجمالاً مورد بررسی قرار میدهیم.

کلید روابطی را که در قسمت قبل برای محاسبه انرژی مغناطیسی بدست آوردیم فقط برای محیطهای خطی قابل استفاده هستند. در محیطهای غیرخطی چگالی انرژی را نمیتوان از رابطه $w_m = B^2 / 2\mu$ بدست آورد و باید در جستجوی رابطه جدیدی بود. در اینجا ما با ذکر یک مثال به استخراج رابطه چگالی انرژی مغناطیسی در محیطهای غیرخطی می‌پردازیم و مطالعه این مسأله را در حالت کلی به مرجع ذکر شده در پاورقی احاله میکنیم.^۱ برای این منظور، سیم پیچی با N حلقه را در نظر می‌گیریم که دارای یک هسته آهنی به طول متوسط l و با سطح مقطع مستطیلی شکل به مساحت S باشد. میدان مغناطیسی در هسته یکنواخت فرض شده و از پراکنندگی شار در اطراف

1 - "An Introduction to Electromagnetic Theory"; P. C. Clemmow, Cambridge University Press.

هسته نیز صرفنظر میشود. اگر جریان سیم پیچ از I با اندازه dI افزایش یابد، میدان مغناطیسی به اندازه dB و شار گذرنده از هسته به اندازه $d\Psi$ افزایش می یابد. انرژی لازم برای این تغییرات، طبق رابطه (۶-۶۱)، برابر است با:

$$dW = Id\Psi = NI d\phi = NIS dB$$

اما از طرف دیگر، طبق قانون مداری آمپر $NI = Hl$ است، لذا:

$$dW = lSH dB = VH dB$$

که V حجم هسته آهنی است. بنابراین انرژی لازم برای آنکه میدان مغناطیسی در درون هسته از B_1 به B_2 افزایش یابد عبارت است از:

$$W = V \int_{B_1}^{B_2} H dB$$

آنگاه چگالی انرژی، یعنی انرژی ذخیره شده در واحد حجم، برابر است با:

$$w_m = \frac{W}{V} = \int_{B_1}^{B_2} H dB \quad (۶-۸۱)$$

رابطه (۶-۸۱) یک نتیجه کلی است و حتی وقتی که میدان در حجم V یکنواخت نباشد و طبعاً برای محیطهای خطی نیز صادق است.

اکنون با استفاده از رابطه (۶-۸۱) تلفات هیستریزس را مورد بررسی قرار میدهیم. با مراجعه به شکل (۶-۱۹ الف) انرژی لازم برای افزایش دادن میدان B از صفر در نقطه a به مقدار حالت اشباع در نقطه b ، به استناد رابطه (۶-۸۱)، متناسب با سطح abb' است. این انرژی در حقیقت برابر حاصل ضرب سطح abb' در حجم جسم فرومغناطیسی میباشد. با کاهش یافتن B در امتداد منحنی bc مقداری از انرژی جذب شده در مرحله قبل به منبع بازگردانده میشود. این مقدار متناسب با سطح $bc'b'$ است. به همین ترتیب، در مراحل بعد که B در امتداد منحنیهای cde ، ef و fgb' تغییر می یابد تا حلقه هیستریزس کامل شود، مقداری از انرژی که متناسب با سطوح $cdee'$ ، efe' و $fgbb'$ میباشد بین منبع و جسم فرومغناطیسی رد و بدل میشوند. در واقع، انرژیهایی که متناسب با سطوح $cdee'$ و $fgbb'$ هستند از منبع اخذ میشوند و آن مقدار انرژی که متناسب با سطح efe' است به منبع بازگردانده میشود. اگر مقدار انرژی خالصی که منبع به جسم میدهد تا یک حلقه کامل هیستریزس طی شود را محاسبه کنیم، خواهیم دید که متناسب با سطح حلقه هیستریزس است (توجه کنید که منحنی ab جزء حلقه محسوب نمی شود). بدین ترتیب، صحت این ادعا که تلفات

هیستریزیس متناسب با مساحت حلقه هیستریزیس است تأیید گردید.

۶-۸) محاسبه میدان مغناطیسی به کمک پتانسیل اسکالر V_m

اگرچه پتانسیل مغناطیسی اسکالر بر خلاف پتانسیل الکتریکی دارای مفهوم فیزیکی نیست، ولی از آن میتوان بعنوان وسیله مؤثری برای حل پاره‌ای مسائل میدان مغناطیسی استفاده نمود. پتانسیل مغناطیسی اسکالر، همانطور که در قسمت (۵-۶) ذکر گردید، به گونه‌ای تعریف میشود که شدت میدان مغناطیسی \vec{H} مساوی منهای گرادیان آن باشد، یعنی $\vec{H} = -\nabla V_m$. ولی همواره باید بخاطر داشت که این تعریف فقط در نقاطی از فضا که چگالی جریان آزاد صفر است معتبر می‌باشد. آنچه که زمینه را برای استفاده از پتانسیل اسکالر V_m فراهم میسازد، صادق بودن معادله لاپلاس برای این پتانسیل است که ما هم اکنون با روشهای گوناگون حل آن آشنایی کافی داریم. در حقیقت، استفاده از V_m و بهره‌برداری از تشابهات موجود بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در پاره‌ای موارد چنان موقعیت ویژه‌ای را فراهم می‌آورد که حتی نیازی به انجام محاسبات نخواهد بود. بطوری که اگر پاسخ یک مسأله مربوط به میدان الکتریکی ساکن در اختیار باشد، بی‌درنگ میتوان پاسخ مسأله مشابه مربوط به میدان مغناطیسی ساکن را نوشت. برای روشن‌تر شدن مطلب یادآوری میکنیم که میدان الکتریکی ساکن در یک محیط بدون بار توسط معادلات $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ و $\nabla \times \vec{E} = 0$ و میدان مغناطیسی ساکن در یک محیط بدون جریان توسط معادلات $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ و $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ بیان میشود. بعلاوه شرایط مرزی برای هر دو میدان یکسان است، زیرا مؤلفه‌های مماسی \vec{E} و \vec{H} و مؤلفه‌های عمودی \vec{D} و \vec{B} در مرز پیوسته هستند. بنابراین پاسخ یک مسأله مربوط به میدان مغناطیسی ساکن را میتوان با تغییر V به V_m ، \vec{E} به \vec{H} ، \vec{D} به \vec{B} و ϵ به μ از پاسخ مسأله مشابه مربوط به میدان الکتریکی ساکن بدست آورد. اکنون با ذکر چند مثال کاربرد پتانسیل اسکالر را در محاسبه میدان مغناطیسی نشان میدهیم.

مثال ۶-۱۱) کره‌ای به شعاع a و با قابلیت نفوذ μ_r در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت قرار می‌گیرد. $\vec{B} = B_0 \hat{a}_z$ ، $\vec{H} = \mu_r H_0 \hat{a}_z$ در درون و بیرون کره تعیین نمایید.
حل:

چون در هیچ نقطه‌ای از فضا جریان الکتریکی آزاد وجود ندارد، معادله لاپلاس و رابطه $\vec{H} = -\nabla V_m$ برای پتانسیل اسکالر V_m صادق می‌باشند و حل مسأله به یافتن جواب معادله $\nabla^2 V_m = 0$ تحت شرایط مرزی حاکم خلاصه میشود. اما چون شکل ریاضی این مسأله با مسأله مشابه برای میدان الکتریکی که در مثال (۴-۹) مطالعه گردید یکسان است، کافی است در روابط (۴-۹۳) و (۴-۹۴) را به V ، E ، V_m ، H و ϵ را به μ تغییر دهیم تا حل مسأله کنونی بدست آید.

پس از انجام تغییرات مذکوره داریم:

$$\begin{cases} V_m^i(r, \theta) = -\frac{\Upsilon H_0}{\mu_r + \Upsilon} r \cos \theta & r \leq a \\ V_m^o(r, \theta) = -\left[1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + \Upsilon} \frac{a^\Upsilon}{r^\Upsilon}\right] H_0 r \cos \theta & r \geq a \end{cases} \quad (۸۲-۶)$$

$$\begin{cases} H^i(r, \theta) = \frac{\Upsilon H_0}{\mu_r + \Upsilon} (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta) = \frac{\Upsilon H_0}{\mu_r + \Upsilon} \hat{a}_z & r < a \\ H^o(r, \theta) = H_0 \left[1 + \frac{\Upsilon(\mu_r - 1)}{\mu_r + \Upsilon} \frac{a^\Upsilon}{r^\Upsilon}\right] \cos \theta \hat{a}_r - H_0 \left[1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + \Upsilon} \frac{a^\Upsilon}{r^\Upsilon}\right] \sin \theta \hat{a}_\theta & r > a \end{cases} \quad (۸۳-۶)$$

$$\begin{cases} B^i(r, \theta) = \mu_r \mu_0 H^i(r, \theta) & r < a \\ B^o(r, \theta) = \mu_0 H^o(r, \theta) & r > a \end{cases} \quad (۸۴-۶)$$

□

مثال (۶-۱۲) یک رشته سیم نازک حامل جریان I بصورت یک پوسته کروی به شعاع a مطابق شکل (۶-۲۰-الف) سیم پیچی میشود. با فرض آنکه تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول در امتداد محور Z یکنواخت باشد، توزیع جریان حاصل از این سیم پیچ را میتوان با یک لایه کروی جریان با چگالی $\vec{J}_s = J_s \sin \theta \hat{a}_\phi$ تقریب زد. شدت میدان مغناطیسی را در درون و بیرون سیم پیچ محاسبه کنید.

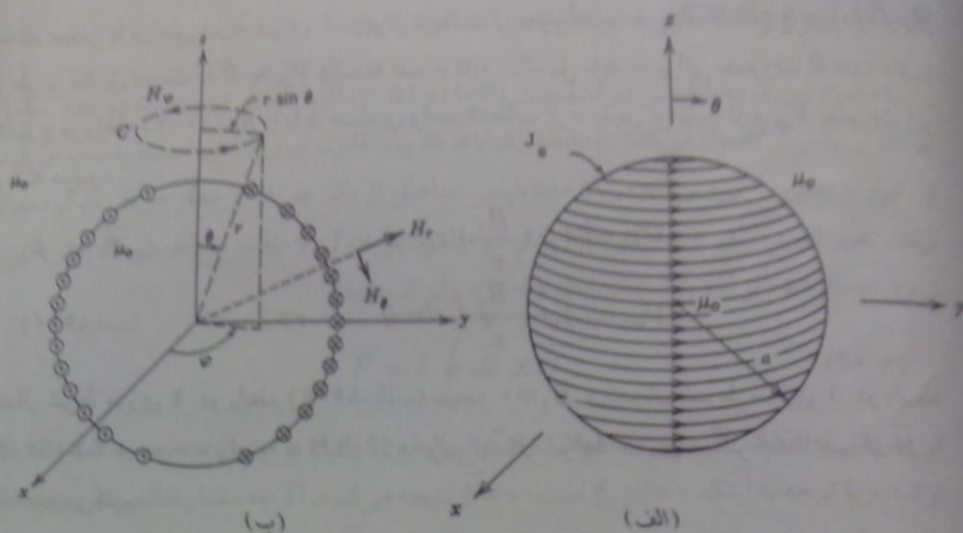
حل:

چون فقط روی سطح $r=a$ جریان وجود دارد، رابطه $\vec{H} = -\nabla V_m$ در تمام نقاط درون و بیرون سیم پیچ کروی برقرار است و V_m در معادله لاپلاس صدق میکند، یعنی در $r \neq a$ ، $\nabla^2 V_m = 0$ است. بنابراین حل مسأله منوط به یافتن جواب معادله لاپلاس برای V_m تحت شرایط مرزی حاکم است که بشرح زیر خلاصه میشوند:

$$۱) \begin{cases} r \rightarrow \infty \\ V_m \rightarrow \text{محدود} \end{cases} \quad ۲) \begin{cases} r \rightarrow 0 \\ V_m \rightarrow \text{محدود} \end{cases} \quad (۸۵-۶)$$

$$۳) \begin{cases} r = a \\ H_{r1} = H_{r2} \end{cases} \quad ۴) \begin{cases} r = a \\ H_{\theta 2} - H_{\theta 1} = J_s = J_s \sin \theta \end{cases}$$

شرایط مرزی ۱ و ۲ بدین دلیل اعمال میشوند که یک توزیع جریان محدود در هیچ نقطه‌ای از فضا



شکل (۶-۲۰) سیم پیچ کروی و میدان ناشی از آن (الف) توزیع جریان معادل برای سیم پیچ کروی (ب) برای نشان دادن صفر بودن مؤلفه H_ϕ میدان

نمی‌تواند پتانسیل و شدت میدان نامحدود ایجاد کند. شرط ۳ پیوستگی مؤلفه‌های عمودی میدانها را بر اساس رابطه (۶-۳۷) و شرط ۴ میزان ناپیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدانها را بر اساس رابطه (۶-۳۵) بیان میدارد. توجه کنید که نواحی درون و بیرون سیم پیچ کروی را میتوان بصورت دو ناحیه با مرزی در $r=a$ و با قابلیت‌های نفوذ یکسان در نظر گرفت و شرایط مرزی (۶-۳۵) و (۶-۳۷) را بکار برد.

با استفاده از تقارن استوانه‌ای توزیع جریان نسبت به محور z و قانون مدار آمپر میتوان نتیجه گرفت که مؤلفه ϕ میدان \bar{H} باید برابر صفر باشد. در حقیقت اگر $\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l}$ را روی یک مسیر دایره‌ای شکل دلخواه، مطابق شکل (۶-۲۰-ب)، که مرکز آن منطبق بر محور z و صفحه آن عمود بر محور z است، محاسبه کنیم چون جریان خالص دربرگرفته شده توسط مسیر C صفر است، داریم:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = H_\phi (\gamma \pi r \sin \theta) = 0$$

و در تمام نقاط خواهیم داشت:

$$H_\phi = 0$$

اما صفر بودن مؤلفه ϕ میدان \bar{H} به معنای مستقل بودن تابع پتانسیل V_m از ϕ میباشد. (چرا؟) بنابراین، پتانسیل اسکالر V_m فقط تابعی از r و θ بوده و جواب کلی آن شکل رابطه (۴-۸۰) را دارا

است. سپس با بررسی شرط مرزی ۴ میتوان دریافت که چون تغییرات H_θ ، $\sin \theta$ را در بردارد و H_θ از طریق مشتق نسبت به θ به V_m وابسته است، تابع پتانسیل باید تغییراتی بصورت $\cos \theta$ داشته باشد و در رابطه (۴-۸۰)، n را باید مساوی واحد انتخاب کرد. بدین ترتیب، تابع V_m بصورت زیر نوشته میشود:

$$V_{m1} = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) \cos \theta \quad r < a \quad (۶-۸۶-الف)$$

$$V_{m2} = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r} \right) \cos \theta \quad r > a \quad (۶-۸۶-ب)$$

اعمال شرط مرزی ۲ در رابطه (۶-۸۶-الف) نتیجه $B_1 = 0$ و اعمال شرط مرزی ۱ در رابطه (۶-۸۶-ب) نتیجه $A_2 = 0$ را به دنبال دارد. برای اعمال شرایط مرزی دیگر ابتدا میدان \bar{H} را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{H}_1 = -\nabla V_{m1} = -A_1 \cos \theta \hat{a}_r + A_1 \sin \theta \hat{a}_\theta \quad r < a \quad (۶-۸۷-الف)$$

$$\bar{H}_2 = -\nabla V_{m2} = \frac{2B_2}{r^2} \cos \theta \hat{a}_r + \frac{B_2}{r^2} \sin \theta \hat{a}_\theta \quad r > a \quad (۶-۸۷-ب)$$

اعمال شرایط مرزی ۳ و ۴ در رابطه (۶-۸۷) به دستگاه دو معادله‌ای زیر می‌انجامد:

$$\begin{cases} \frac{2B_2}{a^2} = -A_1 \\ \frac{B_2}{a^2} - A_1 = J_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{2}{3} J_s \\ B_2 = \frac{1}{3} a^2 J_s \end{cases} \quad (۶-۸۸)$$

با جایگزین نمودن مقادیر بدست آمده برای A_1 و B_2 در روابط (۶-۸۷) نتیجه نهایی زیر را بدست می‌آوریم:

$$\bar{H} = \begin{cases} \frac{2}{3} J_s (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta) = \frac{2}{3} J_s \hat{a}_z & r < a \quad (۶-۸۹-الف) \\ \frac{1}{3} J_s \left(\frac{a^2}{r^2} \right) (\cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) & r > a \quad (۶-۸۹-ب) \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که میدان مغناطیسی در درون سیم پیچ کروی یکنواخت و در جهت z است، در حالیکه در بیرون سیم پیچ همانند میدان یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور $m = 4\pi a^3 J_s / 3$ میباشد.

□

۹-۶ نیرو و گشتاور مغناطیسی

با مفهوم نیروی مغناطیسی در قسمتهای (۱-۵) و (۳-۵) آشنا شدیم. نیرویی که دو مدار حامل جریان بر یکدیگر اعمال می‌کنند از رابطه (۱-۵)، که بیان قانون نیروی آمپر است، بدست می‌آید. این نیرو را بصورت نیرویی که میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان بر مدار جریان دیگر اعمال میکند تعبیر نمودیم. در حالت کلی اگر مدار C حامل جریان I در میدان مغناطیسی \vec{B} قرار بگیرد، نیروی اعمال شده بر آن، به استناد رابطه (۳-۵)، برابر است با:

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B} \quad (9-6)$$

در صورتی که میدان \vec{B} یکنواخت باشد، انتگرال رابطه (۹-۶) را میتوان بصورت $\oint_C d\vec{l} \times \vec{B}$ نوشت و با توجه به اینکه $\oint_C d\vec{l} = 0$ است، $\vec{F} = 0$ نتیجه می‌شود. اگرچه مقدار خالص نیروی اعمال شده بر یک مدار جریان توسط میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} همواره صفر است، گشتاور مکانیکی اعمال شده بر مدار جریان صفر نخواهد بود. این گشتاور سعی بر چرخاندن مدار جریان دارد به گونه‌ای که میدان حاصل از مدار جریان (و به بیان دقیقتر گشتاور مغناطیسی مدار جریان) با میدان \vec{B} هم‌جهت شود. به منظور محاسبه این گشتاور از رابطه $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$ شروع می‌کنیم، که در آن عبارت از نیرو در نقطه‌ای که با بردار مکان \vec{r} نسبت به مبدأ مختصات مشخص می‌گردد بوده و \vec{T} گشتاور حاصل از این نیرو میباشد. ابتدا مثال ساده یک مدار دایره‌ای شکل به شعاع a و حامل جریان I ، که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات بوده و در صفحه xy واقع باشد، را در نظر می‌گیریم. فرض میشود که این مدار جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0 \hat{a}_z$ قرار بگیرد. نیروی اعمال شده بر عنصر طول $d\vec{l}$ از مدار جریان، بر اساس رابطه (۹-۶)، برابر است با $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ و گشتاور مکانیکی حاصل از $d\vec{F}$ عبارت است از $d\vec{T} = \vec{r} \times d\vec{F}$ ، که $d\vec{l} = a d\varphi \hat{a}_\varphi$ و $\vec{r} = a \hat{a}_r$ می‌باشد. جهت تسهیل محاسبات، \hat{a}_r و \hat{a}_φ را بر حسب بردارهای واحد در دستگاه مختصات مستطیلی بیان می‌کنیم. با استفاده از $\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y$ و $\hat{a}_r = \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y$ ، عنصر گشتاور $d\vec{T}$ بصورت زیر خلاصه میشود:

$$d\vec{T} = a^3 (\cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y) \times [I(-\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y) \times B_0 \hat{a}_z] d\varphi$$

$$= a^3 I B_0 (\cos \varphi \sin \varphi \hat{a}_y - \sin^2 \varphi \hat{a}_x) d\varphi$$

آنگاه میزان کل گشتاور برای تمامی مدار جریان عبارت است از:

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \int d\bar{T} = a^T IB_s \left[\hat{a}_y \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}_{=0} - \hat{a}_x \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi}_{=\pi} \right] \\ &= -(I\pi a^T) B_s \hat{a}_x \quad (91-6)\end{aligned}$$

با توجه به اینکه مقدار $I\pi a^T$ اندازه گشتاور مغناطیسی حلقه جریان، $\bar{m} = I\pi a^T \hat{a}_z$ و $\hat{a}_z \times \hat{a}_y = -\hat{a}_x$ است نتیجه (۹۱-۶) را میتوان بصورت زیر بیان داشت:

$$\bar{T} = \bar{m} \times \bar{B} \quad (92-6)$$

نتیجه بیان شده در رابطه (۹۲-۶) گرچه برای یک حلقه جریان دایره‌ای شکل بدست آمد، در حالت کلی برای هر مدار بسته جریان با شکل دلخواه، که در میدان مغناطیسی یکنواخت \bar{B} قرار بگیرد، صادق است. اگر مسیر جریان یک منحنی بسته مسطح باشد (یعنی بتواند روی یک صفحه قرار بگیرد)، گشتاور مغناطیسی \bar{m} از رابطه $\bar{m} = IS \hat{a}_n$ بدست می‌آید، که S مساحت مدار جریان و \hat{a}_n بردار واحدی عمود بر صفحه مدار جریان و در جهت پیشروی پیچ راستگردی است که در جهت جریان I چرخانیده شود. در صورتی که مسیر جریان یک منحنی بسته فضایی غیرمسطح باشد، گشتاور مغناطیسی آن از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$\bar{m} = \frac{I}{c} \oint_C \bar{r} \times d\bar{l} \quad (93-6)$$

اثبات رابطه (۹۲-۶) برای حالت کلی که C یک منحنی بسته غیرمسطح است به مسأله (۲۶-۶) در پایان فصل موكول می‌گردد. رابطه (۹۲-۶) اساس کار موتورهای DC را تشکیل می‌دهد.

■ نیرو و گشتاور برحسب انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده

محاسبه نیروی بین مدارهای جریان، وقتی که این مدارها شکل‌های ساده یا تقارن‌های بخصوصی نداشته باشند، با استفاده از قانون نیروی آمپر کار آسانی نیست. در اینجا روش دیگری مبتنی بر انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم ارائه می‌دهیم. شیوه بررسی در اینجا مشابه روشی است که برای مطالعه نیرو و گشتاور الکتریکی در قسمت (۳-۱۳) بکار بردیم. فرض کنید سیستمی مرکب از تعدادی توزیع جریان داشته باشیم که با دنیای خارج هیچ گونه ارتباطی نداشته باشد. تصور کنید یک جابجایی مجازی در این سیستم به اندازه ΔI روی دهد. کار لازم برای این جابجایی برابر است با $\Delta W = \bar{F} \cdot \Delta \bar{l}$ که همان نیروی مورد نظر است. چون سیستم با دنیای خارج ارتباط ندارد، انرژی

مورد نیاز باید از خود سیستم تأمین شود و چنین چیزی فقط در ازای کاهش انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم امکان پذیر است. بنابراین:

$$\Delta W + \Delta W_m = 0 \quad (94-6)$$

که ΔW_m تغییر بوجود آمده در انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم است اگر جابجایی Δl بوقوع می پیوست. با جایگزین نمودن ΔW ، داریم:

$$\Delta W_m = -\bar{F} \cdot \Delta l \quad (95-6)$$

پس از بکار بستن تعریف گرادیان یک تابع اسکالر، رابطه (۹۵-۶) به صورت زیر بیان میشود:

$$\bar{F} = -\nabla W_m \Big|_{\phi = \text{ثابت}} \quad (96-6)$$

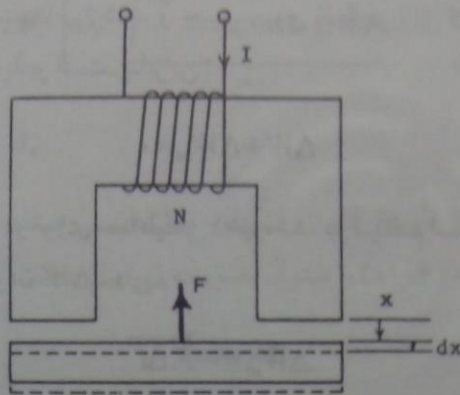
توجه کنید که «ثابت ϕ » در رابطه (۹۶-۶) ناشی از این حقیقت است که چون سیستم با دنیای خارج ارتباط ندارد، میزان کل شار مغناطیسی سیستم (مترادف با میزان کل بار الکتریکی در سیستمهای الکتریکی) ثابت باقی می ماند.

اگر سیستم مورد مطالعه طوری طرح شده باشد که بتواند حول محوری، مثلاً محور z ، بچرخد، کار مورد نیاز برای جابجایی زاویه ای $\Delta\phi$ برابر است با $\Delta W = T_z \Delta\phi$ ، آنگاه:

$$T_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \phi} \Big|_{\phi = \text{ثابت}} \quad (97-6)$$

شکل (۲۱-۶) مدار یک سیستم الکترومکانیکی را نشان می دهد که دارای کاربردهای صنعتی متعددی است. جراثقال برقی و کلیدها و رله های الکترومکانیکی طرز کاری نظیر سیستم نشان داده شده در شکل (۲۱-۶) دارند. قسمت اصلی مدار این سیستم شامل یک هسته آهنی U شکل است که به دور آن سیم پیچی با N دور تعبیه شده است. جریان I در سیم پیچ شار مغناطیسی ϕ را در مدار تولید می نماید. برای محاسبه نیرویی که به وزنه آهنی وارد می آید از رابطه (۹۶-۶) استفاده می کنیم. در این محاسبه باید ϕ و لذا $B = \phi/S$ را ثابت نگه داریم، که S سطح مقطع هسته آهنی میباشد. اگر وزنه به اندازه dx از هسته دورتر شود، تغییر بوجود آمده در انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم با فرض ثابت ماندن ϕ برابر خواهد بود با:

$$dW_m = \left(\frac{1}{\mu_0} B^2\right) dv = \left(\frac{\phi^2}{\mu_0 S^2}\right) dv \quad (98-6)$$



شکل (۶-۲۱) مدار یک سیستم الکترومکانیکی

که $dv = 2Sdx$ تغییر حجم مدار مغناطیسی و $B^2/2\mu_0$ چگالی انرژی مغناطیسی در حجم dv می‌باشد. یادآوری میشود که فضای تغییر حجم فقط شامل هوا با قابلیت نفوذ μ_0 میباشد. با جایگزین نمودن dv در رابطه (۶-۹۸)، نتیجه $dW_m/dx = B^2 S/\mu_0$ حاصل گشته و آنگاه:

$$\bar{F} = -\nabla W_m = -\frac{dW_m}{dx} \hat{a}_x = -\frac{B^2 S}{\mu_0} \hat{a}_x \quad (۶-۹۹)$$

یک روش دیگر برای محاسبه نیرو و گشتاور مغناطیسی بر حسب انرژی ذخیره شده در سیستم بر این فرض استوار است که سیستم با دنیای خارج ارتباط دارد و انرژی مورد نیاز برای تغییر مکان Δl از منابع خارجی تأمین میشود. بعنوان مثال میتوان تصور کرد که سیم پیچ جریان در سیستم شکل (۶-۲۱) به یک منبع جریان وصل میباشد و لذا جریان سیم پیچ (I) همواره ثابت است. در این حالت $\Delta W = \Delta W_m$ است و با استفاده از $\Delta W = \bar{F} \Delta l$ و تعریف گرادیان، داریم:

$$\bar{F} = \nabla W_m \Big|_{I = \text{ثابت}} \quad (۶-۱۰۰)$$

در صورتی که سیستم بتواند حول محوری، مثلاً محور z ، بچرخد (نظیر آنچه که در شکل (۶-۳۱) نشان داده شده است) مؤلفه z برای گشتاور حاصله از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$T_z = \frac{\partial W_m}{\partial \varphi} \Big|_{I = \text{ثابت}} \quad (۶-۱۰۱)$$

باید توجه شود که روابط (۶-۹۶) و (۶-۱۰۰) و نیز روابط (۶-۹۷) و (۶-۱۰۱) پاسخهای یکسانی را برای یک سیستم نتیجه می‌دهند.

برای روشن شدن این نکته مدار شکل (۶-۲۱) را مجدداً، با فرض ثابت باقی ماندن جریان I ، مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید قبل از جابجایی dx ، شار گذرنده از مدار ϕ و رلوکتانس آن \mathcal{R} باشد. بعد از جابجایی، شار به $\phi + d\phi$ و رلوکتانس به $\mathcal{R} + d\mathcal{R}$ تغییر می‌یابد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم، با استفاده از رابطه (۶-۶۷)، برابر است با:

$$W_m = \frac{1}{2} \Psi I = \frac{1}{2} NI\phi$$

با دیفرانسیل گرفتن از طرفین این رابطه و توجه به اینکه N و I ثابت فرض میشوند، داریم:

$$dW_m = \frac{1}{2} NI d\phi = \frac{1}{2} \mathcal{R} \phi d\phi \quad (۶-۱۰۲)$$

برای محاسبه $d\phi$ ، رابطه $(KVL)_m$ را در مدار قبل و بعد از جابجایی dx می‌نویسیم:

$$NI = \mathcal{R}\phi = (\mathcal{R} + d\mathcal{R})(\phi + d\phi) \quad (۶-۱۰۳)$$

با صرفنظر کردن از $d\mathcal{R}d\phi$ در مقابل جملات دیفرانسیل مرتبه اول در رابطه (۶-۱۰۳)، داریم:

$$d\phi = -\phi \frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} \quad (۶-۱۰۴)$$

با استفاده از رابطه (۶-۱۰۴) در رابطه (۶-۱۰۲) و توجه به اینکه $d\mathcal{R} = \mu_0 dx / S$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$dW_m = -\frac{\phi^2 dx}{\mu_0 S} = -\frac{B^2 S}{\mu_0} dx$$

و سرانجام بر اساس رابطه (۶-۱۰۰)، خواهیم داشت:

$$\bar{F} = \frac{dW_m}{dx} \hat{a}_x = -\frac{B^2 S}{\mu_0} \hat{a}_x \quad (۶-۱۰۵)$$

ملاحظه می‌کنیم، همانطور که انتظار میرفت، نتیجه بدست آمده در رابطه (۶-۱۰۵) دقیقاً برابر نتیجه قبلی در رابطه (۶-۹۹) می‌باشد.

اگر از این سیستم بعنوان یک جراثقال استفاده شود، اندازه نیروی \bar{F} باید حداقل مساوی نیروی جاذبه زمین بر وزنه باشد. به عبارت دیگر، $|F| \geq mg$ که m جرم وزنه و g شتاب ثقل زمین (متر بر مجذور ثانیه $g = 9.8$) می‌باشد. بنابراین، برای آنکه جراثقال قادر به بلند کردن وزنه باشد، چگالی شار مغناطیسی مورد نیاز در هسته باید شرط زیر را برآورده سازد:

$$B \geq \sqrt{\frac{\mu_0 mg}{S}} \quad (۶-۱۰۶)$$

۶-۱۰) خلاصه‌ای از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن

اکنون که با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن آشنایی لازم را کسب نموده‌ایم، جا دارد که خلاصه‌ای از قوانین بنیادی حاکم بر این دو میدان و فرمولهای مهم استخراج شده از آنها را ارائه نماییم. در هر دو مورد میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، یک قانون تجربی زیربنای کلیه قوانین و روابط دیگر را تشکیل میدهد. مثلاً، در مورد میدان الکتریکی ساکن قانون کولمب اساس نظریه میدان است و سایر قوانین، فرمولها و روابط، ریشه در این قانون دارند. باین وجود، آنچه که بعنوان قوانین حاکم بر میدانها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند قوانین ماکسول می‌باشند که ما تا به حال آنها را برای میدانهای ساکن آموخته‌ایم. در نهایت این قوانین ماکسول هستند که بصورت جامع‌ترین روابط قادر به تشریح کلیه خصوصیات و رفتار میدانها میباشند و بدرستی اساس مطالعه میدانهای الکترومغناطیس را تشکیل میدهند.

در جدول (۶-۱) خلاصه‌ای از قوانین و فرمولهای مهم برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن درج شده است. این جدول همچنین مقایسه روشنگرانه‌ای از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن بعمل می‌آورد و اختلافات و تشابهات آنها را بخوبی آشکار میسازد.

جدول (۶-۱) خلاصه‌ای از قوانین بنیادی و فرمولهای مهم برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن

میدان الکتریکی ساکن	میدان مغناطیسی ساکن	
$\vec{F}_{11} = \frac{Q_1 Q_2 \vec{R}_{11}}{4\pi\epsilon_0 R_{11}^2}$	$\vec{F}_{11} = \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2 d\vec{l}_1 \times (\vec{d}_{11} \times \vec{R}_{11})}{4\pi R_{11}^3}$	قوانین تجربی نیرو
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$	تعاریف
$\vec{E} = \frac{Q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2}$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi R^3}$	میدان ناشی از توزیع نقطه‌ای
$\vec{E} = \int_{c'} \frac{\rho_1(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{l}'}{4\pi\epsilon_0 \vec{r}-\vec{r}' ^2}$	$\vec{B} = \int_{c'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi \vec{r}-\vec{r}' ^2}$	توزیع خطی
$\vec{E} = \int_{s'} \frac{\rho_s(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}') ds'}{4\pi\epsilon_0 \vec{r}-\vec{r}' ^2}$	$\vec{B} = \int_{s'} \frac{\mu_0 \vec{J}_s(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}') ds'}{4\pi \vec{r}-\vec{r}' ^2}$	توزیع سطحی
$\vec{E} = \int_{v'} \frac{\rho_v(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0 \vec{r}-\vec{r}' ^2}$	$\vec{B} = \int_{v'} \frac{\mu_0 \vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}') dv'}{4\pi \vec{r}-\vec{r}' ^2}$	توزیع حجمی

ادامه جدول (۱-۶)

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (S \text{ در محصور در } S)$ $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_v / \epsilon_0$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (C \text{ در محصور در } C)$ $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	<p>قوانین گوس و آمپر شکل انتگرالی</p> <p>شکل نقطه‌ای</p>
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$	<p>خواص میدان شکل انتگرالی</p> <p>شکل نقطه‌ای</p>
$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ $V = \int_{C'} \frac{\rho_l(\vec{r}') dl'}{4\pi\epsilon_0 \vec{r} - \vec{r}' }$ $V = \int_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}') ds'}{4\pi\epsilon_0 \vec{r} - \vec{r}' }$ $V = \int_{V'} \frac{\rho_v(\vec{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0 \vec{r} - \vec{r}' }$	$\vec{A} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R}$ $\vec{A} = \int_{C'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi \vec{r} - \vec{r}' }$ $\vec{A} = \int_{S'} \frac{\mu_0 \vec{J}_s(\vec{r}') ds'}{4\pi \vec{r} - \vec{r}' }$ $\vec{A} = \int_{V'} \frac{\mu_0 \vec{J}_v(\vec{r}') dv'}{4\pi \vec{r} - \vec{r}' }$	<p>پتانسیل ناشی از توزیع نقطه‌ای</p> <p>توزیع خطی</p> <p>توزیع سطحی</p> <p>توزیع حجمی</p>
$\vec{E} = -\nabla V$	$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$	<p>روابط پتانسیل و میدان</p>
$\nabla^2 V = -\rho_v / \epsilon_0$	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$	<p>معادله پواسون</p>
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$ $\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$	<p>قوانین ماکسول</p>
$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$	<p>روابط بین میدانها</p>
$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$	$\mu = \mu_0 \mu_r$	<p>قابلیتهای گذردمی و نفوذ</p>

ادامه جدول (۶-۱)

$\hat{a}_n \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$ $\hat{a}_n \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = \cdot$	$\hat{a}_n \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s$ $\hat{a}_n \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = \cdot$	شرایط مرزی
$\rho_{ps} = \hat{a}_n \cdot \bar{P}$ $\rho_p = -\nabla \cdot \bar{P}$	$\bar{J}_{ms} = -\hat{a}_n \times \bar{M}$ $\bar{J}_m = \nabla \times \bar{M}$	توزیعهای القایی
$C = \frac{Q}{V}$	$L = \frac{\Psi}{I}$	ظرفیت و ضریب خودالقایی
$R = \frac{V}{I}$	$\mathcal{R} = \frac{V_m}{\phi}$	مقاومت و رلوکتانس
$W_e = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \cdot \bar{D} dv$	$W_m = \frac{1}{2} \int_V \bar{H} \cdot \bar{B} dv$	انرژی ذخیره شده
$\bar{F} = -\nabla W_e \Big _{\text{ثابت } Q}$ $\bar{F} = \nabla W_e \Big _{\text{ثابت } V}$	$\bar{F} = -\nabla W_m \Big _{\text{ثابت } \phi}$ $\bar{F} = \nabla W_m \Big _{\text{ثابت } I}$	نیرو
$T_z = -\frac{\partial W_e}{\partial \phi} \Big _{\text{ثابت } Q}$ $T_z = \frac{\partial W_e}{\partial \phi} \Big _{\text{ثابت } V}$	$T_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \phi} \Big _{\text{ثابت } \phi}$ $T_z = \frac{\partial W_m}{\partial \phi} \Big _{\text{ثابت } I}$	گشتاور

■ خلاصه فصل

- خواص مغناطیسی اجسام را در مقیاس میکروسکوپی مطالعه کرده و آنها را به انواع اجسام دیامغناطیسی، پارامغناطیسی، فرومغناطیسی، فری مغناطیسی و ضد فرومغناطیسی دسته بندی نمودیم.
- میدان ثانویه ناشی از اجسام را تحت تأثیر میدان مغناطیسی اولیه خارجی بررسی نموده و چگالیهای سطحی و حجمی جریانهای مغناطیسی ناشی از قطبی شدن مغناطیسی یک جسم را بدست آوردیم. مغناطیس شدن جسم را بر حسب چگالی گشتاور مغناطیسی \bar{M} بیان داشتیم. چگالیهای جریانهای مغناطیسی بر حسب \bar{M} عبارت از $\bar{J}_{ms} = -\hat{a}_n \times \bar{M}$ و $\bar{J}_m = \nabla \times \bar{M}$ می باشند.
- شدت میدان مغناطیسی \bar{H} را تعریف کردیم، بطوری که $\bar{B} = \mu_0 (\bar{M} + \bar{H}) = \mu_0 \mu_r \bar{H}$ است. μ_r قابلیت نفوذ نسبی جسم نامیده میشود.
- قانون مداری آمپر را بر حسب میدان \bar{H} بیان نمودیم:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = C$$
 جریان دربرگرفته شده توسط C
- شرایط مرزی را بین دو ناحیه مطالعه کردیم و نشان دادیم که مؤلفه عمودی میدان \bar{B} در مرز پیوسته بوده $(B_{n1} = B_{n2})$ ولی مؤلفه های مماسی میدان \bar{H} به اندازه چگالی جریان سطحی آزاد موجود در مرز ناپیوسته است $(\bar{H}_{t1} - \bar{H}_{t2} = \bar{J}_s)$.
- ضرایب خودالقایی و القای متقابل را تعریف کرده و روش محاسبه آنها را ارائه نمودیم.
- مدارهای مغناطیسی را مورد بحث قرار داده و تجزیه و تحلیل آنها را بر اساس روشی مشابه آنچه که برای بررسی مدارهای الکتریکی مقاومتی به کار میرود انجام دادیم.
- انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را مورد مطالعه قرار داده و فرمولهای مختلفی را برای محاسبه این انرژی بدست آوردیم. همچنین روش جدیدی برای محاسبه ضریب خودالقایی با استفاده از انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم ارائه نمودیم.
- پدیده هیستریزس را در اجسام فرومغناطیسی مورد بررسی قرار داده و نشان دادیم که تلفات هیستریزس متناسب با سطح حلقه هیستریزس می باشد.

- محاسبه میدان مغناطیسی به کمک پتانسیل مغناطیسی اسکالر (V_m) را مورد بررسی قرار داده و بهره‌برداری از روشهای آموخته شده و پاسخهای موجود برای مسائل الکتریکی مشابه را مورد تأکید قرار دادیم.
- نیرو و گشتاور مغناطیسی و روش محاسبه آنها را بررسی نموده و با کاربرد عملی آنها آشنا شدیم.
- مقایسه جامعی از قوانین و فرمولهای حاکم بر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن بعمل آوردیم. این مقایسه تشابهات و اختلافات بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را بخوبی آشکار می‌سازد.

■ مسائل

۱-۶ اتمی را در نظر بگیرید که بار هسته آن برابر $|e|$ بوده و دارای یک الکترون با بار e و جرم m_e باشد. فرض میشود که الکترون با سرعت زاویه‌ای ω_e در مداری دایره‌ای شکل به شعاع a به دور هسته گردش میکند. مطلوب است محاسبه تغییر ایجاد شده در گشتاور دو قطبی مغناطیسی مربوط به الکترون وقتی که میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 در جهت عمود بر صفحه مدار الکترون به اعمال شود. فرض کنید که شعاع مدار الکترون با اعمال میدان مغناطیسی تغییری نکند.

۲-۶ یک دیسک نازک آهنی به شعاع a و ضخامت l در امتداد موازی محورش مغناطیس شده است. در صورتی که چگالی گشتاور مغناطیسی برابر مقدار ثابت M_0 باشد، میدانهای \bar{H} و \bar{B} را روی محور دیسک، هم در داخل و هم در خارج آن، بدست آورید.

۳-۶ یک کره آهنی به شعاع a بطور یکنواخت مغناطیس شده است، بطوری که چگالی گشتاور مغناطیسی ایجاد شده در آن برابر $\bar{M} = M_0 \hat{a}_z$ میباشد. میدانهای \bar{H} و \bar{B} را در مرکز کره آهنی محاسبه نمایید.

۴-۶ دو ماده مغناطیسی با قابلیت‌های نفوذ μ_1 و μ_2 بترتیب نواحی $z > 0$ و $z < 0$ از فضا را اشغال نموده‌اند. یک صفحه بینهایت جریان با چگالی $\bar{J}_s = J_s \hat{a}_z$ در $z = 0$ ، یعنی مرز بین دو ناحیه، قرار دارد. میدانهای \bar{H} و \bar{B} را در تمام نقاط فضا تعیین کنید.

۵-۶ مسأله (۴-۶) را وقتی که بجای صفحه بینهایت جریان، جریان خطی I در امتداد محور x و در جهت مثبت این محور قرار داشته باشد تکرار نمایید.

۶-۶ ناحیه $z < -d$ از فضا را یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی μ_r بطور یکنواخت فراگرفته است. یک رشته سیم نازک به طول بینهایت در امتداد محور x واقع بوده حامل جریان I آمپر در جهت مثبت محور x میباشد.

الف) نشان دهید که چگالی جریان مغناطیسی سطحی عبارت است از:

$$\bar{J}_{ms} = \frac{(\mu_r - 1)Id}{\pi(\mu_r + 1)(y^2 + d^2)} \hat{a}_x$$

و چگالی جریان مغناطیسی حجمی برابر صفر است.

ب) نشان دهید که میدان مغناطیسی \bar{B} در ناحیه شامل ماده مغناطیسی ($z < -d$) همانند میدان حاصل از یک سیم بینهایت طول در امتداد محور x و حامل جریان $I [\frac{2\mu_r}{\mu_r + 1}]$ آمپر

در جهت x میباشد.

ج) نشان دهید که میدان مغناطیسی در ناحیه خالی ($z > -d$) همانند میدانی است که از سیم حامل جریان I در امتداد محور x و یک سیم جریان تصویر موازی با محور x که از نقطه $(0, 0, -2d)$ بگذرد و حامل جریان I ($\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}$) آمپر در جهت مثبت x باشد حاصل میشود.

۶-۷ ناحیه $1 < z < 2$ از فضا را یک ماده مغناطیسی با ضریب حساسیت غیر یکنواخت $\chi_m(z) = \frac{z}{4}$ اشغال نموده است. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}_0 = B_0 \hat{a}_y$ به ماده اعمال میشود.

الف) نشان دهید که چگالیهای جریانهای مغناطیسی سطحی و حجمی از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\vec{J}_{ms} = \begin{cases} \frac{B_0}{4\mu_0} \hat{a}_y & z=1 \\ -\frac{B_0}{4\mu_0} \hat{a}_y & z=2 \end{cases}$$

$$\vec{J}_m = \frac{B_0}{4\mu_0} \hat{a}_y \quad 1 < z < 2$$

ب) میدان مغناطیسی ثانویه و میدان مغناطیسی کل را در درون و بیرون ماده مغناطیسی بدست آورید.

۶-۸ ناحیه $a < r < b$ در مختصات استوانه‌ای را یک ماده مغناطیسی اشغال میکند. یک رشته سیم نازک، که حامل جریان I در جهت مثبت z و در امتداد محور z است، میدان مغناطیسی $\vec{B} = (\mu_r I / 2\pi a) \hat{a}_\phi$ را در ماده ایجاد میکند.

الف) قابلیت نفوذ ماده را محاسبه کنید.

ب) \vec{J}_{ms} را روی سطوح $r=a$ و $r=b$ تعیین نمایید.

ج) \vec{J}_m را در ماده مغناطیسی بدست آورید.

۶-۹ یک سلنویید بینهایت طول به شعاع a و با n دور سیم پیچ در واحد طول حامل جریان I میباشد. ناحیه $a \leq r \leq b$ از فضای درون سلنویید با یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی μ_r اشغال شده است. بقیه فضای درون سلنویید، یعنی $b < r < a$ ، هوا با قابلیت نفوذ μ_0 میباشد. میدانهای \vec{H} و \vec{B} را در کلیه نقاط فضا تعیین نمایید. (رسانایی ماده مغناطیسی برابر صفر فرض

میشود.)

۱۰-۶ دو ناحیه ۱ و ۲ با مرز مشترکی در $z=0$ مفروضند. در ناحیه ۱ ($z>0$) $\mu_1=2\mu_0$ و در ناحیه ۲ ($z<0$) $\mu_2=2\mu_0$ است. همه میدانها در دو ناحیه یکنواخت فرض میشوند. میدان مغناطیسی در ناحیه ۱ بصورت $\vec{B}_1=B_0(2\hat{a}_x+2\hat{a}_y+5\hat{a}_z)$ میباشد که B_0 مقدار ثابتی است. در مرز $z=0$ جریان $\vec{J}_s=B_0(\hat{a}_x-2\hat{a}_y)/\mu_0$ میگذرد. میدان مغناطیسی را در ناحیه ۲ محاسبه کنید.

۱۱-۶ دو ناحیه ۱ و ۲ با مرز مشترک $y=0$ مفروضند. در ناحیه ۱ ($y<0$) $\mu_1=\mu_0$ و در ناحیه ۲ ($y>0$) $\mu_2=3\mu_0$ می باشد. میدانهای مغناطیسی یکنواخت \vec{B}_1 و \vec{B}_2 بترتیب در نواحی ۱ و ۲ موجودند. این میدانها از میدان اولیه \vec{B}_0 که قبل از حضور ماده مغناطیسی در ناحیه ۲ وجود داشته است پدید آمده اند. در صورتی که $\vec{B}_1=B_0(\frac{1}{3}\hat{a}_x+\hat{a}_y)$ (مقدار ثابت) و هیچ جریان آزادی در مرز $y=0$ وجود نداشته باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) میدان \vec{B}_2

ب) میدان اولیه \vec{B}_0

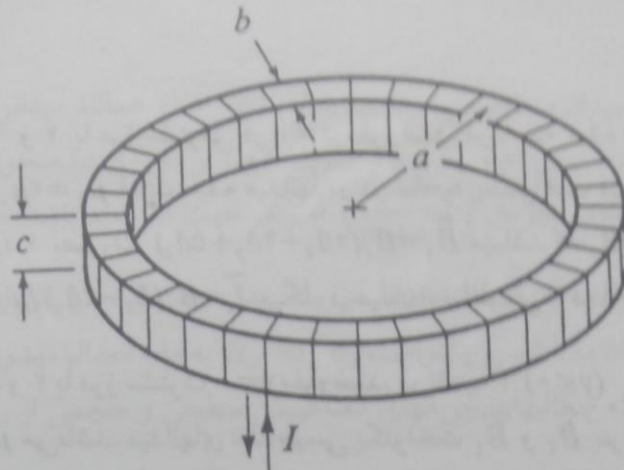
۱۲-۶ جریان I با چگالی غیریکنواخت $\vec{J}=J_0\frac{r}{a}\hat{a}_z$ از یک هادی استوانه‌ای شکل طویل به شعاع a که محور آن در امتداد محور z قرار دارد میگذرد. مطلوب است محاسبه ضریب خودالقایی داخلی هادی با استفاده از:

الف) روش پیوند شار مغناطیسی،

ب) روش انرژی.

۱۳-۶ یک قطعه سیم به شکل دایره‌ای به شعاع a خمیده شده و طوری در مجاورت یک سیم طویل قرار داده میشود که هر دو در یک صفحه واقع شوند. در صورتی که فاصله مرکز دایره از سیم برابر $2a$ باشد، نشان دهید که ضریب القای متقابل بین سیم طویل و سیم دایره‌ای شکل برابر $M=0.268\mu_0 a$ است.

۱۴-۶ یک رشته سیم نازک حامل جریان I بطور پیوسته به دور یک هسته چنبره‌ای با سطح مقطع مستطیلی شکل، مطابق شکل (م-۶-۱۴)، سیم‌پیچی شده است. شعاع متوسط چنبره برابر a و تعداد دورهای سیم‌پیچ به ازای واحد طول در امتداد محیط متوسط چنبره برابر n است. ضریب خودالقایی چنبره را محاسبه کنید.



شکل (م-۶-۱۴)

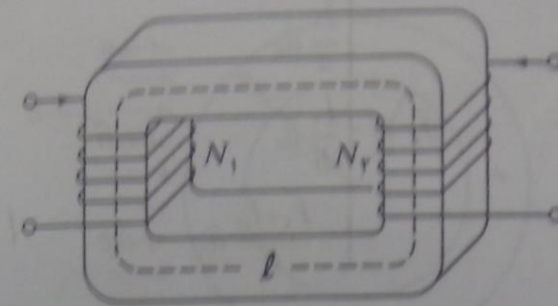
۱۵-۶ فرض کنید یک رشته سیم نازک طویل در امتداد محور تقارن چنبره مسأله (۶-۱۴) قرار بگیرد. ضریب القای متقابل بین چنبره و سیم نازک طویل را محاسبه کنید.

۱۶-۶ یک کابل هم محوره که شعاعهای هادیهای درونی و بیرونی آن بترتیب a و b هستند مفروض است. نیمی از فضای محصور بین هادیها با ماده‌ای مغناطیسی که قابلیت نفوذ آن μ می‌باشد اشغال می‌شود. توزیع ماده مغناطیسی را در فضای بین هادیها به گونه‌ای تعیین کنید که ضریب خودالقایی کابل در واحد طول حداکثر باشد. این مقدار حداکثر را محاسبه کنید ($\mu > \mu_0$).

۱۷-۶ برای سلنویید مسأله (۶-۹)، ضریب خودالقایی را به ازای واحد طول محاسبه کنید.

۱۸-۶ یک هسته آهنی چنبره‌ای دارای محیط متوسط 20 cm و سطح مقطع دایره‌ای شکل به مساحت 2 cm^2 می‌باشد. یک شکاف کوچک هوا به عرض 0.1 cm در هسته ایجاد میشود. آمپر دور لازم را برای برقرار نمودن شار مغناطیسی 3×10^{-4} وبر در شکاف هوا تعیین نمایید. سطح مؤثر شکاف هوا را با سطحی دایره‌ای شکل به قطر $d+w$ تقریب بزنید که d قطر دایره مقطع چنبره و w عرض شکاف هوا میباشد. قابلیت نفوذ هسته را $1000\mu_0$ فرض کنید.

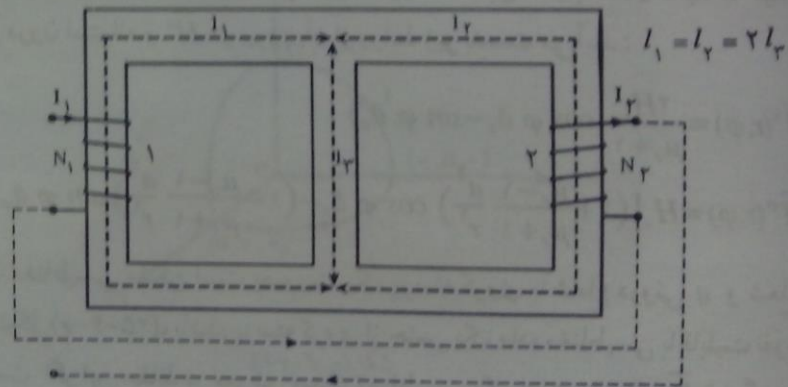
۱۹-۶ مطلوب است محاسبه ضرایب خودالقایی و القای متقابل ($M_{21} = M_{12}$ و L_{22}, L_{11}) برای یک ترانسفورماتور ایده‌آل که سیم‌پیچ اولیه آن دارای N_1 دور و سیم‌پیچ ثانویه آن دارای N_2 دور باشد. چه رابطه‌ای بین ضرایب L_{22} و L_{11} و ضریب M_{12} وجود دارد؟ سطح مقطع هسته ترانسفورماتور را برابر S ، طول متوسط آن را برابر l و قابلیت نفوذ آن را برابر μ فرض کنید. شکل (م-۶-۱۹) ترانسفورماتور و سیم‌پیچهای آن را نشان می‌دهد.



شکل (م-۶-۱۹)

۲۰-۶ شکل (م-۶-۲۰) یک مدار انرژی را با سه شاخه و دو سیم پیچ جریان نشان می‌دهد. هسته این مدار دارای سطح مقطع یکنواخت به مساحت S و قابلیت نفوذ μ می‌باشد. سایر مشخصات مدار در شکل نشان داده شده‌اند. فرض می‌شود که میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌پیچ‌های جریان تماماً در هسته متمرکز باشد.

الف) ضریب خودالقایی سیم‌پیچ ۱ و ضریب القای متقابل بین دو سیم‌پیچ را محاسبه کنید.
 ب) اگر سیم‌پیچ‌های ۱ و ۲ مطابق اتصالات خط‌چین به یکدیگر وصل شوند، ضریب خودالقایی ترکیب حاصله چه خواهد بود؟



شکل (م-۶-۲۰)

۲۱-۶ نشان دهید که انرژی ذخیره شده در یک مدار مغناطیسی برابر $W_m = \frac{1}{2} \mathcal{R} \phi^2$ می‌باشد که ϕ شار مغناطیسی گذرنده از مدار و \mathcal{R} رلوکتانس آن می‌باشد.
 ۲۲-۶ توزیع جریان سطحی زیر در دستگاه مختصات استوانه‌ای مفروض است:

$$\vec{J}_s = \begin{cases} \frac{I_1}{a} \hat{a}_z & r=a \\ \frac{I_2}{b} \hat{a}_z & r=b \\ -\frac{I_1+I_2}{c} \hat{a}_z & r=c \end{cases}$$

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی حاصل از توزیع جریان مزبور را در واحد طول به دو روش زیر محاسبه کنید:

الف) با استفاده از رابطه $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J}_s \cdot \vec{A} ds$

ب) با استفاده از رابطه $W_m = \frac{1}{2} \int_V B^2 dv$

۶-۲۳ منحنی $B-H$ برای یک ماده مغناطیسی توسط رابطه $B = \mu_0 H^{\gamma}$ بیان می شود. \bar{M} و μ چه مقادیری دارند؟

۶-۲۴ استوانه ای از جنس یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی μ_r دارای طول بینهایت و شعاع a است. این استوانه در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{H} = H_0 \hat{a}_x$ قرار می گیرد، بطوری که میدان عمود بر محور استوانه باشد (محور استوانه بر محور z منطبق است). نشان دهید که میدان مغناطیسی \vec{H}^i در درون استوانه و \vec{H}^o در بیرون آن از روابط زیر بدست می آیند:

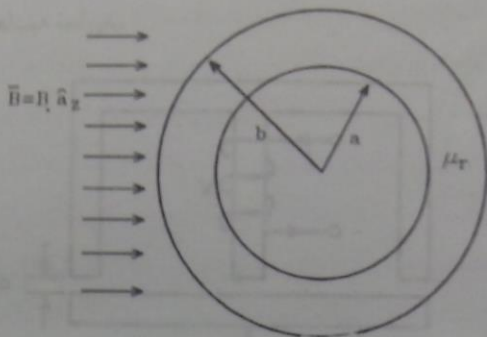
$$\vec{H}^i(r, \varphi) = \frac{2H_0}{\mu_r + 1} (\cos \varphi \hat{a}_r - \sin \varphi \hat{a}_\varphi) \quad r < a$$

$$\vec{H}^o(r, \varphi) = H_0 \left[\left(1 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^\gamma}{r^\gamma}\right) \cos \varphi \hat{a}_r - \left(1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^\gamma}{r^\gamma}\right) \sin \varphi \hat{a}_\varphi \right] \quad r > a$$

۶-۲۵ یک حفاظ مغناطیسی ممکن است بصورت یک پوسته کروی با شعاع درونی a و شعاع بیرونی b ، مطابق شکل (۶-۲۵م)، باشد. پوسته کروی از جنس یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی $\mu_r \gg 1$ است. اگر این حفاظ در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0 \hat{a}_z$ قرار گیرد، نشان دهید که میدان در درون آن عبارت است از:

$$B^i = \frac{9\mu_r B_0}{(\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2(\mu_r - 1)(a/b)^\gamma} \quad r < a$$

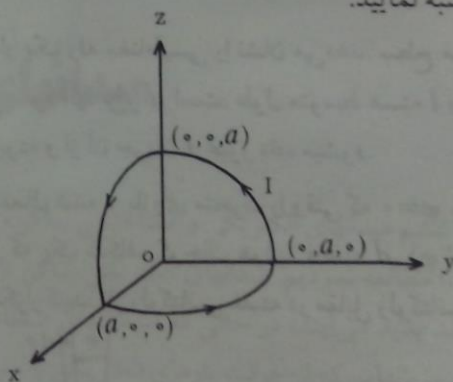
۶-۲۶ نشان دهید که اگر یک حلقه جریان دلخواه با گشتاور مغناطیسی \vec{m} در میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} قرار گیرد، گشتاور مکانیکی اعمال شده بر آن از رابطه $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$ بدست می آید و این



شکل (م-۶-۲۵)

گشتاور سعی در هم جهت نمودن \vec{m} با میدان دارد.

۲۷-۶ یک حلقه جریان از سه قوس 90° درجه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع a و واقع در صفحات xy ، yz و zx مطابق شکل (م-۶-۲۷)، تشکیل شده است. از این حلقه، جریان I عبور داده شده و در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0 \hat{a}_x$ قرار داده میشود. گشتاور مکانیکی اعمال شده بر این حلقه جریان را محاسبه نمایید.

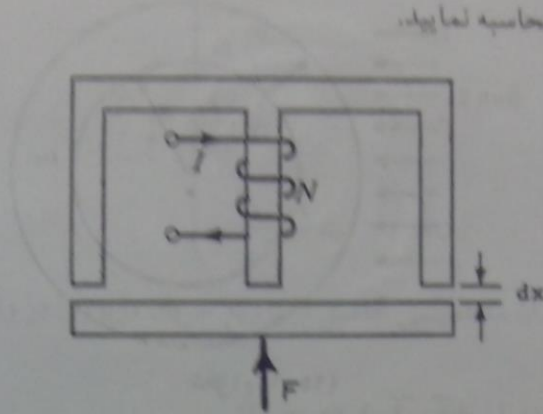


شکل (م-۶-۲۷)

۲۸-۶ کابل هم محوری از دو استوانه هادی به شعاعهای a و b ($b > a$) تشکیل شده و حامل جریان I در امتداد محور کابل میباشد. فشار مغناطیسی وارد آمده بر هادی بیرونی را بدست آورید. فضای بین دو استوانه را هوا اشغال می‌کند.

۲۹-۶ شکل (م-۶-۲۹) مدار یک جراثقال مغناطیسی را نشان می‌دهد. سطح مقطع مدار همه جا یکسان و برابر S می‌باشد. سیم پیچ جریان میدان مغناطیسی \vec{B} را در مدار بوجود می‌آورد. نیروی

اعمال شده را بر وزنه محاسبه نمایید.

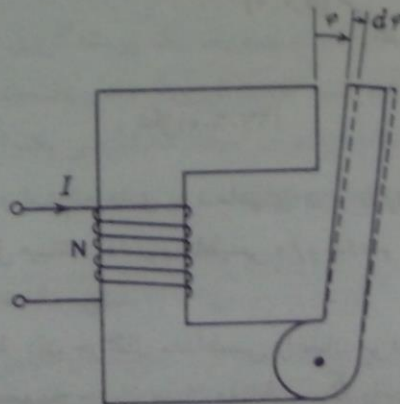


شکل (م-۶-۲۹)

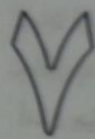
۳۰-۶ در مسأله (۶-۲۹) فرض کنید یک فاصله هوایی به اندازه یک میلیمتر بین وزنه و هسته وجود دارد. این فاصله هوایی بدلیل کاملاً مسطح نبودن وزنه و قطبهای هسته در نظر گرفته میشود. در صورتی که $I=5\text{ A}$ ، $N=1000$ ، و $S=200\text{ cm}^2$ باشد و از رلوکتانس هسته در مقابل رلوکتانس فواصل هوایی صرفنظر شود، حداکثر جرمی را که جراثقال میتواند بلند کند بدست آورید.

۳۱-۶ شکل (م-۶-۳۱) مدار یک رله مغناطیسی را نشان می دهد. سطح مقطع بازوی متحرک و هسته هر دو برابر S و قابلیت نفوذ آنها برابر μ است. طول متوسط هسته l و طول بازو l' میباشد. سیم پیچ هسته دارای N دور بوده و از آن جریان I عبور داده میشود.

الف) گشتاور مکانیکی اعمال شده بر بازوی متحرک را وقتی که $\varphi=0$ باشد بدست آورید.
 ب) مسأله را برای وقتی که یک شکاف کوچک هوا به فاصله d ($d \ll l' \varphi$) بین انتهای آزاد بازوی متحرک و هسته باشد تکرار کنید. (از رلوکتانس هسته در مقابل رلوکتانس هوا صرفنظر کنید.)



شکل (م-۶-۳۱)



میدانهای متغیر با زمان

در فصلهای دوم تا ششم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن، یعنی میدانهایی که نسبت به زمان تغییراتی ندارند، را مطالعه نمودیم. میدانهای الکتریکی ساکن از بارهای الکتریکی که توزیع آنها تابعی از زمان نباشد پدید می‌آیند، در حالی که میدانهای مغناطیسی ساکن از جریانهای الکتریکی ثابت، یعنی جریانهایی که از حرکت بارهای الکتریکی با سرعت یکنواخت ناشی شوند، بوجود می‌آیند. کلیه مطالعات مربوط به میدانهای ساکن بر دو قانون تجربی کولمب و آمپر، برتریب برای میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، استوار می‌باشند. اگر مولدهای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی خود تابعی از زمان باشند (و این بدان مفهوم است که بارهای الکتریکی دارای حرکت توأم باشند) میدانهای پدید آمده از آنها نیز طبیعتاً تابعی از زمان خواهند بود. مطالعه قوانین حاکم بر میدانهای متغیر با زمان و بررسی ویژگیهای کلی و رفتار عمومی این میدانها، هدف اصلی ما را در این فصل تشکیل می‌دهد. قوانین میدانهای متغیر با زمان، که عموماً از آنها بعنوان معادلات ماکسول نام برده میشود، را میتوان شکل تکامل یافته قوانین میدانهای ساکن قلمداد کرد. این تکامل

بر اساس قانون تجربی فاراده^۱ و یک استنباط ریاضی توسط ماکسول استوار می‌باشد. از اهم وجوه تمایز میدانهای ساکن و میدانهای متغیر با زمان این است که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن مستقل از یکدیگرند، در حالی که وابستگی متقابل و وجود همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان اجتناب‌ناپذیر است. از اینرو میدانهای متغیر با زمان را میدانهای الکترومغناطیس می‌نامند تا وجود توأم آنها تفهیم گردد. معادلات ماکسول از جمله مهمترین قوانین بنیادی فیزیک بشمار می‌روند و قادر به تشریح کلیه پدیده‌های الکترومغناطیس در طیف وسیعی شامل فرکانس صفر (DC) تا بالاترین فرکانس موجود مانند اشعه ایکس می‌باشند.

۱-۷) قانون فاراده

فاراده طی آزمایشهایی نشان داد که اگر یک حلقه سیم فلزی در یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان قرار گیرد در آن جریان الکتریکی پدید خواهد آمد. لیکن وجود جریان الکتریکی در یک سیم هادی به منزله وجود میدان الکتریکی در آن میباشد. بنابراین، آزمایشهای فاراده در حقیقت پدید آمدن میدان الکتریکی توسط میدان مغناطیسی متغیر با زمان را محقق می‌سازد. بیان دقیق قانون فاراده بدین عبارت است که یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان تولید نیروی محرکه الکتریکی^۲ روی یک مسیر بسته می‌نماید، بطوری که این نیروی محرکه مساوی منهای نرخ تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از سطحی محدود به آن مسیر بسته نسبت به زمان میباشد. به بیان ریاضی:

$$emf = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (1-7)$$

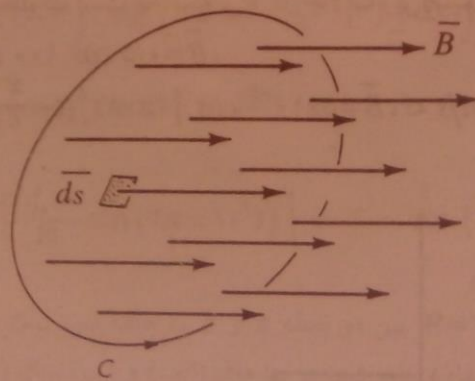
که emf نیروی محرکه الکتریکی و Ψ شار مغناطیسی میباشد. برای روشن ساختن مفهوم نیروی محرکه الکتریکی، میدان مغناطیسی متغیر با زمان \vec{B} و مسیر بسته C را در نظر می‌گیریم. فرض میشود که میدان الکتریکی ناشی از این میدان مغناطیسی با \vec{E} نشان داده شود. بر حسب تعریف، نیروی محرکه الکتریکی روی مسیر بسته C برابر است با $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ که همان سیرکولاسیون میدان \vec{E} حول مسیر بسته C میباشد. از طرف دیگر، شار مغناطیسی گذرنده از سطح S که محدود به منحنی بسته C باشد مساوی $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ است. لذا رابطه (۱-۷) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2-7)$$

این رابطه شکل انتگرالی قانون فاراده را بیان میکند. در این رابطه $d\vec{l}$ بردار عنصر طول در امتداد

منحنی C و بردار عنصر سطح روی سطح S و در امتداد عمود بر آن است. جهات بردارهای $d\vec{l}$ و $d\vec{s}$ مستقل از یکدیگر نیستند و از قاعده پیچ راستگرد پیروی می‌کنند، یعنی اگر پیچ راستگردی در امتداد عمود بر ds و در جهتی هماهنگ با جهت انتخاب شده برای مسیر بسته C بچرخد، پیشروی پیچ جهت بردار $d\vec{s}$ را نشان می‌دهد. اگر در امتداد مسیر بسته C یک سیم هادی با شکاف کوچکی قرار بگیرد، نیروی محرکه الکتریکی به مثابه ظاهر شدن ولتاژی به اندازه $d\Psi/dt$ در شکاف خواهد بود. در صورتی که سیم تشکیل یک مدار بسته با مقاومت کل R را بدهد، آنگاه در آن جریانی به اندازه $(d\Psi/dt)/R$ پدید خواهد آمد. ولی باید توجه شود که پیدایش نیروی محرکه مستلزم وجود سیم هادی در امتداد مسیر C نیست و مفهوم نیروی محرکه را نباید لزوماً مترادف با ایجاد ولتاژ یا جریان در یک مدار دانست.

وجود علامت منفی در سمت راست روابط (۱-۷) و (۲-۷) بسیار حائز اهمیت است و در حقیقت بیانگر اصل بقای انرژی است. این علامت نشان می‌دهد که نیروی محرکه بوجود آمده توسط یک شار مغناطیسی با تغییرات شار نسبت به زمان مخالفت می‌کند. این واقعیت تحت نام قانون لنز^۱ شناخته می‌شود. برای روشن ساختن قانون لنز و اینکه چگونه بیانگر اصل بقای انرژی است، سطح S محدود به منحنی بسته C را در میدان مغناطیسی متغیر با زمان \vec{B} ، مطابق شکل (۱-۷)، در نظر می‌گیریم. جهت سهولت سطح S را مسطح و میدان \vec{B} را یکنواخت فرض می‌کنیم، در نتیجه شار گذرنده از S برابر با BS خواهد بود. اگر میدان \vec{B} با زمان افزایش پیدا کند، شار $\Psi = BS$ نیز به همان نحو با زمان افزایش یافته و $d\Psi/dt$ مثبت خواهد بود. لذا بر اساس رابطه (۲-۷)، نیروی محرکه ایجاد شده در امتداد مسیر C ، یعنی $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ، منفی خواهد بود. این بدان معنی است که اگر



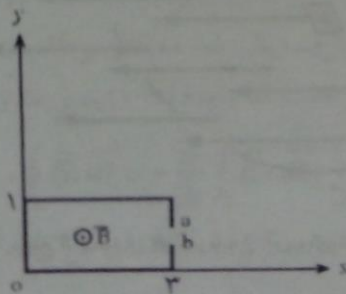
شکل (۱-۷) سطح S و میدان \vec{B} گذرنده از آن برای تشریح قانون لنز

مسیر C با یک رشته سیم اشغال شود، جریانی در خلاف جهت انتخاب شده روی مسیر C در آن بوجود خواهد آمد. این جریان به نوبه خود تولید میدان مغناطیسی جدیدی می‌کند که در خلاف جهت \vec{ds} و بنابراین در خلاف جهت میدان \vec{B} بوده و با افزایش آن مخالفت میکند. بالعکس، اگر میدان \vec{B} با زمان کاهش یابد، شار مغناطیسی گذرنده از سطح S نیز با زمان کاهش یافته و $d\Psi/dt$ منفی خواهد بود. آنگاه، نیروی محرکه ایجاد شده مثبت، جریان ایجاد شده در سیم در جهت انتخاب شده برای مسیر C و سرانجام میدان مغناطیسی حاصل از این جریان هم‌جهت با \vec{ds} و بنابراین هم‌جهت با میدان \vec{B} خواهد بود (در اینجا \vec{ds} و \vec{B} هم‌جهت فرض شده‌اند ولی اگر چنین هم نباشد نتیجه‌گیری ما همچنان به قوت خود باقی است (چرا؟!)). هم‌جهتی میدان جدید با میدان در حال کاهش \vec{B} بدین معنی است که میدان جدید با کاهش میدان \vec{B} مخالفت می‌کند. حال تصور کنید که علامت منفی در روابط (۱-۷) و (۲-۷) وجود نمی‌داشت. در آن صورت نتیجه‌گیریهای فوق باید برعکس شوند. مثلاً وقتی میدان \vec{B} با زمان افزایش می‌یابد، میدان جدید به گونه‌ای خواهد بود که این افزایش را تقویت کند و منجر به میدان کل قویتر از میدان \vec{B} شود. اما این میدان کل قویتر به نوبه خود میدان جدید قویتری را بوجود می‌آورد و در نهایت میدان \vec{B} بطور نامحدود افزایش می‌یابد. ولی وقوع افزایشهای پی‌درپی میدان و نامحدود شدن آن مستلزم انرژی نامحدودی می‌باشد که ناقض اصل بقای انرژی است. پس وجود علامت منفی در روابط (۱-۷) و (۲-۷) بسیار مهم و اجتناب‌ناپذیر است.

مثال (۱-۷) یک حلقه سیم مستطیلی شکل به اضلاع ۱ و ۳ متر، مطابق شکل (۲-۷)، در میدان مغناطیسی متغیر با زمان \vec{B} قرار داده می‌شود. شکاف کوچک ab در یکی از اضلاع حلقه مطابق شکل ایجاد می‌شود. مطلوب است محاسبه V_{ab} در حالات زیر (سیم را هادی کامل فرض کنید):

$$\text{الف) } \vec{B} = 0.5 \cos 100 \pi t \hat{a}_z \text{ T}$$

$$\text{ب) } \vec{B} = 5 \times 10^{-6} \cos \left[3\pi \times 10^8 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \hat{a}_z \text{ T} \text{ که } c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \text{ میباشد.}$$



شکل (۲-۷) حلقه مستطیلی شکل از جنس هادی در میدان مغناطیسی \vec{B}

حل:

مسیر بسته C را منطبق بر محیط حلقه مستطیلی شکل در نظر می‌گیریم. با انتخاب جهتی در خلاف گردش عقربه‌های ساعت برای مسیر بسته C و توجه به این نکته که میدان الکتریکی در درون سیم، که از جنس هادی کامل فرض میشود، صفر است، داریم:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{مسیر سیم}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{ba} = -V_{ab}$$

اما از طرف دیگر، بر اساس رابطه (۷-۲)، میتوان نوشت:

$$-V_{ab} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

یا:

$$V_{ab} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

(الف)

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (0.5 \cos 100\pi t \hat{a}_z) \cdot (dx dy \hat{a}_z)$$

$$= 0.5 \cos 100\pi t \int_0^1 dx \int_0^1 dy = 0.5 \cos 100\pi t \text{ Wb}$$

$$V_{ab} = \frac{d}{dt} (0.5 \cos 100\pi t) = -100\pi \sin 100\pi t \text{ V}$$

(ب)

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 5 \times 10^{-6} \int_0^1 \cos \left[3\pi \times 10^4 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] dx \int_0^1 dy$$

$$= \frac{10^{-5}}{\pi} \sin (3\pi \times 10^4 t) \text{ Wb}$$

پس:

$$V_{ab} = \frac{d}{dt} \left[\frac{10^{-5}}{\pi} \sin (3\pi \times 10^4 t) \right] = 3000 \cos (3\pi \times 10^4 t) \text{ V}$$

□

مثال (۷-۲) مقاومت $R=200 \Omega$ بین دو نقطه a و b به حلقه سیم شکل (۷-۲) وصل میشود. میدان مغناطیسی \vec{B} همان مقادیر داده شده در بندهای (الف) و (ب) مثال (۷-۱) را دارا می‌باشد. مطلوب است محاسبه جریان $i(t)$ (جهت آن را از b به سمت a فرض کنید) که در مدار متشکل از

همانطور که در قسمت (۷-۴) خواهیم دید میدان الکتریکی، اعم از ساکن یا متغیر با زمان در درون اجسام هادی کامل

مقاومت R و سیم هادی بوجود می‌آید.

حل:

با استفاده از رابطه ولتاژ-جریان مقاومت R میتوان نوشت:

$$V_{ba} = i(t)R = -V_{ab}$$

لذا:

$$i(t) = -V_{ab}/R$$

(الف)

$$i(t) = -(-150\pi \sin 100\pi t) / 200 = 0.75\pi \sin 100\pi t \text{ A}$$

(ب)

$$i(t) = -[3000 \cos(3\pi \times 10^6 t)] / 200 = -15 \cos(3\pi \times 10^6 t) \text{ A}$$

□

۲-۷ نیروهای محرکه ترانسفورماتوری و حرکتی

همانطور که از رابطه (۱-۷) برمی‌آید، ایجاد نیروی محرکه الکتریکی مستلزم شار مغناطیسی متغیر با زمان میباشد. از طرف دیگر، شار مغناطیسی Ψ هم تابعی از میدان \vec{B} و هم تابعی از سطح S است. اگر S ساکن بوده و تغییراتی نسبت به زمان نداشته باشد، رابطه (۲-۷) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (3-7)$$

این حالت نیروی محرکه ایجاد شده را از نوع ترانسفورماتوری یا تبدیلی می‌نامند. در بدست آوردن رابطه (۳-۷)، در حقیقت ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری در سمت راست رابطه (۲-۷) عوض شده است. تأکید میشود که مشتق‌گیری نسبت به زمان انجام میشود، در حالی که انتگرال‌گیری نسبت به مساحت انجام می‌گیرد. از آنجا که میدان مغناطیسی \vec{B} در حالت کلی تابعی از زمان و مکان است، یعنی $\vec{B} = \vec{B}(t, \vec{r})$ ، مشتق \vec{B} نسبت به زمان بایستی به شکل پاره‌ای بیان شود. ولی در روابط (۱-۷) و (۲-۷)، چون $\Psi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$ فقط تابعی از زمان است، مشتق‌گیری نسبت به زمان بصورت d/dt نوشته می‌شود.

تغییرات شار مغناطیسی نسبت به زمان ممکن است توسط یک میدان مغناطیسی ساکن که از سطحی متغیر با زمان، یعنی یک سطح متحرک، عبور کنند نیز بوجود آید. در این حالت نیروی محرکه ایجاد شده را از نوع حرکتی نامند. برای تعیین نیروی محرکه حرکتی، فرض میشود بار q با سرعت \vec{v} در میدان مغناطیسی \vec{B} حرکت کند. طبق قانون نیروی لورنتز در رابطه (۵-۱۴)، نیروی

اعمال شده بر بار q برابر $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ است. لیکن، از دید ناظری که با سرعت \vec{v} همراه با بار q حرکت می‌کند، هیچ‌گونه حرکتی احساس نمی‌شود. بنابراین نیروی مزبور به ازای واحد بار، یعنی $\vec{F}/q = \vec{v} \times \vec{B}$ ، را میتوان به منزله یک میدان الکتریکی القایی تلقی کرد و آنگاه رابطه (۴-۷) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (4-7)$$

نتیجه مزبور را وقتی که مسأله در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌گیرد مجدداً بدست خواهیم آورد. در حالت کلی وقتی که \vec{B} و S هر دو تابعی از زمان باشند، میتوان نشان داد که:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} - \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (5-7)$$

با استفاده از رابطه (۵-۷) در رابطه (۴-۷)، نیروی محرکه الکتریکی در حالت کلی از رابطه زیر بدست می‌آید:

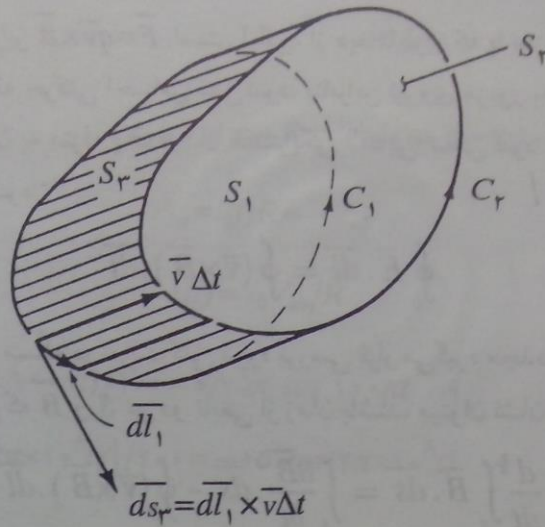
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (6-7)$$

باید توجه شود که در روابط (۴-۷) و (۶-۷)، عبارت \vec{E} عبارت است از میدان الکتریکی اندازه‌گیری شده توسط ناظری که با سرعت \vec{v} نسبت به میدان \vec{B} حرکت میکند. رابطه (۶-۷) بوضوح نشان می‌دهد که نیروی محرکه الکتریکی کل مساوی مجموع نیروهای محرکه تراسفورماتوری و حرکتی است. برای اثبات رابطه (۵-۷) از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم. دو لحظه زمانی $t_1 = t + \Delta t$ و $t_2 = t$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم در لحظه t_1 ، $\vec{B} = \vec{B}_1$ ، $S = S_1$ و $C = C_1$ و در لحظه t_2 ، $\vec{B} = \vec{B}_2$ ، $S = S_2$ و $C = C_2$ باشد. شکل (۳-۷) سطوح S_1 و S_2 و منحنی‌های بسته C_1 و C_2 را نشان می‌دهد. بر اساس تعریف مشتق یک تابع میتوان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_2 - \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1 \right] / \Delta t \quad (7-7)$$

سطح S_2 که از حرکت منحنی بسته C_1 در فاصله زمانی Δt حاصل میشود توأم با سطوح S_1 و S_2 تشکیل حجم V را می‌دهند. با بکار بردن قضیه دیورژانس در لحظه t_2 برای میدان \vec{B}_2 در حجم V ، میتوان نوشت:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}_2 \cdot d\vec{v} = \oint_{S_1 + S_2 + S_3} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = - \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \int_{S_3} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_3 \quad (8-7)$$



شکل (۳-۷) سطوح S_1 و S_2 و منحنیهای C_1 و C_2 در دو لحظه متوالی برای اثبات رابطه (۵-۷)

وجود علامت منفی در جلوی انتگرال اول در سمت راست رابطه (۸-۷) به این دلیل است که بردار \vec{ds}_1 ، با توجه به جهت در نظر گرفته شده برای C_1 ، به سمت درون حجم V می باشد. از آنجاکه $\nabla \cdot \vec{B}_\gamma = 0$ است، رابطه (۸-۷) بصورت زیر خلاصه میشود:

$$\int_{S_2} \vec{B}_\gamma \cdot \vec{ds}_2 - \int_{S_1} \vec{B}_\gamma \cdot \vec{ds}_1 = - \int_{S_2} \vec{B}_\gamma \cdot \vec{ds}_2 \quad (9-7)$$

اگر عنصر طول dl_1 روی منحنی C_1 با سرعت \vec{v}_1 حرکت کند، عنصر سطح ایجاد شده از این حرکت پس از گذشت زمان Δt ، همانطور که در شکل (۳-۷) نشان داده شده است، برابر با $\vec{ds}_2 = \vec{dl}_1 \times \vec{v}\Delta t$ است. آنگاه:

$$\int_{S_2} \vec{B}_\gamma \cdot \vec{ds}_2 = \oint_{C_1} \vec{B}_\gamma \cdot (\vec{dl}_1 \times \vec{v}_1) \Delta t \quad (10-7)$$

برای محاسبه سمت راست رابطه (۷-۷) لازم است که \vec{B}_γ در رابطه (۱۰-۷) و نیز در انتگرال روی S_1 در رابطه (۹-۷) بر حسب \vec{B}_1 بیان شود. برای این منظور، با استفاده از بسط سری تیلور، \vec{B}_γ را بر حسب \vec{B}_1 بصورت زیر بیان می کنیم:

$$\vec{B}_\gamma = \vec{B}_1 + \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]_{t=t_1} \Delta t + \text{جملات از درجات بالاتر} \quad (11-7)$$

وقتی که Δt بسیار کوچک باشد و در حد به سمت صفر میل کند، میتوان از جملات با درجات بالاتر حاوی $(\Delta t)^2$ ، $(\Delta t)^3$ و ... صرف نظر کرد. اکنون با استفاده از رابطه (۱۱-۷) میتوان نوشت:

$$\int_{s_1} \bar{B}_T \cdot \bar{ds}_1 = \int_{s_1} \bar{B}_1 \cdot \bar{ds}_1 + \Delta t \int_{s_1} \left[\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right]_{t=t_1} \cdot \bar{ds}_1 \quad (12-7)$$

$$\oint_{C_1} \bar{B}_T \cdot (d\bar{l}_1 \times \bar{v}_1) \Delta t = \Delta t \oint_{C_1} \bar{B}_1 \cdot (d\bar{l}_1 \times \bar{v}_1) + (\Delta t)^2 \text{ جمله‌ای شامل} \quad (13-7)$$

در رابطه (۱۳-۷) از جمله شامل $(\Delta t)^2$ صرفنظر می‌شود. حال با استفاده از روابط (۷-۱۰)، (۱۲-۷) و (۱۳-۷) در رابطه (۷-۹)، داریم:

$$\int_{s_2} \bar{B}_T \cdot \bar{ds}_T - \int_{s_1} \bar{B}_1 \cdot \bar{ds}_1 = \Delta t \int_{s_1} \left[\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right]_{t=t_1} \cdot \bar{ds}_1 - \Delta t \oint_{C_1} \bar{B}_1 \cdot (d\bar{l}_1 \times \bar{v}_1) \quad (14-7)$$

با استفاده از نتیجه بدست آمده در رابطه (۱۴-۷)، مشتق مورد نظر در رابطه (۷-۷) عبارت میشود از (پس از حذف اندیس ۱):

$$\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \bar{ds} = \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \bar{ds} - \oint_C \bar{B} \cdot (d\bar{l} \times \bar{v}) \quad (15-7)$$

سرانجام، استفاده از تساوی $\bar{B} \cdot (d\bar{l} \times \bar{v}) = (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$ در رابطه (۱۵-۷) صحت رابطه (۵-۷) را محقق می‌سازد.

اگر \bar{B} نسبت به زمان تغییراتی نداشته باشد، $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$ شده و رابطه (۷-۶) به رابطه (۷-۴) ساده می‌شود. همچنین اگر سطح S و مسیر C ساکن باشند، $\bar{v} = 0$ شده و از رابطه (۷-۶) رابطه (۷-۳) نتیجه می‌گردد.

مثال (۷-۳) یک میله فلزی روی دو ریل موازی و به فاصله l از یکدیگر با سرعت $\bar{v} = v_x \hat{a}_x$ حرکت میکند. میدان مغناطیسی ساکن $\bar{B} = B_z \hat{a}_z$ ، مطابق شکل (۷-۴)، از صفحه ریلها عبور داده میشود. فزانت ولت‌متر را در شکل مذکور تعیین نمایید. میله و ریلها هادی کامل فرض میشوند. مثال را به دو روش با استفاده از روابط زیر حل کنید:

الف) رابطه (۷-۱)،

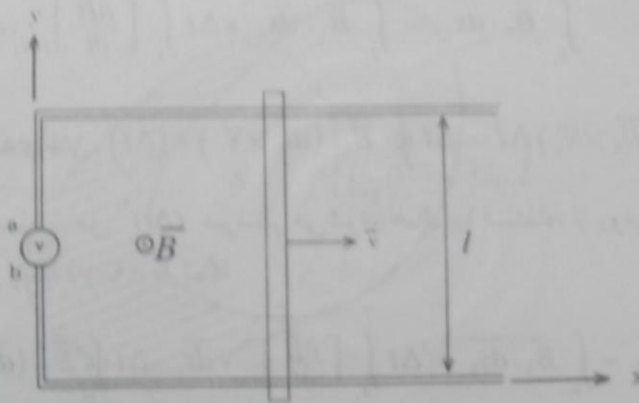
ب) رابطه (۷-۴).

حل:

الف) شار مغناطیسی گذرنده از سطح S ، محدود به میله، ریلها و محور y ، عبارت است از:

$$\Psi = \int_S \bar{B} \cdot \bar{ds} = \int_S (B_z \hat{a}_z) \cdot (dx dy \hat{a}_z) = B_z \int_0^l dy \int_0^x dx = B_z l x$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = B_z l \frac{dx}{dt} = B_z l v_x$$



شکل (۴-۷) میله لغزنده روی دو ریل موازی در میدان مغناطیسی \vec{B}

با جایگزین نمودن نتیجه مزبور در رابطه (۱-۷)، داریم:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{ab} = -\frac{d\Psi}{dt} = -B \cdot l v.$$

(ب) با بکار بردن رابطه (۳-۷)، میتوان نوشت:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{ab} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

اما با توجه به اینکه فقط آن قسمت از مسیر C که شامل میله لغزنده است دارای حرکت است، داریم:

$$V_{ab} = \int_{-l}^l (\vec{v} \cdot \hat{a}_x \times B_z \hat{a}_z) \cdot (dy \hat{a}_y) = -v B_z \int_{-l}^l dy = -v B_z l$$

□

مثال (۴-۷) اگر در مثال (۳-۷) $\vec{B} = B_z \cos \omega t \hat{a}_z$ باشد، مجدداً ولتاژ V_{ab} را از دو روش بدست

آورید.

حل:

(الف)

$$\Psi = \int_S (B_z \cos \omega t \hat{a}_z) \cdot (dx dy \hat{a}_z) = B_z l x \cos \omega t$$

$$V_{ab} = -\frac{d\Psi}{dt} = -B_z l (dx/dt) \cos \omega t + B_z l \omega x \sin \omega t$$

با فرض آنکه $x = x_0 + v t$ ، که x_0 موقعیت میله را در $t = 0$ بیان میکند، عبارت V_{ab} میشود از:

$$V_{ab} = -B_0 l v_0 \cos \omega_0 t + B_0 \omega_0 l (x_0 + v_0 t) \sin \omega_0 t$$

ب) محاسبه V_{ab} را میتوان با استفاده از رابطه (۵-۷) نیز انجام داد. به سهولت میتوان نشان داد که:

$$\oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -B_0 v_0 l \cos \omega_0 t$$

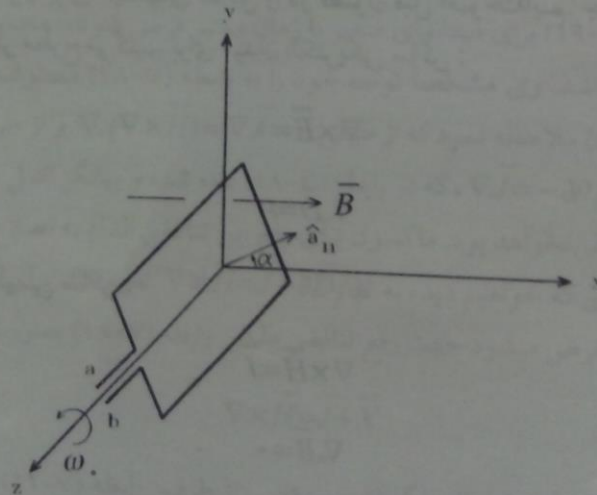
و:

$$\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = -B_0 \omega_0 l x \sin \omega_0 t$$

با استفاده از نتایج مزبور در رابطه (۵-۷) و توجه به اینکه $x = x_0 + v_0 t$ است، جواب بدست آمده برای V_{ab} در بند (الف) مجدداً حاصل میشود.

□

مثال (۵-۷) اصول کار مولدهای برق متناوب بر قانون فاراده مبتنی است. به منظور آشنایی با چگونگی کار این گونه مولدها، مثال ساده یک حلقه سیم مستطیلی شکل که در میدان مغناطیسی ساکن $\vec{B} = B_0 \hat{a}_x$ حول محور z با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد، مطابق شکل (۵-۷)، را در نظر بگیرید و ولتاژ القا شده بین دو انتهای سیم را محاسبه نمایید.



شکل (۵-۷) یک حلقه سیم مستطیلی شکل در حال چرخش حول محور z در معرض یک میدان مغناطیسی ساکن برای نشان دادن اصول کار مولدهای برق متناوب

حل:

شار مغناطیسی گذرنده از سطح حلقه عبارت است از:

$$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = (B, \hat{a}_x) \cdot (S \hat{a}_n) = B, S \cos \alpha$$

که S مساحت حلقه و α زاویه بین بردار واحد عمود بر سطح حلقه (\hat{a}_n) و \hat{a}_x میباشد. بدیهی است که زاویه α با گذشت زمان افزایش می یابد و مقدار آن در لحظه t از رابطه $\alpha = \omega t$ بدست می آید. در اینجا فرض شده است که در لحظه $t=0$ ، $\alpha=0$ بوده است. بنابراین:

$$\Psi = B, S \cos \omega t$$

و:

$$\oint_{\text{محیط حلقه}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{ab} = - \frac{d\Psi}{dt} = B, \omega, S \sin \omega t$$

در صورتی که بجای یک حلقه، سیم پیچی متشکل از N حلقه مساوی داشته باشیم، ولتاژ حاصله N برابر خواهد بود.

□

۳-۷ معادلات ماکسول

معادلات ماکسول برای میدانهای ساکن را در فصول قبل آموخته ایم. جهت یادآوری، این معادلات را بار دیگر مطرح می کنیم. برای میدان الکتریکی ساکن:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (16-7)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (17-7)$$

و برای میدان مغناطیسی ساکن:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (18-7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (19-7)$$

قبلاً اشاره کردیم که معادلات ماکسول برای میدانهای متغیر با زمان را میتوان تعمیمی از معادلات میدانهای ساکن تلقی کرد. تکامل معادلات ماکسول از حالت میدانهای ساکن به میدانهای متغیر با زمان بر اساس قانون فاراده و یک بررسی ریاضی توسط ماکسول استوار می باشد. برای سطح ساکن S محدود به منحنی بسته C ، قانون فاراده بصورت رابطه (۳-۷) نوشته می شود. با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ را به یک انتگرال سطح تبدیل می کنیم، آنگاه:

$$\oint_c \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_s (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{s} = \int_s -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} \quad (20-7)$$

برای آنکه رابطه (۲۰-۷) برای هر سطح دلخواه S صادق باشد، لازم است که عبارات زیر دو انتگرال سطح مساوی باشند. لذا:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (21-7)$$

رابطه (۲۱-۷) یکی از معادلات ماکسول برای میدانهای متغیر با زمان بوده و بعنوان شکل نقطه‌ای قانون فاراده نیز شناخته میشود. روشن است که اگر میدان \bar{B} تغییراتی نسبت به زمان نداشته باشد، رابطه (۲۱-۷) به رابطه (۱۶-۷) ساده می‌شود و بعبارت دیگر رابطه (۲۱-۷) را میتوان شکل تکامل یافته رابطه (۱۶-۷) قلمداد کرد.

حال باید دید که بقیه معادلات میدانهای ساکن، یعنی روابط (۱۷-۷) تا (۱۹-۷)، چگونه برای میدانهای متغیر با زمان تحول پیدا می‌کنند. آیا این روابط در شکل موجود خود برای میدانهای متغیر با زمان صادقند؟ در زمانی که این سؤال برای ماکسول مطرح بود هیچ قانون تجربی دیگری علاوه بر قوانین نیروی کولمب و آمپر و قانون فاراده وجود نداشت که بتوان از آن استمداد جست. لذا، ماکسول صرفاً با یک بررسی ریاضی مبادرت به یافتن پاسخ نمود. ماکسول استدلال نمود که اگر روابط (۱۷-۷) تا (۱۹-۷) برای میدانهای متغیر با زمان معتبر فرض شوند، مجموعه معادلات باید مجموعه‌ای سازگار باشد. وی مشخصاً توجه خود را به رابطه (۱۸-۷) معطوف نمود و با گرفتن دیورژانس از طرفین آن ملاحظه نمود که از طرفی $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} = 0$ و از طرف دیگر بر اساس معادله پیوستگی $\nabla \cdot \bar{J} = -\partial \rho / \partial t$ ، که در رابطه (۱۸-۳) داده شده و بیانگر اصل بقای بار الکتریکی است، $\nabla \cdot \bar{J}$ لزوماً صفر نخواهد بود. ماکسول برای رفع این تناقض اقدام به اصلاح رابطه $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ نموده و آن را، بطوری که خواهیم دید، به $\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \partial \bar{D} / \partial t$ تغییر داد. برای آنکه چگونگی این اصلاح روشن شود، فرض میشود جهت رفع تناقض مذکور رابطه (۱۸-۷) بصورت زیر نوشته شود:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \bar{X} \quad (22-7)$$

که \bar{X} برداری مجهول است. حال با گرفتن دیورژانس از طرفین رابطه (۲۲-۷) و استفاده از رابطه پیوستگی، میتوان نوشت:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} + \nabla \cdot \bar{X} = 0$$

و:

$$\nabla \cdot \bar{X} = -\nabla \cdot \bar{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (23-7)$$

اکنون با فرض آنکه رابطه $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$ برای میدانهای متغیر با زمان معتبر است، رابطه (۷-۲۳) بصورت زیر نوشته میشود:

$$\nabla \cdot \bar{X} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \quad (۷-۲۴)$$

ساده‌ترین جواب این معادله عبارت از $\bar{X} = \partial \bar{D} / \partial t$ میباشد. با جایگزین نمودن \bar{X} در رابطه (۷-۲۲)، داریم:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (۷-۲۵)$$

تأکید میشود که رابطه (۷-۲۵) از سایر روابط موجود استخراج نشده است، بلکه بگونه‌ای نوشته شده است که با سایر روابط تناقضی نداشته باشد.

رابطه (۷-۲۵)، رابطه مهم دیگری برای میدانهای متغیر با زمان میباشد. این رابطه که اولین بار توسط ماکسول بیان گردید نه بر اساس یک تجربه فیزیکی بلکه بر اساس یک استنباط ریاضی به آن پی برده شد. این یکی از موارد معدودی است که یک نتیجه‌گیری ریاضی بر تجربه آزمایشگاهی تقدم پیدا کرده است. در اغلب موارد، بشر ابتدا به یک پدیده فیزیکی از طریق تجربه پی برده و سپس قوانین حاکم بر آن را به شکل ریاضی بیان کرده است. لیکن در مورد بالا، یک کار ریاضی محض از وجود پدیده‌ای (امواج الکترومغناطیس) خبر می‌داد که هنوز برای بشر شناخته نشده بود. خود ماکسول این پدیده را پیش‌بینی کرد و نتیجه گرفت که امواج الکترومغناطیس در خلاء با سرعت $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ حرکت می‌کنند. این سرعت به سرعت نور که در آن زمان اندازه‌گیری شده بود بسیار نزدیک بود و ماکسول اولین کسی بود که ادعا کرد نور از جنس امواج الکترومغناطیس است. صحت رابطه (۷-۲۵) بعد از زمان ماکسول بطور تجربی تحقیق گردید و لذا در اعتبار آن هیچ گونه خللی نیست.

بطور خلاصه، مجموعه سازگاری از روابط حاکم بر رفتار میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان در اختیار داریم که به نام معادلات ماکسول شناخته می‌شوند. این روابط عبارتند از:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (۷-۲۶\text{-الف})$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (۷-۲۶\text{-ب})$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (۷-۲۶\text{-ج})$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (۷-۲۶\text{-د})$$

به چهار معادله فوق، میتوان معادله پیوستگی را نیز اضافه کرد:

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\partial \rho / \partial t \quad (۷-۲۶-۵)$$

پدیدهی است که در صورت نبودن تغییرات نسبت به زمان، $\partial / \partial t = 0$ بوده و روابط (۷-۲۶-الف تا ۵) به روابط میدانهای ساکن ساده می‌شوند. حال به بررسی دقیقتر این روابط و مقایسه میدانهای ساکن و متغیر با زمان می‌پردازیم.

روابط (۷-۲۶-الف تا ۵) حاوی چند نکته مهم می‌باشند. اول آنکه، بر خلاف میدان الکتریکی ساکن، میدان الکتریکی متغیر با زمان یک میدان پایستار نیست. زیرا، همانطور که رابطه (۷-۲۶-الف) نشان می‌دهد، $\nabla \times \bar{E}$ و بطور معادل $\oint_c \bar{E} \cdot d\bar{l} \neq 0$ صفر نیستند. بنابراین، حرکت بار الکتریکی روی یک مسیر بسته در میدان الکتریکی متغیر با زمان مستلزم صرف انرژی است. این نتیجه همچنین تفهیم می‌کند که میدان الکتریکی متغیر با زمان را نمی‌توان بصورت گرادیان یک تابع پتانسیل اسکالر بیان کرد. در حقیقت، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در میدان الکتریکی متغیر با زمان، به معنای دقیق کلمه، یک کمیت تک‌مقداری نیست، زیرا $V_{ab} = \int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l}$ تابعی از مسیری است که a را به b وصل می‌کند. مفهوم اختلاف پتانسیل تا وقتی که تغییرات زمانی میدان الکتریکی «کند» باشد و به بیان دیگر تا وقتی که فرکانس «پایین» باشد، بر اساس تقریب شبه ساکن که شرح مختصر آن بعداً خواهد آمد، همانند اختلاف پتانسیلی برای میدان الکتریکی ساکن مورد استفاده قرار می‌گیرد.

نکته دوم آنکه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان را میتوان مولد یکدیگر محسوب کرد. تولید میدان الکتریکی توسط میدان مغناطیسی متغیر با زمان از قانون فاراده استنباط می‌شود که به تفصیل درباره آن بحث شد. لیکن همانطور که از رابطه (۷-۲۶-ب) برمی‌آید، میدان الکتریکی متغیر با زمان نیز میتواند منشأ میدان مغناطیسی باشد. در حقیقت، به همان نحو که جریانی با چگالی \bar{J} تولید میدان مغناطیسی \bar{H} می‌کند، میدان الکتریکی متغیر با زمان با جریان معادلی به چگالی $\partial \bar{D} / \partial t$ در تولید میدان مغناطیسی \bar{H} سهیم است. این جریان معادل به نام جریان جابجایی شناخته می‌شود.

نکته سوم اینکه چون رابطه $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ برای میدانهای مغناطیسی ساکن و متغیر با زمان هر دو صادق است، ویژگی سلنوتیدی بودن میدان \bar{B} ، برای حالتی که تغییرات زمانی موجود باشند، همچنان به قوت خود باقی می‌ماند.

بالاخره، میتوان نشان داد که معادلات دیورژانس ماکسول در روابط (۷-۲۶-ج) و (۷-۲۶-د) از معادلات کرل ماکسول و معادله پیوستگی، که در روابط (۷-۲۶-الف)، (۷-۲۶-ب) و (۷-۲۶-۵)

بیان گشته‌اند، مستقل نیستند. برای بررسی این نکته ابتدا از طرفین رابطه (۷-۲۶-الف) دیورژانس می‌گیریم:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{B}) = 0 \quad (27-7)$$

از رابطه (۷-۲۷) برمی‌آید که $\nabla \cdot \bar{B}$ باید صفر یا مساوی مقدار ثابتی نسبت به زمان باشد. اما هر مقداری غیر از صفر برای $\nabla \cdot \bar{B}$ در یک نقطه از فضا به منزله وجود دائمی یک بار مغناطیسی مجرد در آن نقطه است. وجود بار مغناطیسی بطور تجربی به ثبوت نرسیده است و لذا باید $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ باشد. (اما اگر فرضاً بار مغناطیسی هم وجود می‌داشت، مقدار ثابت مذکور نمی‌تواند منشأ میدان متغیر با زمان باشد.) به همین ترتیب اگر از طرفین رابطه (۷-۲۶-ب) دیورژانس گرفته و رابطه (۷-۲۶-ا) را مورد استفاده قرار دهیم، داریم:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) = 0$$

یا:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D} - \rho) = 0 \quad (28-7)$$

آنگاه:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho + \text{مقدار ثابت نسبت به زمان} \quad (29-7)$$

اما مقدار ثابت نسبت به زمان در این رابطه باید صفر باشد، چراکه مقدار ثابت غیر صفر در یک نقطه از فضا به منزله وجود همیشگی یک بار الکتریکی ساکن در آن نقطه بجز بار الکتریکی با چگالی ρ خواهد بود. بنابراین رابطه $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$ از روابط (۷-۲۶-ب) و (۷-۲۶-ا) مستقل نیست.

در خاتمه بررسی معادلات ماکسول، بر این نکته تأکید میشود که منشأ اولیه میدانهای الکترومغناطیس بارهای الکتریکی هستند که توسط چگالیهای ρ و \bar{J} در معادلات ظاهر میشوند. بنابراین، اگر بگوییم میدان مغناطیسی متغیر با زمان تولید میدان الکتریکی می‌کند، نباید در نظر داشت که میدان مغناطیسی خود از یک جریان الکتریکی بوجود آمده است. لذا این جریان یا بار الکتریکی متحرک است که منشأ اولیه میدانها میباشد.

■ شکل انتگرالی معادلات ماکسول

روابط (۷-۲۶-الف، ب، ج و د) شکل نقطه‌ای یا دیفرانسیلی معادلات ماکسول هستند. این روابط مشتقات میدانها نسبت به زمان و مکان را دربردارند، بنابراین اگر در برخی از نقاط فضا میدانها

نایبوسته باشند (نایبوستگی میدانها در مرز دو ناحیه با خصوصیات متفاوت، مثلاً در مرز بین دو عایق یا در مرز بین یک عایق و یک هادی، روی می‌دهد) روابط نقطه‌ای مذکور مفید نخواهند بود. زیرا به دلیل نایبوستگی میدانها برخی مشتقات موجود در این روابط نامحدود میشوند. در چنین مواردی به روابط دیگری نیاز است. این روابط همان شکل انتگرالی معادلات ماکسول هستند و با یکارستن قضایای دیورژانس و استوکس، روابط (۱-۱۰۶) و (۱-۱۲۷)، از معادلات نقطه‌ای ماکسول بدست می‌آیند. روابط انتگرالی مترادف با روابط (۷-۲۶-الف تا ه) بطور خلاصه عبارتند از:

$$\oint_c \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} \quad (۷-۳۰-الف)$$

$$\oint_c \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{s} \quad (۷-۳۰-ب)$$

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_v \rho dv \quad (۷-۳۰-ج)$$

$$\oint_s \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \quad (۷-۳۰-د)$$

$$\oint_s \bar{J} \cdot d\bar{s} = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (۷-۳۰-ه)$$

در روابط (۷-۳۰-الف) و (۷-۳۰-ب)، S سطح بازی است که محدود به منحنی بسته C باشد. جهات بردارهای $d\bar{l}$ و $d\bar{s}$ در این دو رابطه از قاعده پیچ راستگرد یا قاعده معادلی به نام قاعده انگشتان دست راست پیروی می‌نمایند (اگر چهار انگشت دست راست در جهت C قرار بگیرند، انگشت شست جهت $d\bar{s}$ را نشان خواهد داد). اما، در روابط (۷-۳۰-ج تا ه)، S سطح بسته‌ای است که حجم آن V میباشد و بردار $d\bar{s}$ عمود بر S و به سمت خارج آن است. روابط (۷-۳۰-الف) تا (۷-۳۰-ه) بترتیب بیان کننده قانون فاراده، قانون مداری آمپر، قانون گوس برای میدان الکتریکی، قانون گوس برای میدان مغناطیسی و اصل بقای بار الکتریکی می‌باشند.

مثال (۷-۶) میدان الکتریکی برای یک موج الکترومغناطیس در خلاء عبارت است از:

$$\bar{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_x$$

میدان مغناطیسی \bar{H} را برای این موج محاسبه نموده و ضریب ثابت β را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{a}_y = E \beta \sin(\omega t - \beta z) \hat{a}_y \\ &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

لذا:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -(E \beta / \mu_0) \sin(\omega t - \beta z) \hat{a}_y$$

در نتیجه:

$$\bar{H} = (E_0 \beta / \mu_0 \omega) \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_y$$

برای تعیین β ، میدانهای \bar{E} و \bar{H} را در رابطه (۷-۲۶-ب) جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{H} &= -\frac{\partial H_y}{\partial z} \hat{a}_x = -(E_0 \beta^2 / \mu_0 \omega) \sin(\omega t - \beta z) \hat{a}_x \\ &= \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -E_0 \epsilon_0 \omega \sin(\omega t - \beta z) \hat{a}_x\end{aligned}$$

بلافاصله نتیجه می‌گیریم که:

$$\beta^2 / (\mu_0 \omega) = \epsilon_0 \omega$$

و:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

□

بطوری که از عبارات میدانهای \bar{E} و \bar{H} در مثال (۷-۶) برمی‌آید، این موج در امتداد محور z حرکت می‌کند. اگر جمله $\cos(\omega t - \beta z)$ بصورت $\cos[\omega(t - \frac{z}{v})]$ نوشته شود، سرعت حرکت موج برابر با:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 3 \times 10^8 \text{ متر بر ثانیه}$$

محاسبه می‌گردد. این سرعت مساوی سرعت نور در خلاء می‌باشد.

۷-۴) شرایط مرزی

برای بدست آوردن شرایط مرزی، دو ناحیه ۱ و ۲ را به ترتیب با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 ، قابلیت‌های نفوذ μ_1 و μ_2 و رسانایی‌های σ_1 و σ_2 در نظر می‌گیریم. میدانهای نواحی ۱ و ۲ را نیز به ترتیب با $\bar{E}_1, \bar{H}_1, \bar{D}_1, \bar{E}_2, \bar{H}_2, \bar{D}_2$ نشان می‌دهیم. روش کار همانند روش بکار

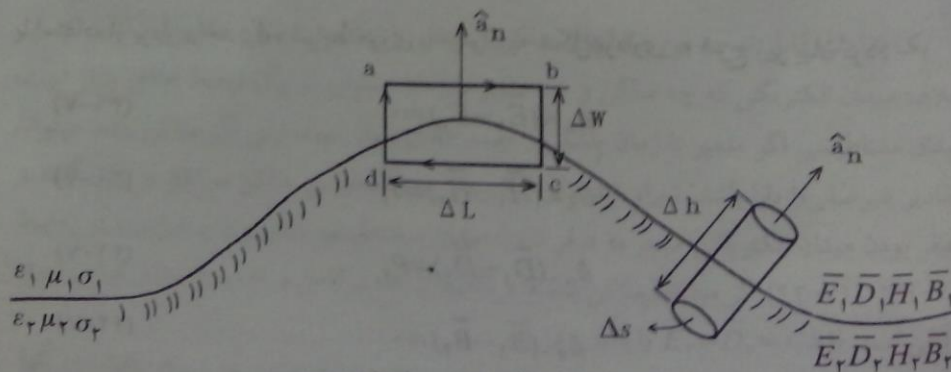
رفته برای میدانهای ساکن در قسمتهای (۳-۶) و (۹-۳) میباشد. جهت تعیین شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی، مسیر بسته مستطیلی شکل $abcd$ را به طول ΔL و عرض ΔW ، مطابق شکل (۶-۷)، در نظر می‌گیریم، بطوری که اضلاع ab و cd موازی با سطح مرزی و اضلاع bc و da عمود بر آن باشند. آنگاه رابطه (۷-۳۰-الف) را برای میدان الکتریکی و رابطه (۷-۳۰-ب) را برای میدان مغناطیسی بکار می‌بریم:

$$\oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{abcd} \text{سطح} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (۳۱-۷)$$

$$\oint_{abcd} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{abcd} \text{سطح} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad (۳۲-۷)$$

وقتی که ΔW به سمت صفر میل کند، سطح مستطیل $abcd$ نیز به سمت صفر میل میکند و آنگاه انتگرال سمت راست رابطه (۳۱-۷) و آن قسمت از انتگرال سمت راست رابطه (۳۲-۷) که شامل $\partial \vec{D} / \partial t$ است به سمت صفر میل می‌کنند. از این پس، موقعیت مسأله عیناً همانند حالت میدانهای ساکن است که در قسمتهای (۳-۶) و (۹-۳) مطالعه کردیم. به عبارت دیگر، در ادامه بررسی رابطه (۳۱-۷) میتوان محاسبات مربوط به مؤلفه مماسی میدان \vec{E} در قسمت (۹-۳) را تکرار کرد و نتیجه (۳-۶۵) را گرفت. به همین ترتیب، در ادامه بررسی رابطه (۳۲-۷) میتوان محاسبات مربوط به مؤلفه مماسی میدان \vec{H} را تکرار کرد و نتیجه (۶-۳۴) را بدست آورد. پس بطور خلاصه، شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی میدانهای متغیر با زمان \vec{E} و \vec{H} عبارتند از:

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \quad (۳۳-۷)$$



شکل (۶-۷) شرایط مرزی در مجاورت دو جسم

$$\hat{a}_n \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s \quad (۳۴-۷)$$

که \bar{J}_s چگالی جریان سطحی موجود در مرز و \hat{a}_n بردار واحد عمود بر مرز و در جهت ناحیه ۲ به سمت ناحیه ۱ می‌باشد.

جهت تعیین شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی میدانها، یک سطح بسته استوانه‌ای شکل به قاعده Δs و ارتفاع Δh و عمود بر سطح مرزی، مطابق شکل (۷-۶)، در نظر می‌گیریم. آنگاه رابطه (۷-۳۰-ج) را برای میدان الکتریکی و رابطه (۷-۳۰-د) را برای میدان مغناطیسی بکار می‌بریم:

$$\oint_{\text{سطح کل استوانه}} \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_{\text{حجم استوانه}} \rho dv \quad (۳۵-۷)$$

$$\oint_{\text{سطح کل استوانه}} \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \quad (۳۶-۷)$$

با مراجعه به قسمت‌های (۳-۹) و (۶-۳) در می‌یابیم که روابط (۷-۳۵) و (۷-۳۶) مبنای تعیین شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی میدانهای ساکن \bar{D} و \bar{B} نیز بودند. بنابراین، تجزیه و تحلیل ریاضی شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی میدانهای ساکن و متغیر با زمان \bar{D} و \bar{B} هیچ‌گونه تفاوتی ندارد و طبعاً نتایج بدست آمده نیز یکسان خواهند بود. بنابراین روابط (۳-۶۶) و (۶-۳۷) برای میدانهای متغیر با زمان نیز معتبرند:

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (۳۷-۷)$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \quad (۳۸-۷)$$

با استفاده از بردار واحد \hat{a}_n ، شرایط مرزی را میتوان به شکل برداری به شرح زیر بیان کرد:

$$\hat{a}_n \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad (۳۹-۷)$$

$$\hat{a}_n \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s \quad (۴۰-۷)$$

$$\hat{a}_n \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s \quad (۴۱-۷)$$

$$\hat{a}_n \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0 \quad (۴۲-۷)$$

ذکر چند نکته در مورد شرایط مرزی ضرورت دارد. اول آنکه شرایط مرزی برای مؤلفه‌های

عمودی، یعنی روابط (۴۱-۷) و (۴۲-۷)، از شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی، یعنی روابط (۳۹-۷) و (۴۰-۷)، مستقل نیستند. این بدان دلیل است که معادلات دیورژانس ماکسول از معادلات کول آن مستقل نیستند و همانطور که دیدیم شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی از شکل انتگرالی معادلات دیورژانس و شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی از شکل انتگرالی معادلات کول نتیجه‌گیری شدند. بنابراین در حل مسائل الکترومغناطیس استفاده از شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی کفایت می‌کند.

نکته دوم آنکه اگر یکی از نواحی مثلاً ناحیه ۲ هادی کامل باشد، کلیه میدانها در آن صفر می‌باشند. زیرا در اجسام هادی کامل، میدان الکتریکی اعم از ساکن یا متغیر با زمان همواره صفر است و با صفر بودن \bar{E} از رابطه (۲۶-۷ الف) میتوان نتیجه گرفت که \bar{B} نیز باید صفر باشد. بطور خلاصه در اجسام هادی کامل داریم:

$$\bar{E} = \bar{D} = \bar{H} = \bar{B} = 0 \quad (۴۳-۷)$$

آنگاه شرایط مرزی (۳۹-۷) تا (۴۲-۷) برای وقتی که ناحیه ۲ هادی کامل و ناحیه ۱ عایق باشد بصورت زیر خلاصه میشوند:

$$E_{n1} = 0 \quad (۴۴-۷)$$

$$\hat{a}_n \times \bar{H}_1 = \bar{J}_s \quad (۴۵-۷)$$

$$\hat{a}_n \cdot \bar{D}_1 = \rho_s \quad (۴۶-۷)$$

$$B_{n1} = 0 \quad (۴۷-۷)$$

یک تفاوت قابل توجه بین میدانهای ساکن و متغیر با زمان در اجسام هادی این است که، برخلاف میدان الکتریکی که چه ساکن و چه متغیر با زمان همواره در یک محیط هادی صفر است، میدان مغناطیسی اگر متغیر با زمان باشد در جسم هادی صفر است ولی اگر ساکن باشد میتواند مقادیر غیر صفر را دارا باشد. زیرا، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن مستقل از یکدیگرند و صفر بودن میدان الکتریکی منجر به صفر شدن میدان مغناطیسی نمیشود. بنابراین، در روابط (۳۹-۷) تا (۴۲-۷) اگر میدانها ساکن باشند و ناحیه ۲ هادی کامل و ناحیه ۱ عایق فرض شود، کافی است فقط $\bar{E}_2 = \bar{D}_2 = 0$ را بکار برد.

در صورتی که نواحی ۱ و ۲ دارای رسانایی‌های محدود و غیر صفر σ_1 و σ_2 باشند، در آنها جریانهای الکتریکی با چگالیهای $\bar{J}_1 = \sigma_1 \bar{E}_1$ و $\bar{J}_2 = \sigma_2 \bar{E}_2$ پدید می‌آیند. شرط مرزی برای

مؤلفه‌های عمودی جریانها را میتوان با استفاده از رابطه (۷-۳۰)، که در آن سطح بسته S همانند سطح استوانه‌ای در شکل (۷-۶) باشد، بدست آورد. نتیجه عبارت است از:

$$\hat{a}_n \cdot (\bar{J}_1 - \bar{J}_2) = -\nabla_t \cdot \bar{J}_s - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (48-7)$$

که ∇_t دیورژانس در صفحه مماس بر سطح مرزی را بیان میکند. اگر رسانایی هر دو ناحیه محدود باشد، یعنی هیچکدام از نواحی هادی کامل نباشند، جریان سطحی در مرز بوجود نخواهد آمد و $\bar{J}_s = 0$ است. آنگاه:

$$\hat{a}_n \cdot (\bar{J}_1 - \bar{J}_2) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (49-7)$$

در صورتی که یکی از نواحی هادی کامل بوده و ناحیه دیگر دارای رسانایی محدود باشد، مثلاً $\sigma_1 = \infty$ و $\sigma_2 = 0$ ، جریان $\bar{J}_2 = 0$ و جریان سطحی با چگالی \bar{J}_s در مرز تشکیل می‌شود. آنگاه:

$$\hat{a}_n \cdot \bar{J}_1 = -\nabla_t \cdot \bar{J}_s - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (50-7)$$

بالاخره در صورتی که یکی از نواحی عایق کامل (مثلاً $\sigma_2 = 0$) و دیگری دارای رسانایی محدود باشد، داریم:

$$\hat{a}_n \cdot \bar{J}_1 = 0 \quad (51-7)$$

شرط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی جریانها را میتوان با استفاده از شرط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی میدان الکتریکی \bar{E} بصورت زیر نوشت:

$$\hat{a}_n \times \left(\frac{\bar{J}_1}{\sigma_1} - \frac{\bar{J}_2}{\sigma_2} \right) = 0 \quad (52-7)$$

بدیهی است که شرط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی میدان \bar{D} ، رابطه دیگری بدست می‌دهد که از آن و رابطه (۴۹-۷) میتوان ρ_s را محاسبه کرد.

پاسخهای میدانهای الکترومغناطیس را باید از حل همزمان معادلات ماکسول بدست آورد. این پاسخها باید کلیه شرایط مرزی را نیز برآورده سازند. با معلوم بودن منابع \bar{J} و ρ (که توسط رابطه پیوستگی به یکدیگر مربوطند)، چهار بردار \bar{E} ، \bar{D} ، \bar{H} و \bar{B} مجهولات مسأله را تشکیل می‌دهند. لذا با توجه به اینکه هر بردار دارای سه مؤلفه است، در حالت کلی مسأله دارای دوازده مجهول است. لذا به چهار معادله برداری که معادل با دوازده معادله اسکالر است نیاز می‌باشد. هر کدام از معادلات کرل ماکسول به سه معادله اسکالر تجزیه میشود. بنابراین، دو معادله کرل ماکسول شش معادله اسکالر را

بوجود می‌آورند. هر کدام از معادلات دیورژانس ماکسول به مثابه یک معادله اسکالر است، ولی چون این معادلات از معادلات کرل مستقل نیستند بحساب آورده نخواهند شد. شش معادله مورد نیاز دیگر از روابط:

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (53-7)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (54-7)$$

بدست می‌آیند. به این ترتیب تعداد معادلات مساوی تعداد مجهولات بوده و امکان حل مسأله به روش تحلیلی یا عددی موجود می‌باشد. در ادامه پاسخ کلی معادلات ماکسول را با استفاده از توابع پتانسیل بدست می‌آوریم.

۷-۵) توابع پتانسیل و پاسخ آنها

مفهوم پتانسیل مغناطیسی برداری \bar{A} ، که در قسمت (۵-۶) ارائه کردیم، بر اساس سلنوییدی بودن میدان مغناطیسی \bar{B} استوار بوده و چون برای میدان مغناطیسی متغیر با زمان، همانند میدان مغناطیسی ساکن، معادله $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ صادق است، میتوان نوشت:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (55-7)$$

با استفاده نمودن از رابطه (۵۵-۷) در رابطه (۷-۲۶-الف)، داریم:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{A})$$

یا:

$$\nabla \times \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (56-7)$$

از آنجا که معادله $\nabla \times \nabla V = 0$ همواره برای تابع دلخواه V صادق است، میتوان از رابطه (۷-۵۶) نتیجه گرفت که:

$$\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

یا:

$$\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad (57-7)$$

در صورت عدم تغییرات نسبت به زمان $\partial \bar{A} / \partial t = 0$ بوده و رابطه (۵۷-۷) به $\bar{E} = -\nabla V$ ، که همان رابطه بین میدان الکتریکی ساکن و پتانسیل است، ساده می‌شود. حال با جایگزین نمودن $\bar{H} = \nabla \times \bar{A} / \mu$ و $\bar{D} = -\epsilon(\nabla V + \partial \bar{A} / \partial t)$ در رابطه (۷-۲۶-ب)، داریم:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \mu \bar{J} - \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla V + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}) \quad (58-7)$$

با استفاده از اتحاد $\nabla \times \nabla \times \bar{A} = -\nabla^2 \bar{A} + \nabla(\nabla \cdot \bar{A})$ در رابطه (۵۸-۷)، میتوان نوشت:

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} + \nabla(\nabla \cdot \bar{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}) \quad (59-7)$$

می‌دانیم یک بردار وقتی بطور کامل مشخص میشود که کرل و دیورژانس آن هر دو معلوم باشند. کرل بردار \bar{A} را در رابطه (۵۵-۷) تعیین کرده‌ایم و در انتخاب دیورژانس آن می‌توانیم هر تصمیم مقتضی را اتخاذ کنیم. به منظور ساده کردن رابطه (۵۹-۷) و حذف وابستگی آن به تابع V ، دیورژانس \bar{A} را بصورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (60-7)$$

انگاز، رابطه (۵۹-۷) بصورت زیر خلاصه میشود:

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} \quad (61-7)$$

رابطه (۶۰-۷) موسوم به شرط لورنتز^۱ میباشد و برای میدانهای ساکن به $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ ساده میشود که در قسمت (۶-۵) نیز نشان داده شده است.

برای بدست آوردن معادله حاکم بر تابع V رابطه (۵۷-۷) را در رابطه (۷-۲۶-ج) بکار برده و از $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ استفاده می‌کنیم:

$$-\nabla \cdot [\epsilon (\nabla V + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t})] = \rho \quad (62-7)$$

در صورتیکه ϵ مقدار ثابتی باشد، از رابطه (۶۲-۷) نتیجه می‌گیریم که:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

و با استفاده از شرط لورنتز، سرانجام داریم:

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۶۳-۷)$$

روابط (۶۱-۷) و (۶۳-۷) را معادلات موج غیرهمگن برای پتانسیل برداری \vec{A} و پتانسیل اسکالر V می‌نامند. در صورتی که تغییرات نسبت به زمان وجود نداشته باشد، این روابط به معادلات پواسون که در روابط (۱-۴) و (۷۵-۵) داده شده‌اند ساده می‌شوند.

پاسخ معادلات (۶۱-۷) و (۶۳-۷) برای حالت ساکن را در حقیقت می‌توان روابط (۲-۹۳) و (۵-۶۰) دانست که مجدداً در زیر نوشته می‌شوند:

$$V(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (۶۴-۷)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\mu\vec{J}(\vec{r}') dV'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (۶۵-۷)$$

بدیهی است که برای حالت غیرساکن نتایج مزبور باید تغییر پیدا کنند، اما چگونه؟ برای یافتن پاسخ معادلات (۶۱-۷) و (۶۳-۷) بترتیب زیر عمل می‌کنیم. ابتدا عنصر بار $\rho(t)\Delta V'$ را به مثابه یک بار نقطه‌ای متغیر با زمان در مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم و پتانسیل اسکالر حاصل از آن را بدست می‌آوریم. به دلیل تقارن کروی این بار، پتانسیل V تابعی از θ و ϕ نخواهد بود و فقط می‌تواند تابعی از r و t باشد. آنگاه معادله (۶۳-۷) برای تمام نقاط فضا بجز مبدأ مختصات، که بار نقطه‌ای حضور دارد، بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad r > 0 \quad (۶۶-۷)$$

با بکار بردن تابع V_1 ، بطوری که $V_1 = rV$ باشد، معادله (۶۶-۷) بر حسب V_1 عبارت میشود از:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = 0 \quad r > 0 \quad (۶۷-۷)$$

پاسخ معادله (۶۷-۷) بصورت $V_1(r,t) = f(t-r\sqrt{\mu\epsilon}) + g(t+r\sqrt{\mu\epsilon})$ میباشد که f و g توابعی دلخواهند مشروط بر اینکه مشتقات مرتبه اول و دوم آنها نسبت به r و t موجود باشند. این را می‌توان با جایگزینی مستقیم در معادله (۶۷-۷) به سهولت تحقیق کرد. تابع $g(t+r\sqrt{\mu\epsilon})$ بطوری که بعداً خواهیم دید بیانگر یک پاسخ فیزیکی مفید نخواهد بود، لذا:

$$V(r,t) = \frac{1}{r} V_1(r,t) = \frac{1}{r} f(t-r\sqrt{\mu\epsilon}) \quad (۶۸-۷)$$

برای مشخص نمودن تابع f اینطور استدلال می‌کنیم که اگر بار نقطه‌ای $\rho(t)\Delta v'$ ساکن فرض می‌شود، پتانسیل حاصل از آن برابر می‌بود با:

$$V = \frac{\rho(t)\Delta v'}{4\pi\epsilon r} \quad (69-7)$$

مقایسه روابط (68-7) و (69-7) ما را به رابطه زیر برای تابع f رهنمون می‌سازد:

$$f(t-r\sqrt{\mu\epsilon}) = \frac{\rho(t-r\sqrt{\mu\epsilon})}{4\pi\epsilon} \Delta v' \quad (70-7)$$

آنگاه:

$$V(r,t) = \frac{\rho(t-r\sqrt{\mu\epsilon})}{4\pi\epsilon r} \Delta v' \quad (71-7)$$

اگر بار $\rho(t)\Delta v'$ در نقطه دلخواه $P(\vec{r}')$ واقع باشد، پتانسیل حاصل از آن را میتوان با جایگزین نمودن r با $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ در رابطه (71-7) بدست آورد:

$$V(\vec{r},t) = \frac{\rho(t - |\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon})}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} \Delta v' \quad (72-7)$$

سرانجام برای یک توزیع بار در حجم V' پتانسیل حاصله را میتوان با انتگرال گرفتن از عبارت سمت راست رابطه (72-7) بدست آورد:

$$V(\vec{r},t) = \int_{V'} \frac{\rho(t - |\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon})}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (73-7)$$

مقایسه روابط (64-7) و (73-7) چگونگی تغییر تابع پتانسیل اسکالر از حالت ساکن به حالت متغیر با زمان را روشن می‌سازد. رابطه (73-7) نشان می‌دهد که پتانسیل ناشی از بار الکتریکی با چگالی ρ در نقطه‌ای به فاصله $|\vec{r} - \vec{r}'|$ از آن بار و در لحظه t به مقدار چگالی بار در لحظه $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon}$ بستگی دارد. به عبارت دیگر، اثر $\rho(\vec{r}')$ پس از گذشت زمان $|\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon}$ احساس می‌شود. از اینرو، $V(\vec{r},t)$ در رابطه (73-7) را پتانسیل «تأخیر یافته» می‌نامند. اکنون روشن می‌شود که چرا تابع $g(t + |\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon})$ بیانگر یک پتانسیل فیزیکی نیست، زیرا اثر بار در فواصل دور از آن نمی‌تواند زودتر از اثر در محل خود بار حس شود.

به نحو مشابهی میتوان نشان داد که پاسخ معادله (61-7) عبارت است از:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{V'} \frac{\mu \vec{j}(t - |\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon})}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (74-7)$$

با داشتن V و \bar{A} میدانهای \bar{B} و \bar{E} را میتوان از روابط (۷-۵۵) و (۷-۵۷) بدست آورد. پاسخ \bar{A} به تنهایی نیز کفایت میکند، زیرا پس از یافتن \bar{B} ، میدان \bar{E} را میتوان از رابطه (۷-۲۶-ب) بدست آورد.

۶-۷) میدانهای شبه ساکن^۱

همانطور که قبلاً اشاره کردیم معادلات ماکسول قادر به تشریح کلیه پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی از فرکانس صفر تا بالاترین فرکانسهای موجود هستند. لیکن این معادلات از نوع دیفرانسیل پاره‌ای و شامل کمیت‌های مختلفی میباشند و حل آنها در همه موارد از سادگی و آسانی چندانی برخوردار نیست. معادلات ماکسول برای میدانهای ساکن به مراتب ساده‌تر بوده و بخصوص شکل انتگرالی آنها در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی بسیار مفید واقع می‌شود. بعنوان مثال رابطه $\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$ بیان می‌کند که مجموع اختلاف پتانسیلها حول یک مسیر بسته برابر صفر است و این چیزی جز بیان قانون KVL نیست. همچنین، از رابطه پیوستگی برای جریانهای ساکن نتیجه $\oint \bar{J} \cdot d\bar{s} = 0$ حاصل میشود و بیان می‌کند که مجموع جبری جریانهای وارد شده به یک سطح بسته (با یک گره در اصطلاح مدارهای الکتریکی) برابر صفر است. این نتیجه نیز همان بیان قانون KCL است. همچنین تعاریف مقاومت، خازن و خودالقا را بر حسب میدانهای ساکن انجام دادیم. اما علیرغم اینکه اساس تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی بر میدانهای ساکن استوار است، قوانین KVL و KCL را در تجزیه و تحلیل مدارهایی که شامل منابع متغیر با زمان هستند نیز بکار می‌بریم. این قوانین، به معنای دقیق کلمه، فقط برای جریانها و ولتاژهای ثابت، که تغییراتی نسبت به زمان نداشته باشند، معتبرند. پس طبعاً میتوان چنین نتیجه گرفت که قوانین حاکم بر مدارهای الکتریکی در حالتی که منابع ولتاژ و جریان متغیر با زمان هستند باید از نوعی تقریب برخوردار باشند و بلافاصله این سؤال به ذهن خطور می‌کند که ماهیت این تقریب چیست و اندازه آن چقدر است.

واقعیت این است که اگر تغییرات میدانها نسبت به زمان «کند» باشد، عملاً قوانین میدانهای ساکن با تقریب بسیار خوب برقرارند. بعنوان مثال اگر از سیم پیچ یک خودالقا، جریانی سینوسی با فرکانس ω عبور نماید، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان هر دو ایجاد می‌شوند. لیکن اگر ابعاد هندسی سیم پیچ از طول موج λ ، که از رابطه $\lambda = 2\pi/\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ بدست می‌آید، بسیار کوچکتر باشد (مترادف با تغییرات زمانی کند یا فرکانس پایین) سهم جریان جایجایی $\partial\bar{D}/\partial t$ در تولید میدان

مغناطیسی در درون سیم پیچ به مراتب از سهم جریان سیم پیچ کمتر بوده و گوییم که میدان مغناطیسی همانند حالت ساکن فقط از جریان خود سیم پیچ ایجاد شده است. به عبارت دیگر، میدان \vec{H} از طرفی متغیر با زمان و مثلاً در اینجا سینوسی است و از طرف دیگر رابطه $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ که به گونه دقیق صرفاً برای میدان مغناطیسی ساکن صادق می باشد، با تقریب بسیار خوبی برقرار است. میدانهای که متغیر با زمان بوده و با تقریب خوبی در روابط میدانهای ساکن صدق کنند را میدانهای شبه ساکن می نامند. اساس تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی با منابع متغیر با زمان بر تقریب میدانهای شبه ساکن استوار است. در موارد عملی گاهی این تقریب را تا فرکانسهای حدود صد مگاهرتز و حتی چندین برابر آن نیز بکار می برند. بدیهی است که هر چه فرکانس بالاتر باشد این تقریب از دقت کمتری برخوردار است. در فرکانسهای بالا شامل امواج مایکروویو، امواج میلیمتری و نور تقریب میدانهای شبه ساکن به کلی از اعتبار ساقط می شود. از اینرو، ادوات مربوط به فرکانسهای بالا را نمی توان به روش مداری بررسی کرد و باید آنها را به روش میدانی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. یک مورد مهم دیگر که مستلزم استفاده از روش میدانی است مربوط به تشعشع امواج الکترومغناطیس و آنتن ها می باشد.

محاسبه میدانهای شبه ساکن را میتوان عیناً مطابق روش محاسبه میدانهای ساکن انجام داد. اگر محاسبه میدانها را با استفاده از توابع پتانسیل انجام دهیم، روابط (۷-۶۲) و (۷-۶۵) را با چگالیهای متغیر با زمان $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ و $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$ بکار می بریم. در اینصورت، پتانسیلها دیگر تأخیر یافته نیستند و اثرات میدانی بطور آنی از محل منابع به فواصل دور از آنها انتقال می یابند. محاسبه میدانهای شبه ساکن را میتوان با استفاده از روشهای دیگر، مانند روش قانون گوس برای میدان الکتریکی و روش قانون مداری آمپر برای میدان مغناطیسی، در صورت سودمند بودن این روشها برای مسائل مورد نظر، نیز انجام داد.

۷-۷) میدانهای متغیر با زمان سینوسی

در بسیاری از موارد عملی، منابع تولید جریاتها و ولتاژهایی می کنند که تغییراتشان نسبت به زمان سینوسی است. در نتیجه میدانهای الکترومغناطیس حاصل از چنین منابعی نیز تغییراتی سینوسی نسبت به زمان دارند. بعلاوه، میدانهایی که تابعیت زمانی آنها در حالت کلی غیر سینوسی باشد را میتوان بصورت مجموعی از میدانهای سینوسی با فرکانسهای مختلف بیان کرد. این کار را میتوان با استفاده از سری فوریه برای میدانهای متناوب غیر سینوسی یا انتگرال فوریه در حالت کلی انجام داد. بنابراین مطالعه میدانهایی که تغییرات زمانی آنها سینوسی باشند حائز اهمیت اساسی

است. مطالعه میدانهای با تغییرات زمانی سینوسی را می‌توان با استفاده از کمیت‌های فازوری^۱ با سهولت بیشتری انجام داد. فرض کنید تغییرات میدان الکتریکی $\bar{E}(\bar{r}, t)$ بصورت زیر بیان شود:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}_1(\bar{r}) \cos(\omega t + \varphi) \quad (۷۵-۷)$$

آنگاه میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{E}(\bar{r}, t) &= R_e[\bar{E}_1(\bar{r}) e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}] \\ &= R_e[\bar{E}_p(\bar{r}) e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (۷۶-۷)$$

در رابطه (۷۶-۷)، $\bar{E}_p(\bar{r})$ را فازور $\bar{E}(\bar{r}, t)$ می‌نامند. یک کمیت فازوری در حالت کلی مختلط و فقط تابعی از مکان میباشد. در حقیقت هدف از بکار بردن کمیت‌های فازوری حذف متغیر زمان از معادلات می‌باشد. برای سایر کمیت‌های بکار رفته در معادلات ماکسول، اعم از برداری یا اسکالر، میتوان کمیت‌های فازوری مربوطه را، مطابق آنچه که برای میدان \bar{E} انجام شد، تعریف کرد. برای بدست آوردن معادلات ماکسول بر حسب کمیت‌های فازوری، ابتدا یکی از این معادلات، مثلاً معادله (۷-۲۶ الف)، را بشرح زیر بر حسب کمیت‌های فازوری می‌نویسیم:

$$\nabla \times [R_e(\bar{E}_p e^{j\omega t})] = -\frac{\partial}{\partial t} [R_e(\bar{B}_p e^{j\omega t})] \quad (۷۷-۷)$$

با تعویض ترتیب عملیات گرفتن کرل و گرفتن قسمت حقیقی در سمت چپ رابطه (۷۷-۷) و همچنین با تعویض ترتیب گرفتن مشتق نسبت به زمان و گرفتن قسمت حقیقی در سمت راست این رابطه، داریم:

$$R_e[\nabla \times (\bar{E}_p e^{j\omega t})] = -R_e\left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{B}_p e^{j\omega t})\right]$$

و:

$$R_e[e^{j\omega t} (\nabla \times \bar{E}_p)] = -R_e[j\omega \bar{B}_p e^{j\omega t}]$$

یا:

$$R_e[(\nabla \times \bar{E}_p + j\omega \bar{B}_p) e^{j\omega t}] = 0 \quad (۷۸-۷)$$

چون رابطه (۷-۷۸) باید به ازای جمیع مقادیر t صادق باشد، لازم است که عبارت درون پرانتز صفر باشد. آنگاه:

$$\nabla \times \bar{E}_p = -j\omega \bar{B}_p \quad (۷-۷۹-الف)$$

رابطه (۷-۷۹-الف) شکل فازوری رابطه (۷-۲۶-الف) نامیده میشود. مقایسه این دو رابطه نشان می‌دهد که اگر هر کمیت را با فازورش و $\partial/\partial t$ را با $j\omega$ جایگزین کنیم، معادله اصلی به معادله فازوری تبدیل میشود. به این ترتیب سایر معادلات ماکسول و رابطه پیوستگی در شکل فازوری بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\nabla \times \bar{H}_p = \bar{J}_p + j\omega \bar{D}_p \quad (۷-۷۹-ب)$$

$$\nabla \cdot \bar{D}_p = \rho_p \quad (۷-۷۹-ج)$$

$$\nabla \cdot \bar{B}_p = 0 \quad (۷-۷۹-د)$$

$$\nabla \cdot \bar{J}_p = -j\omega \rho_p \quad (۷-۷۹-ه)$$

به سهولت می‌توان نشان داد که شرایط مرزی بر حسب کمیت‌های فازوری دقیقاً همان شکل ریاضی شرایط مرزی بر حسب کمیت‌های اصلی را دارند. همچنین، شکل انتگرالی معادلات ماکسول و سایر معادلات و روابط را میتوان بر حسب کمیت‌های فازوری بیان داشت. کافی است $\partial/\partial t$ را با $j\omega$ ، $\partial^2/\partial t^2$ را با $-\omega^2$ و هر کمیت را با فازورش جایگزین کنیم. اغلب به دلیل استفاده مکرر از کمیت فازوری، اندیس p از علائم بکار رفته حذف میشود. در ادامه بحث در این قسمت، ما نیز اندیس p را حذف می‌کنیم.

معادلات موج برای توابع پتانسیل \bar{A} و V در روابط (۷-۶۱) و (۷-۶۳) در شکل فازوری (پس از حذف اندیس p) بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\nabla^2 \bar{A} + \beta^2 \bar{A} = -\mu \bar{J} \quad (۷-۸۰)$$

$$\nabla^2 V + \beta^2 V = -\rho/\epsilon \quad (۷-۸۱)$$

که $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ است. پاسخهای معادلات (۷-۸۰) و (۷-۸۱) را میتوان از پاسخهای مربوط به تغییرات زمانی دلخواه که در روابط (۷-۷۳) و (۷-۷۴) داده شده‌اند بدست آورد. با توجه به اینکه برای تغییرات زمانی سینوسی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t - |\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon}) &= \operatorname{Re} \left[\rho(\vec{r}') e^{j\omega(t - |\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon})} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\rho(\vec{r}') e^{-j\beta|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{j\omega t} \right] \end{aligned} \quad (۸۲-۷)$$

و به همین ترتیب:

$$\vec{J}(\vec{r}, t - |\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon}) = \operatorname{Re} \left[\vec{J}(\vec{r}') e^{-j\beta|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{j\omega t} \right] \quad (۸۳-۷)$$

بنابراین، پتانسیل‌های معادلات (۸۰-۷) و (۸۱-۷) بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\mu \vec{J}(\vec{r}') e^{-j\beta|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (۸۴-۷)$$

و:

$$V(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') e^{-j\beta|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (۸۵-۷)$$

سیس، میدانهای \vec{E} و \vec{H} از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} / \mu \quad (۸۶-۷)$$

$$\vec{E} = (\nabla \times \vec{H} - \vec{J}) / j\omega\epsilon = -\nabla V - j\omega\vec{A} \quad (۸۷-۷)$$

■ خلاصه فصل

در این فصل معادلات حاکم بر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان، ویژگیهای کلی این میدانها و رفتار عمومی آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. بطور خلاصه اهم نکاتی که در این فصل آموختیم عبارتند از:

- بر اساس قانون تجربی فاراده، شار مغناطیسی متغیر با زمان تولید نیروی محرکه الکتریکی می‌کند. این نیروی محرکه مساوی منهای نمو شار نسبت به زمان میباشد ($emf = -d\Psi/dt$). علامت منفی در این رابطه به نام قانون لنز شناخته میشود و بیان کننده اصل بقای انرژی است.
- دو نوع نیروی محرکه، یکی از نوع ترانسفورماتوری و دیگری از نوع حرکتی میتوان داشت.
- معادلات ماکسول را بعنوان کلی‌ترین روابط حاکم بر رفتار میدانهای الکترومغناطیس مورد بررسی قرار داده و آنها را در دو شکل نقطه‌ای و انتگرالی بیان کردیم.
- ملاحظه کردیم که میدان الکتریکی متغیر با زمان یک میدان غیرپایستار است و به منزله مولد میدان مغناطیسی محسوب می‌شود. همچنین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان، بر خلاف میدانهای ساکن، از یکدیگر مستقل نیستند. یعنی، وابستگی متقابل و وجود همزمان آنها اجتناب ناپذیر است.
- نشان دادیم که معادلات دیورژانس ماکسول از معادلات کرل آن و معادله پیوستگی مستقل نیستند.
- میدان مغناطیسی \bar{B} ، اعم از ساکن یا متغیر با زمان، همواره یک میدان سلنوئیدی است.
- میدان الکتریکی، چه ساکن و چه متغیر با زمان، همواره در اجسام هادی کامل صفر است. میدانهای مغناطیسی نیز اگر متغیر با زمان باشند در هادیهای کامل صفرند، ولی اگر ساکن باشند میتوانند در اجسام هادی مقادیر غیر از صفر داشته باشند.
- شرایط مرزی بین دو ناحیه را مطالعه کردیم. این شرایط برای دو ناحیه عایق همان شکل میدانهای ساکن را دارا هستند.
- توابع پتانسیل برداری و اسکالر را تعریف کردیم و معادلات حاکم بر آنها و پاسخ این معادلات را بصورت روابط انتگرالی بدست آوردیم. ملاحظه کردیم که، به دلیل وجود تغییرات نسبت به

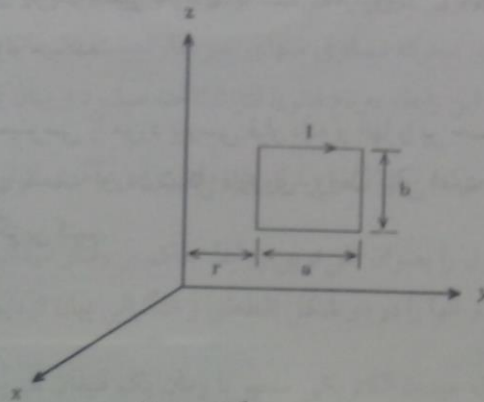
زمان، اثرات میدانی نه بطور آنی بلکه پس از گذشت زمانی برابر با $\sqrt{\mu\epsilon}|\vec{r}-\vec{r}'|$ از نقطه‌ای با بردار مکان \vec{r}' به نقطه‌ای با بردار مکان \vec{r} انتقال پیدا می‌کنند.

• میدانهای شبه ساکن را اجمالاً مورد بحث قرار دادیم. این میدانها از طرفی متغیر با زمانند و از طرف دیگر روابط میدانهای ساکن را با تقریب خوبی برآورده می‌سازند. کاربرد این میدانها وقتی مجاز است که ابعاد هندسی مورد نظر از طول موج بسیار کوچکتر باشند. مطالعه مدارهای الکتریکی با منابع ولتاژ و جریان متغیر با زمان، با استفاده از روابط KVL و KCL بر اساس میدانهای شبه ساکن استوار میباشد.

• میدانهای متغیر با زمان سینوسی را مورد بررسی قرار داده و آنها را بر حسب کمیت‌های فازوری بیان کردیم. دیدیم که برای بدست آوردن شکل فازوری روابط، کافی است $\partial/\partial t$ را با $j\omega$ و هر کمیت را با فازورش جایگزین کنیم.

■ مسائل

۱-۷ میدان مغناطیسی ساکن $\vec{B} = (B_0/r)\hat{\phi}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای مفروض است. یک حلقه سیم مستطیلی شکل با مقاومت کل R ، که مطابق شکل (م-۷-۱) در صفحه yz واقع و اضلاع آن موازی محورهای y و z میباشند، با سرعت $\vec{v} = v_0 \hat{y}$ حرکت می‌کند. جریان I پدید آمده در حلقه را تعیین کنید. B_0 و v_0 مقادیر ثابتی هستند.



شکل (م-۷-۱)

۲-۷ مسأله (۱-۷) را برای حالتی که میدان مغناطیسی \vec{B} متغیر با زمان و بصورت زیر باشد تکرار نمایید.

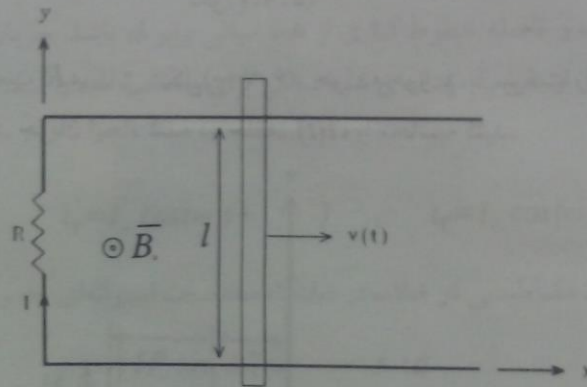
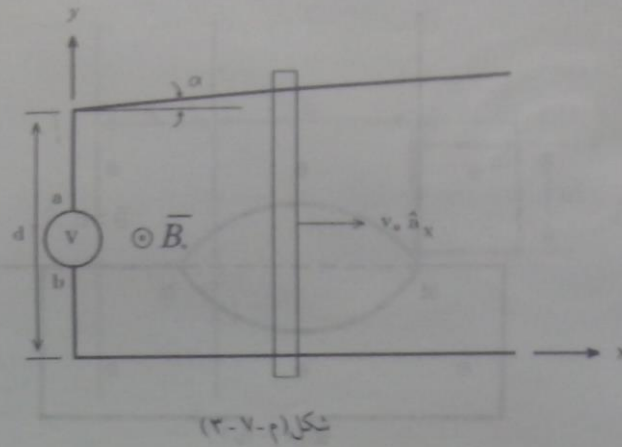
$$\vec{B} = \frac{B_0}{r} \cos \omega t \hat{\phi}$$

۳-۷ یک میله فلزی روی دو ریل غیرموازی، که زاویه بین آنها α میباشند، با سرعت $\vec{v} = v_0 \hat{z}$ حرکت میکند. میله لغزنده دارای طول کافی بوده بطوری که اتصال آن با ریلها همواره برقرار می‌ماند. شکل (م-۷-۳) ریلها و میله را نشان می‌دهد. V_{ab} را برای میدان $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ محاسبه نمایید. فرض کنید در لحظه $t=0$ میله در $x=0$ واقع است.

۴-۷ شکل (م-۷-۴) سیستمی متشکل از یک میله فلزی که روی دو ریل موازی می‌لغزد را نشان می‌دهد. بین ریلها مقاومت R وصل میشود و از آنها میدان مغناطیسی $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ عبور داده میشود. میله با سرعت اولیه v_0 در لحظه $t=0$ به حرکت درآورده میشود. در صورتی که جرم میله برابر m بوده و از مقاومت میله و ریلها صرفنظر شود، مطلوب است محاسبه:

الف) سرعت حرکت میله بصورت تابعی از زمان،

ب) جریان بوجود آمده در مقاومت R .

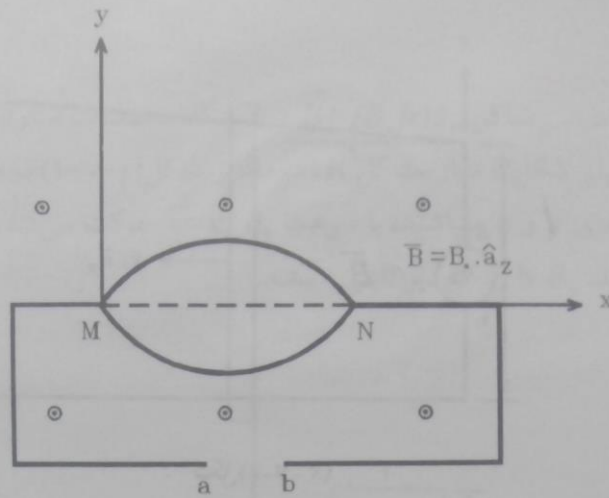


۵-۷ یک قطعه سیم نازک از جنس هادی، مطابق شکل (۴-۷-۳)، بین دو نقطه ثابت M و N در میدان \vec{B} به ارتعاش درآورده می‌شود. فرض کنید ارتعاشات پایدار بوده و معادله حرکت یک نقطه دلخواه سیم در امتداد عمودی از رابطه زیر بدست آید:

$$y(x,t) = y_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos \omega t$$

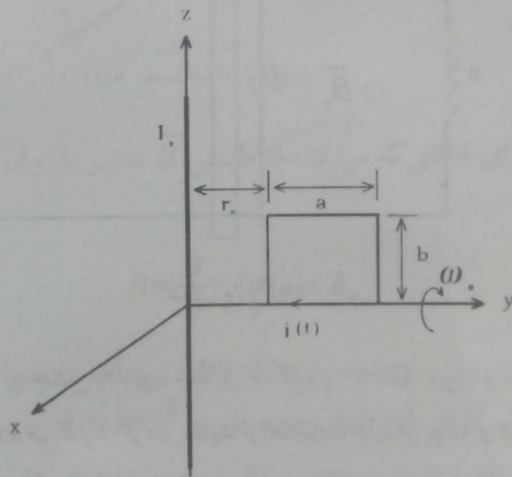
که y_0 دامنه ارتعاشات، d (فاصله بین نقاط M و N) و ω (فرکانس زاویه‌ای ارتعاشات) مقادیر ثابتی هستند. اختلاف پتانسیل بوجود آمده بین نقاط a و b را محاسبه نمایید. سیم ارتعاش کننده و سیمهای رابط را از جنس هادی کامل فرض کنید.

۶-۷ یک رشته سیم نازک طویل در امتداد محور z حامل جریان ثابت I_0 می‌باشد. یک حلقه سیم



شکل (۵-۷-۴)

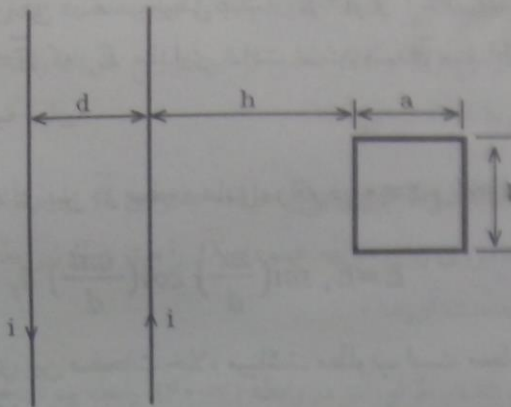
مستطیلی شکل با مقاومت R ، مطابق شکل (۴-۷-۶)، حول محور y با سرعت زاویه‌ای ω به چرخش درآورده می‌شود. جریان ایجاد شده در حلقه، $i(t)$ ، را محاسبه کنید.



شکل (۶-۷-۴)

۷-۷ یک خط انتقال برق، متشکل از دو سیم موازی به فاصله d از یکدیگر، حامل جریان $i(t) = I_0 \cos \omega t$ می‌باشد. یک حلقه سیم مستطیلی شکل با مقاومت R ، مطابق شکل (۴-۷-۷)، در جوار این خط انتقال قرار داده می‌شود. حلقه در صفحه خطوط انتقال فرض می‌شود. جریان القا شده در حلقه را محاسبه نمایید. میدان مغناطیسی خطوط انتقال را شبه ساکن فرض کنید.

۸-۷ مسأله (۷-۷) را برای یک خط انتقال سه‌فاز تکرار کنید. فرض کنید خطوط انتقال در یک



شکل (۷-۷-۴)

صفحه واقع بوده و فاصله خطوط کناری از خط میانی برابر d باشد. جریان خطوط را بصورت زیر در نظر بگیرید و از تقریب میدانهای شبه ساکن برای محاسبه میدان مغناطیسی خطوط جریان استفاده کنید.

$$i_1 = I_0 \cos \omega_0 t \quad , \quad i_2 = I_0 \cos(\omega_0 t + 120^\circ) \quad , \quad i_3 = I_0 \cos(\omega_0 t + 240^\circ)$$

۹-۷ یک میدان مغناطیسی در خلاء، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، بصورت زیر داده شده است:

$$\vec{H} = \begin{cases} H_0 \sin \omega t \hat{a}_z & r < a \\ \cdot & r > a \end{cases}$$

میدان الکتریکی \vec{E} وابسته به این میدان مغناطیسی را محاسبه نمایید.

۱۰-۷ مسأله (۹-۷) را برای میدانهای مغناطیسی زیر در خلاء تکرار کنید.

$$\vec{H} = \begin{cases} \cdot & r < a \\ H_0 \sin \omega t \hat{a}_z & a < r < b \\ \cdot & r > b \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\vec{H} = \begin{cases} H_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \sin \omega t \hat{a}_z & r < a \\ \cdot & r > a \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۱۱-۷ میدان الکتریکی در محیطی با $\mu = \mu_0$ و $\sigma = 0$ برابر است با $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_z$ که E_0 مقداری ثابت است. میدان مغناطیسی \vec{H} و قابلیت گذردهی محیط (ϵ) را محاسبه نمایید.

۱۲-۷ میدان الکتریکی در فضای بین دو صفحه هادی، واقع در $x=0$ و $x=d$ ، عبارت است از:

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{c\pi t}{d}\right) \hat{a}_z$$

که $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ است. فضای بین صفحات خلاء میباشد. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان مغناطیسی \vec{H} .

ب) چگالی جریان سطحی روی صفحات هادی.

۱۳-۷ ناحیه $z < 0$ خلاء و ناحیه $z > 0$ با عایق کاملی با قابلیت گذردهی $\epsilon = 9\epsilon_0$ اشغال شده است. میدانهای الکتریکی در این دو ناحیه عبارتند از:

$$\vec{E}_1 = [E_1 \cos(\omega t - \beta z) + E_r \cos(\omega t + \beta z)] \hat{a}_z \quad z < 0$$

$$\vec{E}_r = E_1 \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_z \quad z > 0$$

که $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ میباشد. مطلوب است:

الف) محاسبه میدانهای مغناطیسی \vec{H}_1 و \vec{H}_r وابسته به میدانهای الکتریکی \vec{E}_1 و \vec{E}_r .

ب) تعیین نسبتهای E_r/E_1 و H_r/H_1 .

۱۴-۷ میدان الکتریکی در فضای محصور بین سطوح هادی $r=a$ ، $r=b$ ، $z=0$ و $z=d$ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، عبارت است از:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{r} \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) \cos \omega t \hat{a}_r$$

که E_0 مقداری ثابت است. فضای استوانه‌ای شکل خلاء فرض میشود. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان مغناطیسی \vec{H} وابسته به میدان الکتریکی \vec{E} .

ب) فرکانس زاویه‌ای ω .

ج) چگالی توزیع بار الکتریکی روی سطوح $r=a$ و $r=b$ ($0 < z < d$).

د) چگالی توزیع جریان سطحی روی کلیه سطوح هادی فضای استوانه‌ای شکل.

۱۵-۷ توزیع جریان سطحی $\bar{J}_x = J_x \cos \omega t \hat{a}_x$ روی صفحه xy ($z=0$) مفروض است. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی (\bar{E} و \bar{H}) ناشی از این توزیع جریان را در نواحی $z > 0$ و $z < 0$ محاسبه نمایید. این نواحی را خلاء فرض کنید.

۱۶-۷ نشان دهید که شرط مرزی برای مؤلفه عمودی \bar{B} را میتوان از شرط مرزی برای مؤلفه مماسی \bar{E} و شرط مرزی برای مؤلفه عمودی \bar{D} را میتوان از شرایط مرزی برای مؤلفه مماسی \bar{H} و مؤلفه عمودی \bar{J} بدست آورد.

۱۷-۷ نشان دهید که شرط لورنتز در رابطه (۶۰-۷)، رابطه پیوستگی (۷-۲۶-۵) را تفهیم میکند.

۱۸-۷ عنصر جریان $i(t) = I \Delta l \cos \omega t$ را در مبدأ مختصات و در امتداد محور z در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه (۷-۸۴) پتانسیل برداری \bar{A} ناشی از این جریان را بدست آورید (توجه کنید که چون Δl بسیار کوچک است، $|\bar{r} - \bar{r}'| = r$ می باشد. بعلاوه چگالی حجمی این جریان را میتوانید بصورت $\bar{J} = I \Delta l \delta(x') \delta(y') \delta(z') \hat{a}_z$ در شکل فازوری اش بنویسید) و سپس میدانهای \bar{E} و \bar{H} را محاسبه کنید.

۱۹-۷ برای یک محیط همگن بدون منابع ($\bar{J} = 0$ ، $\rho = 0$)، نشان دهید که معادلات حاکم بر \bar{E} و \bar{H} عبارتند از:

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \bar{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0$$

۲۰-۷ معادله موج برای \bar{E} در مسأله (۷-۱۹) را به سه معادله اسکالر در دستگاههای مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی بر حسب مؤلفه‌های میدان \bar{E} تجزیه کنید. نتایج بدست آمده در دستگاههای مختلف مختصات را مقایسه و درباره آنها بحث کنید.

۲۱-۷ معادلات موج برای توابع پتانسیل برداری \bar{A} و اسکالر V را برای یک محیط غیرهمگن بدست آورید. شرط لورنتز را بصورت $\nabla \cdot (\epsilon \bar{A}) = -\mu \epsilon \partial V / \partial t$ در نظر بگیرید.

۲۲-۷ تحقیق کنید که $V_1(r, t) = f(t - r\sqrt{\mu\epsilon}) + g(t + r\sqrt{\mu\epsilon})$ ، که در آن f و g توابعی دلخواهند که مشتقات اول و دوم آنها نسبت به t و r وجود دارند، پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل پاره‌ای مندرج در رابطه (۷-۶۷) می باشد.

۲۳-۷ منابعی با تغییرات زمانی سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω تولید میدان الکتریکی $\bar{E}(\bar{r}, \omega)$

(در شکل فازوری) را نموده‌اند. با توجه به خطی بودن معادلات ماکسول و استفاده از خواص انتگرال فوریه، میدان الکتریکی را برای حالتی که تغییرات زمانی منابع با تابع $f(t)$ بیان شود و توزیع مکانی آنها عیناً برابر با حالت تغییرات زمانی سینوسی باشد بدست آورید.

۲۴-۷ برای اجسام با رسانایی محدود $\sigma > 0$ میتوان قابلیت گذردهی \hat{E} را تعریف کرد، بطوری که $\nabla \times \bar{H} = j\omega \hat{E}$ باشد.

الف) نشان دهید که $\hat{E} = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$ می‌باشد.

ب) اگر میدان \hat{D} را بصورت $\hat{D} = \hat{E}$ تعریف کنیم. نشان دهید که شرط مرزی برای مرز عمودی \hat{D} در مرز دو ناحیه بصورت $\hat{D}_{n1} - \hat{D}_{n2} = 0$ بیان میشود.

ج) با استفاده از نتیجه فرض (ب) و استفاده از شرط مرزی $D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$ نشان دهید که

$$\rho_s = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1}{j\omega \hat{\epsilon}_2} E_{n1} = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1}{j\omega \hat{\epsilon}_1} E_{n2}$$

۲۵-۷ فازور میدان الکتریکی در محیطی که با پارامترهای ϵ ، μ و $\sigma > 0$ مشخص شده است عبارت است از:

$$\bar{E} = E_0 e^{-\gamma z} \hat{a}_x$$

که $\gamma = \alpha + j\beta$ ضریب ثابتی است.

الف) میدان مغناطیسی \bar{H} و ضریب γ را محاسبه نمایید.

ب) در صورتی که $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1$ باشد، مقادیر تقریبی α و β را بر حسب ϵ ، μ ، σ محاسبه کنید.

پاسخ برخی مسائل

فصل ۱ :

$$1-1 \quad \text{(الف)} : 2a_x - a_y + 2a_z \quad \text{(ب)} : \sqrt{5} \quad \text{(ج)} : 3 \quad \text{(د)} : -a_x - a_y + a_z \quad \text{(ه)} : 3$$

$$4-1 \quad A_y = -\frac{1}{r}, \quad \bar{A} = \frac{1}{r} a_r$$

$$5-1 \quad \text{(الف)} : \bar{a}_n = \pm (0.1822a_x - 0.2556a_y - 0.2777a_z)$$

$$\text{(ب)} : \bar{a}_n = \pm (0.1816a_x + 0.0488a_y + 0.5766a_z) \quad \text{(ج)} : 62/5$$

$$6-1 \quad \text{(الف)} : 20/3 \quad \text{(ب)} : \bar{a}_n = \pm (-0.0983a_x + 0.836a_y - 0.1541a_z)$$

$$7-1 \quad \text{(الف)} : \bar{A} = r^2 z \sin^2 \varphi (\cos \varphi a_r - \sin \varphi a_\varphi) - 5(r \cos \varphi + r \sin \varphi + z)a_z \quad \text{(ب)} : 30/5$$

$$8-1 \quad \text{(الف)} : \bar{a}_x = 0.222a_r + 0.222a_\theta + 0.8a_\varphi \quad \text{(ب)} : \bar{a}_\theta = 0.222a_x - 0.566a_y - 0.1707a_z$$

$$12-1 \quad \bar{B}(A \cdot B) / |B|^2 = -0.8077a_x - 1.077a_y + 0.269a_z$$

$$13-1 \quad -a_r \cdot a_\varphi$$

$$14-1 \quad \text{(الف)} : 12 \quad \text{(ب)} : 12 \text{ آری}$$

$$15-1 \quad -\frac{2}{3}$$

$$16-1 \quad \text{(الف)} : -\frac{2}{3} \quad \text{(ب)} : \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$$

$$17-1 \quad \frac{27}{160}$$

$$18-1 \quad \text{(الف)} : \text{صفر} \quad \text{(ب)} : \frac{2}{3} a^2 l$$

$$20-1 \quad \text{صفر}$$

$$21-1 \quad \text{(الف)} : \frac{1}{\sqrt{20}} \quad \text{(ب)} : 2\pi a l \quad \text{(ج)} : \frac{\pi}{16}$$

فصل ۲ :

$$1-2 \quad \text{(الف)} : y_i = \frac{eEL}{mv} \frac{L}{r} \left(\frac{L}{r} + l \right) \quad \bar{v}_i = v_x a_x + \frac{eEL}{mv} a_y, \quad y_i = \frac{eEL^2}{\gamma mv} \quad \text{(ب)} : \bar{v}_i = v_x a_x + \frac{eEL}{mv} a_y$$

$$2-2 \quad (-5/82a_x, 0, 0)$$

$$3-2 \quad \bar{E} = \frac{Qz a_z}{\pi \epsilon_0 (z^2 + a^2/\gamma)^{3/2}}$$

$$4-2 \quad \bar{E} = \frac{\rho_L}{\gamma \pi \epsilon_0 r} (a_r - a_\varphi)$$

$$5-2 \quad \text{(الف)} : \bar{E} = \frac{\rho_L}{\gamma \pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{|z|} (1 + \cos \varphi_x) a_x - \frac{1}{|z|} \sin \varphi_x a_r + \frac{\gamma}{z} a_z \right]$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_l R}{2\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} [-R \sin \varphi \hat{a}_x - R(1 - \cos \varphi) \hat{a}_y + z\varphi \hat{a}_z] \quad ۷-۲$$

$$\bar{E} = \frac{a\rho_s}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z+h)^2}} \right] \hat{a}_z \quad ۸-۲$$

$$\bar{E} = -\frac{\rho_{s0}}{16\epsilon_0} (\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z) \quad ۱۰-۲$$

؛ $|z| > a$ برای $\bar{E} = 0$ ، $|z| < a$ برای $\bar{E} = -(\rho_{s0}/\epsilon_0) \hat{a}_z$ (الف) $۱۱-۲$

$|z| > a$ برای $\bar{E} = \frac{a^2 |z|}{2\epsilon_0 z} \hat{a}_z$ ، $|z| < a$ برای $\bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(az - \frac{z^2}{2|z|} \right) \hat{a}_z$ (ب)

؛ $r > a$ برای $\bar{E} = \frac{\rho_{s0} a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{a}_r$ ، $r < a$ برای $\bar{E} = \frac{\rho_{s0} r}{2\epsilon_0 a} \hat{a}_r$ (الف) $۱۳-۲$

$r > a$ برای $\bar{E} = \frac{\rho_{s0} a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{a}_r$ ، $r < a$ برای $\bar{E} = \frac{\rho_{s0} r}{2\epsilon_0 a} \hat{a}_r$ (ب)

؛ $r > a$ برای $\bar{E} = \frac{\rho_{s0} a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{a}_r$ ، $r < a$ برای $\bar{E} = \frac{\rho_{s0} r}{2\epsilon_0 a} \hat{a}_r$ (الف) $۱۴-۲$

$r > a$ برای $\bar{E} = \frac{2\rho_{s0} a^2}{15\epsilon_0 r} \hat{a}_r$ ، $r < a$ برای $\bar{E} = \frac{\rho_{s0} r}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \hat{a}_r$ (ب)

$\bar{E} = \frac{\rho_{s0}}{2\epsilon_0} \bar{C}$ که برداری است از محور استوانه به شعاع a به محور استوانه به شعاع b و عمود بر آنها $۱۵-۲$

؛ $\rho_v = e^{-r}/r$ (ب) ؛ $r = b$ برای $\rho_s = -\frac{Q}{2\pi b^2}$ ، $r = a$ برای $\rho_s = \frac{Q}{2\pi a^2}$ (الف) $۱۶-۲$

$z = a$ برای $\rho_s = \frac{4}{3} \rho_{s0}$ ، $z = 0$ برای $\rho_s = \frac{1}{3} \rho_{s0}$ (ج)

$$V = \frac{\rho_{s0}(b-a)}{2\epsilon_0} \quad ۱۸-۲$$

$$V = \frac{\rho_{s0} a}{4\epsilon_0} \quad ۱۹-۲$$

$r < a$ برای $V = \frac{\rho_{s0}(3a^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$ ، $r > a$ برای $V = \frac{\rho_{s0} a^2}{2\epsilon_0 r}$ $۲۰-۲$

$$V = \frac{\rho_l R \varphi}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \quad ۲۲-۲$$

(الف) $۲۷-۲$ ؛ $\rho_v = V_0 \epsilon_0 \sinh x (\gamma \cos y - \sin y) e^{-y}$ (ب) یک دوقطبی باگشتاور

$$\bar{P} = 2\pi\epsilon_0 V_0 \hat{a}_x$$

فصل ۳:

$$R = \frac{l}{\pi [a, a' + a, d(t + \tau a)]} \quad ۲-۳$$

$$R = \frac{b-a}{\sqrt{\pi a b}} \quad ۳-۳$$

$$\rho_s = -V, \epsilon, x \quad , y > 0 \quad , x = 0 \quad \text{برای نیم صفحه} \quad \rho_s = -V, \epsilon, y \quad , x > 0 \quad , y = 0 \quad \text{برای نیم صفحه} \quad ۵-۳$$

$$\rho_s = V, \epsilon, \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{برای سطح} \quad xy = \tau \quad , x > 0 \quad , y > 0$$

$$\bar{E}_z = E, \hat{a}_z \quad (د) \quad , r = a \quad \text{برای} \quad \rho_s = \tau E, \epsilon, \cos \theta \quad (ج) \quad ; \quad \text{آری} \quad (الف) \quad ۶-۳$$

$$\bar{E}_s = \tau E, \left(\frac{\hat{a}_r}{r}\right) \cos \theta \hat{a}_r + E, \left(\frac{\hat{a}_r}{r}\right) \sin \theta \hat{a}_\theta$$

$$\rho_s = -\frac{\rho_{l1}}{\gamma \pi c} \quad \text{برای} \quad r = c \quad , \rho_s = \frac{\rho_{l1}}{\gamma \pi b} \quad \text{برای} \quad r = b \quad , \rho_s = 0 \quad \text{برای} \quad r = a \quad ۹-۳$$

$$\rho_s = \frac{\rho_{l1} + \rho_{l2}}{\gamma \pi d} \quad \text{برای} \quad r = d$$

$$\rho_{ps} = P, \sin \varphi \quad , \rho_p = 0 \quad \text{برای} \quad r = a \quad ۱۰-۳$$

$$\rho_{ps} = 0 \quad \text{برای} \quad r = b \quad , \rho_{ps} = -\frac{Q}{\gamma \pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad (ب) \quad ; \quad \epsilon = \frac{\epsilon, b^2}{r} \quad (الف) \quad ۱۱-۳$$

$$\rho_p = \frac{Q}{\gamma \pi b^2 r} \quad (ج) \quad \text{برای} \quad a < r < b$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_{l1} b}{\gamma \pi \epsilon, c r} \hat{a}_r \quad , r > c \quad \text{و} \quad r < a \quad \text{برای} \quad \bar{E} = \frac{\rho_{l1}}{\gamma \pi \epsilon, r} \hat{a}_r \quad (ب) \quad ; \quad \bar{D} = \frac{\rho_{l1}}{\gamma \pi r} \hat{a}_r \quad (الف) \quad ۱۲-۳$$

$$\rho_p = \frac{\rho_{l1}}{\gamma \pi c r} \quad , a < r < b \quad \text{برای} \quad \rho_p = 0 \quad (ج) \quad ; \quad b < r < c \quad \text{برای} \quad \bar{E} = \frac{\rho_{l1}}{\gamma \pi \epsilon, c} \hat{a}_r \quad , a < r < b$$

$$\rho_{ps} = -\frac{\rho_{l1}(c-b)}{\gamma \pi a c} \quad \text{برای} \quad r = a \quad , r = c \quad \text{و} \quad r = b \quad \text{برای} \quad \rho_{ps} = 0 \quad (د) \quad ; \quad b < r < c$$

$$\bar{E} = \frac{-\rho_{s1}}{\epsilon, (\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z \quad (ب) \quad ; \quad z < 0 \quad \text{برای} \quad \bar{D} = \frac{-\rho_{s1}}{\epsilon_r + 1} \hat{a}_z \quad , z > 0 \quad \text{برای} \quad \bar{D} = \frac{\rho_{s1} \epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \hat{a}_z \quad (الف) \quad ۱۳-۳$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_{s1}}{\epsilon, (\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z \quad , 0 < z < d \quad \text{برای} \quad \bar{E} = \frac{\rho_{s1} \epsilon_r}{\epsilon, (\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z \quad , z < 0$$

$$\rho_{ps} = 0 \quad , z = d \quad \text{برای} \quad \rho_{ps} = \frac{-\rho_{s1}(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 1} \quad (ج)$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_{s1}}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{z}{|z|} \hat{a}_z \quad , z > 0 \quad \text{برای} \quad \bar{D} = \frac{\rho_{s1} \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \hat{a}_z \quad , z < 0 \quad \text{برای} \quad \bar{D} = \frac{-\rho_{s1} \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \hat{a}_z \quad (الف) \quad ۱۵-۳$$

$$\rho_p = 0 \quad (ج) \quad ; \quad z = 0 \quad \text{برای} \quad \rho_{ps} = \frac{\rho_{s1}(\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (ب)$$

$$\bar{D} = \epsilon_1 \bar{E} \quad , z > 0 \quad \text{برای} \quad \bar{D} = \epsilon_2 \bar{E} \quad , \text{تمام نقاط} \quad \bar{E} = \frac{\rho_{s1}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{y \hat{a}_y + z \hat{a}_z}{y^2 + z^2} \quad (الف) \quad ۱۶-۳$$

۱۷-۳ (الف) $\bar{E} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r} \hat{a}_r$ برای تمام نقاط ، $\bar{D} = \epsilon_1 \bar{E}$ برای $z > 0$ ، $\bar{D} = \epsilon_2 \bar{E}$ برای $z < 0$ ،

(ب) $\rho_p = 0$ ، (ج) $\rho_m = 0$

۱۸-۳ (الف) $\bar{D} = \epsilon_1 \bar{E}$ ، $\bar{E} = \frac{E_0}{1 + \frac{z}{d}}$ ، $\bar{P} = \epsilon_1 \bar{E} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{z}{d}} \right] \hat{a}_z$ ، (ب) $\bar{E} = \frac{E_0}{1 + \frac{z}{d}} \hat{a}_z$ ، $\bar{D} = \epsilon_1 \bar{E} \hat{a}_z$

برای $\rho_m = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \bar{E} \cdot \hat{a}_z$ ، $\rho_p = 0$ برای $z = d$ ، $\rho_p = \frac{\epsilon_1 E_0}{2d} \left(1 + \frac{z}{d} \right)$ ، $z = 0$ ، $\rho_m = 0$ برای $z = 0$ ،

۱۹-۳ $\bar{E} = E_0 \hat{a}_z$ (میدان کل) برای $z < 1$ و $z > 2$ ، $\bar{E} = E_0 \left(1 - \frac{z}{2} \right) \hat{a}_z$ برای $1 < z < 2$

۲۰-۳ (الف) $C = \frac{A \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 t + \epsilon_2 (d-t)}$ ، (ب) $C = \frac{\epsilon_1 A}{2d} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$

(ج) $C = \frac{\epsilon_1 A}{2} \left[\frac{\epsilon_2}{d} + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 t + \epsilon_2 (d-t)} \right]$ ، (د) $C = \frac{\epsilon_1 A \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) (d-t) + \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) t}{2 \left(\frac{d-t}{\epsilon_2} + \frac{t}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{d-t}{\epsilon_1} + \frac{t}{\epsilon_2} \right)}$

۲۲-۳ (ب) $\rho_p = \frac{V_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \epsilon_1}{\ln \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) [(\epsilon_2 - \epsilon_1) z + \epsilon_1 d]}$ که V_0 اختلاف پتانسیل خازن است.

۲۵-۳ (الف) $V = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$ برای $a < r < b$ ، $V = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ برای $r < a$

$V = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{b}{r} - 1 \right)$ برای $b < r < c$ ، $V = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{b}{r} - 1 \right)$ برای $r > c$

(ب) $W_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(b-a)Q_1^2}{ab} + \frac{(c-b)Q_2^2}{c^2} \right]$

۲۶-۳ $W = \frac{2\pi a^2 (a-b) \rho_c^2}{b \epsilon_0}$

۲۷-۳ (الف) $\bar{E} = \bar{E}_0$ برای $z > d$ و $z < 0$ که $\bar{E}_0 = -E_0 (\sin \alpha \hat{a}_z + \cos \alpha \hat{a}_y)$ میدان اولیه است.

(ب) $\bar{E} = -E_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\epsilon_r} \hat{a}_z + \cos \alpha \hat{a}_y \right)$ برای $0 < z < d$ ، $\rho_m = -E_0 \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sin \alpha$

برای $z = d$ و $\rho_m = E_0 \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sin \alpha$ برای $z = 0$

۳۰-۳ $\bar{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{a}_z$

۳۲-۳ $\bar{F} = \frac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \hat{a}_z$

فصل ۴ :

۱-۴ (الف) $V = \frac{2V_0 x}{(2\epsilon + \epsilon_0)d}$ برای $x < \frac{d}{2}$ ، $V = \frac{V_0 [2\epsilon x + (\epsilon - \epsilon_0)d]}{(2\epsilon + \epsilon_0)d}$ برای $\frac{d}{2} < x < d$

(ب) $\rho_p = -\frac{2\epsilon_0 \epsilon V_0}{(2\epsilon + \epsilon_0)d}$ برای $x = 0$ ، $V = \frac{V_0 [2\epsilon x - (\epsilon - \epsilon_0)d]}{(2\epsilon + \epsilon_0)d}$ برای $\frac{d}{2} < x < d$

$$C = \frac{\gamma \epsilon_1 \epsilon}{(\gamma \epsilon + \epsilon_1) d} \quad (\text{د}) : x = \frac{\gamma d}{\gamma} \text{ برای } \rho_{ps} = -\frac{\gamma \epsilon_1 (\epsilon - \epsilon_1) V_0}{(\gamma \epsilon + \epsilon_1) d} \quad (\text{ج})$$

$$C = \frac{\gamma \epsilon_1}{\gamma d} \quad (\text{ب}) : \frac{V_0}{\gamma} \quad (\text{الف}) \quad ۲-۴$$

$$V(x, y) = V_0 \frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (\text{الف}) \quad ۳-۴$$

$$V(x, y) = \frac{\gamma V_0}{\gamma} \frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{V_0}{\gamma} \frac{\sinh\left(\frac{\gamma \pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\gamma \pi a}{b}\right)} \sinh\left(\frac{\gamma \pi y}{b}\right) \quad ۴-۴$$

$$, a < r < c \text{ برای } V(r) = V_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{c}\right) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \quad (\text{الف}) \quad ۵-۴$$

$$C = \frac{\gamma \pi \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{c}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{b}{c}\right)} \quad (\text{ب}) : c < r < b \text{ برای } V(r) = V_0 \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{r}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

$$C = \frac{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} , 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ برای } V(r) = V_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad ۶-۴$$

$$V(\varphi) = \frac{\epsilon V_0 \epsilon_1}{\pi(\epsilon_1 + \gamma \epsilon_2)} \varphi + \frac{\gamma V_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 + \gamma \epsilon_2} , 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\gamma} \text{ برای } V(\varphi) = \frac{\epsilon V_0 \epsilon_2}{\pi(\epsilon_1 + \gamma \epsilon_2)} \varphi \quad (\text{الف}) \quad ۷-۴$$

$$\vec{E} = -\frac{\epsilon V_0 \epsilon_1}{\pi(\epsilon_1 + \gamma \epsilon_2) r} \hat{a}_\varphi , 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\gamma} \text{ برای } \vec{E} = -\frac{\epsilon V_0 \epsilon_2}{\pi(\epsilon_1 + \gamma \epsilon_2) r} \hat{a}_\varphi \quad (\text{ب}) : \frac{\pi}{\gamma} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\gamma}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{\gamma} \text{ برای } \rho_{ps} = \frac{\epsilon V_0 \epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\pi(\epsilon_1 + \gamma \epsilon_2) r} \quad (\text{ج}) : \frac{\pi}{\gamma} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\gamma}$$

$$R = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\sigma \varphi \Delta} , V = V_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{R_2}\right)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \quad ۸-۴$$

$$: V(r, \varphi) = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(\frac{\gamma V_0}{m\pi}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma m} \sin(\gamma m \varphi) \quad (\text{الف}) \quad ۹-۴$$

$$\rho_s = \left(\frac{\gamma V_0 \epsilon_1}{\pi a}\right) \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sin(\gamma m \varphi) \quad (\text{ب})$$

$$f(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^n \leq V(r, \varphi) = \frac{V_0}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_0}{\gamma} + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} f(r) \left[\frac{\sin\left(\frac{n\varphi_0}{\gamma}\right)}{n} \right] \cos\left[n\left(\varphi - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\right] \right\} \quad ۱۰-۴$$

$$r > a \text{ برای } f(r) = \left(\frac{a}{r}\right)^n \text{ و } r < a$$

$$r > a \text{ برای } V(r, \varphi) = \left(\frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2 + 1} \frac{a^{\gamma}}{r^{\gamma}} - 1\right) E_0 r \cos \varphi , r < a \text{ برای } V(r, \varphi) = -\frac{\gamma E_0}{\epsilon_2 + 1} r \cos \varphi \quad ۱۱-۴$$

$$V(r, \theta) = V_0 \left(\frac{r}{a}\right) \cos \theta \quad ۱۲-۴$$

۱۳-۴ $r \geq a$ برای $V(r, \theta) = -E_0 \left[1 + \left(\frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r + 1} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] r \cos \theta$ (الف)

$r \leq a$ برای $V(r, \theta) = -E_0 \left(\frac{2\epsilon_r}{2\epsilon_r + 1} \right) r \cos \theta$

۱۴-۴ $r \geq a$ برای $\vec{E}(r, \theta) = E_0 \left[1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \cos \theta \hat{a}_r - E_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \sin \theta \hat{a}_\theta$

۱۵-۴ $\vec{E}(a, a, z) = \frac{ad^2 \rho_{li}}{\pi \epsilon_0 (a^2 - d^2)(a^2 + d^2)} (\hat{a}_x + \hat{a}_y)$ (ب)

۱۶-۴ $W = \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 d}$

۱۷-۴ (الف) چگالی خط بار تصویر: $\rho_l' = -\rho_l$ ، به فاصله $b = \frac{a^2}{d}$ از محور استوانه، واقع در صفحه خط

بار و محور استوانه: (ب) $C = \pi \epsilon_0 \left[\cosh^{-1} \left(\frac{d}{a} \right) \right]^{-1}$

۱۸-۴ (الف) $q' = -\frac{aq}{d}$ و به فاصله $\frac{a^2}{d}$ از مرکز کره، $q'' = Q + \frac{aq}{d}$ در مرکز کره؛

(ب) $V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r_3} \right)$ ، r_1 و r_2 فاصله نقطه میدان از مرکز کره، بار تصویر q' و بار q است؛

(ج) $V = \frac{Q + \left(\frac{a}{d} \right) q}{4\pi \epsilon_0 a}$

۱۹-۴ (الف) تصویر حلقه باری است به مرکز کره و هم صفحه با حلقه بار اصلی، شعاع حلقه تصویر برابر با

$c = \frac{a^2}{b}$ و چگالی توزیع بار آن برابر $-\frac{b}{a} \rho_{li}$ است؛ (ب) $V = 0$ برای $|z| < a$ ،

$V = \frac{\rho_{li}}{2\epsilon_0}$ (ج)؛ برای $|z| > a$ $V = \frac{\rho_{li}}{2\epsilon_0} \left[\frac{b}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{z^2 + c^2}} \right]$

$W = \frac{2\pi}{\epsilon_0} (\rho_{li} b^2)^2 \left(\frac{b-a}{b^2} - \frac{c-a}{c^2} \right)$ ۲۰-۴

۲۲-۴ $V(x, y, z) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \left[\frac{16V_0}{mn\pi^2 \sinh(c\sqrt{(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2})} \right]$

$\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh\left(\sqrt{(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2} z\right) \right]$

برای $0 \leq x \leq a$ و $0 \leq y \leq b$ و $0 \leq z \leq c$

۲۳-۴ $V(r) = \frac{\gamma k}{\epsilon_0 \sqrt{r}}$

۲۴-۴ (الف) برای $0 < y < a$ $V = \frac{V_0 \sigma y}{\sigma_1 a + \sigma_2 b}$ ، برای $a < y < a+b$ $V = \frac{V_0 [\sigma_2 y - (\sigma_2 - \sigma_1) a]}{\sigma_1 a + \sigma_2 b}$

(ب) $R = \frac{a}{\sigma_1} + \frac{b}{\sigma_2}$ (ج) $C = \frac{a\epsilon_1 \sigma_1^2 + b\epsilon_2 \sigma_2^2}{(a\sigma_1 + b\sigma_2)^2}$

۲۵-۴ الف) بار تصویر برابر $Q' = -\frac{a}{d} Q$ که در خارج کره هادی و به فاصله $\frac{a^2}{d}$ از مرکز کره و روی خطی که بار نقطه‌ای Q را به مرکز کره وصل میکند قرار می‌گیرد؛ ب) $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} \right)$ که r و r' فاصله نقطه میدان از بارهای Q و Q' می‌باشد.

فصل ۵:

$$۲-۵ \quad ۹۸۰۰ \text{ آمپر}$$

$$۴-۵ \quad \bar{B} = \frac{\mu \cdot I}{2a} \hat{a}_z$$

$$۶-۵ \quad \bar{B} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi z} (\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

$$۷-۵ \quad \bar{B} = -\frac{\gamma \mu \cdot I a^2 d}{2r^3} \hat{a}_r \quad \text{الف) } \bar{B} = \frac{\gamma \mu \cdot I a^2 d |z|}{z^3} \hat{a}_z \quad \text{ب) } \bar{B} = -\frac{\gamma \mu \cdot I a^2 d}{2r^3} \hat{a}_r \quad \text{برای نقاط دور از چهارقطبی و روی محور } z$$

برای نقاط دور از چهارقطبی و در صفحه xy

$$۸-۵ \quad \bar{B} = \frac{\mu \cdot I n \sin\left(\frac{\gamma \pi}{n}\right)}{2\pi \left[\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 \right]^{3/2}} \hat{a}_z$$

$$۹-۵ \quad \bar{B} = \left(\frac{\mu \cdot n I}{\gamma} \right) \left[\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + z^2}}{|z|} \right) - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \hat{a}_z$$

$$۱۰-۵ \quad \bar{B} = -\frac{\mu \cdot J_s}{\pi} \left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{y}\right) - \frac{y}{2a} \ln\left(\left(\frac{a}{y}\right)^2 + 1\right) \right] \hat{a}_x \quad \text{الف) } \bar{B} = -\frac{\mu \cdot J_s}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{y}\right) \hat{a}_x \quad \text{ب) } \bar{B} = -\frac{\mu \cdot J_s}{\pi} \left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{y}\right) - \frac{y}{2a} \ln\left(\left(\frac{a}{y}\right)^2 + 1\right) \right] \hat{a}_x$$

$$۱۱-۵ \quad \bar{B} = -\frac{\gamma}{4} \mu \cdot J_s \cdot \hat{a}_x \quad \text{برای } y > 0 \text{ و } z > 0 \quad \text{در سایر نقاط } \bar{B} = \frac{1}{4} \mu \cdot J_s \cdot \hat{a}_x$$

$$۱۲-۵ \quad \bar{B} = 0$$

$$۱۳-۵ \quad \bar{B} = \frac{\gamma \mu \cdot I}{\pi^2 (b+a)} \hat{a}_x$$

$$۱۴-۵ \quad \bar{B} = \frac{\mu \cdot J_s}{\gamma} (a^2 - y^2) \hat{a}_x \quad \text{الف) } \bar{B} = \mu \cdot J_s \cdot \hat{a}_x \quad \text{برای } |y| < a \quad \text{ب) } \bar{B} = \frac{\mu \cdot J_s}{\gamma} (a^2 - y^2) \hat{a}_x \quad \text{برای } |y| > a$$

$$\bar{B} = 0 \quad \text{برای } |y| < a \quad \text{ج) } \bar{B} = -\mu \cdot \left(ay - \frac{y^2}{|y|} \right) \hat{a}_x \quad \text{برای } |y| > a$$

$$\bar{B} = -\frac{\mu \cdot a^2}{\gamma} \frac{y}{|y|} \hat{a}_x \quad \text{برای } |y| > a$$

$$۱۵-۵ \quad \bar{B} = \frac{\mu \cdot I r}{2\pi a} \hat{a}_\rho \quad \text{الف) } \bar{B} = \mu \cdot J_s \cdot \left(\frac{a}{r} \right) \hat{a}_\rho \quad \text{برای } a < r < b \quad \text{ب) } \bar{B} = \frac{\mu \cdot I r}{2\pi a} \hat{a}_\rho \quad \text{برای } r > b \text{ و } r < a$$

$$\bar{B} = 0 \quad \text{برای } r < a \quad \text{برای } a < r < b \quad \bar{B} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi r} \hat{a}_\rho \quad \text{برای } a < r < b \quad \text{برای } b < r < c \quad \bar{B} = \frac{\mu \cdot I (c^2 - r^2)}{2\pi (c^2 - b^2)} \hat{a}_\rho$$

برای $r > a$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 J a^2}{(n+1)r} \hat{a}_\phi$ ، برای $r < a$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 J a^2}{(n+1)r} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \hat{a}_\phi$ (ج) ، برای $r > c$

۱۶-۵ $\vec{B} = \mu_0 n I \left(\frac{b}{r}\right) \hat{a}_\phi$ برای درون چنبره ، $\vec{B} = 0$ برای بیرون چنبره

۱۷-۵ $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$ در بیرون کره (r مختصه شعاعی در دستگاه استوانه‌ای است) ، $\vec{B} = 0$ در درون کره

۱۸-۵ $\vec{B} = \frac{1}{4} \mu_0 J c \hat{a}_z$

۱۹-۵ (الف) $\vec{J}_s = \frac{J}{a} \hat{a}_z$ برای $y=0$ و $\vec{J}_s = \frac{J}{a} \hat{a}_z$ برای $y=a$ ؛ (ب) $\vec{J} = 2J r \hat{a}_z$ برای $r < a$ و

(ج) $\vec{J}_s = \frac{J}{r} \sin \theta \hat{a}_\phi$ برای $r=a$ ؛ $\vec{J}_s = -J \frac{a^2}{b} \hat{a}_z$ برای $r=b$

۲۰-۵ $\vec{A} = \frac{\mu_0 \sin \theta a^2}{15r^2} \hat{a}_\phi$

۲۲-۵ $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$ (که r مختصه شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای میباشد) برای $\theta > 0$ ،

$\vec{B} = 0$ برای $\theta < 0$.

۲۶-۵ $V_m = \frac{I}{4} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)$

فصل ۶:

۱-۶ $\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 a^2}{4m_e} \vec{B}$

۲-۶ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - M \hat{a}_z$ ، $\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4} \left[\frac{\frac{l}{4} - z}{\sqrt{\left(\frac{l}{4} - z\right)^2 + a^2}} + \frac{\frac{l}{4} + z}{\sqrt{\left(\frac{l}{4} + z\right)^2 + a^2}} \right] \hat{a}_z$ برای درون دیسک ،

برای بیرون دیسک $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

۳-۶ $\vec{H} = -\frac{1}{4} M \hat{a}_z$ ، $\vec{B} = \frac{1}{4} \mu_0 M \hat{a}_z$

۴-۶ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_1}$ ، $\vec{B} = -\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} J_s \frac{z}{|z|} \hat{a}_z$ برای $z > 0$ ، $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_2}$ برای $z < 0$

۵-۶ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_1}$ ، $\vec{B} = \frac{I \mu_1 \mu_2 (y \hat{a}_z - z \hat{a}_y)}{\pi (\mu_1 + \mu_2) (y^2 + z^2)}$ برای $z > 0$ ، $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_2}$ برای $z < 0$

۷-۶ $\vec{B}_s = B \hat{a}_z$ برای $z < 1$ و $z > 2$ ، $\vec{B} = B \left(1 + \frac{z}{4}\right) \hat{a}_z$ برای $1 < z < 2$ ، $\vec{B}_s = 0$ برای $z < 1$ و

$\vec{B}_s = B \frac{z}{4} \hat{a}_z$ ، $z > 2$ برای $1 < z < 2$

۸-۶ (الف) $\mu_r = \mu \left(\frac{r}{a}\right)$ ؛ (ب) $\vec{J}_m = 0$ برای $r=a$ ، $\vec{J}_m = \frac{I(a-b)}{2\pi ab} \hat{a}_z$ برای $r=b$

فصل

۱-۷

۲-۷

$$a < r < b \text{ برای } \bar{J}_m = \frac{I}{\sqrt{\pi}ar} \hat{a}_z \text{ (ج)}$$

$$\bar{B}_r = B_0 (\sin \theta \hat{a}_r + \cos \theta \hat{a}_\theta) \quad ۱۰-۶$$

$$\bar{B}_a = B_0 (\hat{a}_z + \hat{a}_r) \text{ (ب)} ; \bar{B}_r = B_0 \left(\frac{r}{a} \hat{a}_z + \hat{a}_r \right) \text{ (الف)} \quad ۱۱-۶$$

$$L = \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}} \text{ داخلی} \quad ۱۲-۶$$

$$L = \sqrt{\pi} \mu_0 n^2 c a^2 \ln \left(\frac{r_2 a + b}{r_2 a - b} \right) \quad ۱۴-۶$$

$$M = \mu_0 n a c \ln \left(\frac{r_2 a + b}{r_2 a - b} \right) \quad ۱۵-۶$$

۱۶-۶ ناحیه $a < r < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ باید از ماده مغناطیسی پر شود.

$$L_{max} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\mu \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{2a^2} \right) - \mu_0 \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{2b^2} \right) \right]$$

$$L = \pi n^2 [\mu_0 a^2 + (\mu - \mu_0) b^2] \quad ۱۷-۶$$

۱۸-۶ ۱۳۰۰ آمپر دور

$$M_{1r} = \sqrt{L_{11} L_{22}} ; M_{1r} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} ; L_{22} = \frac{\mu N_2^2 S}{l} ; L_{11} = \frac{\mu N_1^2 S}{l} \quad ۱۹-۶$$

$$L = \frac{\mu S}{\sqrt{L_r}} [2(N_1^2 + N_2^2) - 2N_1 N_2] \text{ (ب)} ; M_{1r} = \frac{\mu S N_1 N_2}{\sqrt{L_r}} ; L_{11} = \frac{2\mu S N_1^2}{\sqrt{L_r}} \text{ (الف)} \quad ۲۰-۶$$

$$W_m = \pi \mu_0 \left[I_1^2 \ln \left(\frac{c}{a} \right) + I_2^2 \ln \left(\frac{c}{b} \right) + 2 I_1 I_2 \ln \left(\frac{c}{b} \right) \right] \quad ۲۲-۶$$

$$\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_0 I B_0 (\hat{a}_z - \hat{a}_r) \quad ۲۷-۶$$

$$P = \frac{\mu_0 I^2}{\sqrt{\pi} b^2} \quad ۲۸-۶$$

$$F = \frac{r}{\sqrt{\pi}} \frac{B^2 S}{\mu_0} \quad ۲۹-۶$$

۳۰-۶ ۲۱۳۷۱ کیلوگرم

$$T = \frac{N^2 I^2 \mu^2 S l'}{\sqrt{\mu_0} [(l+l') + \frac{\mu}{\mu_0} d]} \text{ (ب)} ; T = \frac{N^2 I^2 \mu^2 S l'}{\sqrt{\mu_0} (l+l')} \text{ (الف)} \quad ۳۱-۶$$

فصل ۷:

$$I = \frac{B_0 v a b}{R y (y+a)} \quad ۱-۷$$

$$i(t) = \left[\frac{B_0 b \omega}{R} \ln \left(\frac{y+a}{y} \right) \right] \sin \omega t + \frac{B_0 v a b}{R y (y+a)} \cos \omega t \quad ۲-۷$$

$$V_{ab} = -B \cdot v \cdot [d + (v \cdot \tan \alpha)t] \quad ۳-۷$$

$$i(t) = \frac{B \cdot v \cdot l}{R} \exp[-(B \cdot l^2 / mR)t] \quad (ب) ; \bar{v} = v \cdot \exp[-(B \cdot l^2 / mR)t] \hat{a}_x \quad (الف) \quad ۴-۷$$

$$V_{ab} = \left(\frac{Y}{\pi}\right) B \cdot \omega d \sin \omega t \quad ۵-۷$$

$$i(t) = \frac{\mu \cdot I \cdot \omega \cdot b}{2\pi R} \ln \left[\frac{h(h+a+d)}{(h+a)(h+d)} \right] \sin \omega t \quad ۷-۷$$

$$r > a \text{ برای } \bar{W} = -\frac{1}{2\pi} \mu \cdot H \cdot \omega a^2 \cos \omega t \hat{a}_\phi, \quad r < a \text{ برای } \bar{E} = -\frac{1}{2\pi} \mu \cdot H \cdot \omega r \cos \omega t \hat{a}_\phi \quad ۹-۷$$

$$\bar{H} = \frac{E_s}{2\pi} \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_y, \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad ۱۱-۷$$

$$x=d \text{ و } x=0 \text{ برای } \bar{J}_z = \frac{E_s}{120\pi} \sin\left(\frac{\pi ct}{d}\right) \hat{a}_z \quad (ب) ; \bar{H} = \frac{E_s}{120\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi ct}{d}\right) \hat{a}_y \quad (الف) \quad ۱۲-۷$$

$$\bar{H}_r = \frac{E_s}{40\pi} \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_y, \quad \bar{H}_z = \frac{1}{120\pi} [E_s \cos(\omega t - \beta z) - E_s \cos(\omega t + \beta z)] \hat{a}_z \quad (الف) \quad ۱۳-۷$$

$$\frac{E_z}{E_s} = \frac{1}{2}, \quad \frac{E_r}{E_s} = -\frac{1}{2} \quad (ب)$$

$$z < 0 \text{ برای } \bar{H} = \frac{J_s}{2} \cos(\omega t + \beta z) \hat{a}_y, \quad z > 0 \text{ برای } \bar{H} = -\frac{J_s}{2} \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_y \quad ۱۵-۷$$

$$z < 0 \text{ برای } E = -60\pi J_s \cos(\omega t + \beta z) \hat{a}_z, \quad z > 0 \text{ برای } \bar{E} = -60\pi J_s \cos(\omega t - \beta z) \hat{a}_z$$

در همه جا $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon_r}$ است.

$$\bar{H} = -\frac{I \Delta \beta^2}{2\pi} \sin \theta \left[\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right] e^{j\beta r} \hat{a}_\phi, \quad \bar{A} = \frac{\mu \cdot I \Delta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \hat{a}_z \quad ۱۸-۷$$

$$\bar{E} = -20 \cdot I \Delta \beta^2 \left\{ 2 \cos \theta \left[\frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right] \hat{a}_r + \sin \theta \left[\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right] \hat{a}_\phi \right\} e^{j\beta r}$$

$$\frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\epsilon \nabla V) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad -\mu \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \right) + \mu \epsilon \nabla \left[\frac{1}{\mu \epsilon} \nabla \cdot (\epsilon \bar{A}) \right] - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} \quad ۲۱-۷$$

$$f(t) \text{ میدان الکترومغناطیسی برای } = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] \bar{E}(\bar{r}, \omega) d\omega \quad ۲۳-۷$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (ب) ; \hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \text{ که } \gamma = j\omega \sqrt{\mu \hat{\epsilon}}, \quad \bar{H} = E_s \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}}{\mu}} e^{-\gamma z} \hat{a}_y \quad (الف) \quad ۲۵-۷$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \hat{\epsilon}} \left[1 + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]$$

فہرست منابع

- [1] Cheng, D. K., *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Reading, MA, Addison Wesley, 1993.
- [2] Clemmow, P. C., *An Introduction to Electromagnetic Theory*, New York, Cambridge University Press, 1973.
- [3] Hayt, W. H., *Engineering Electromagnetics*, New York, McGraw-Hill, 5th ed., 1989.
- [4] Johnk, C. T. A., *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*, New York, John Wiley & Sons, 2nd ed., 1988.
- [5] Lorrain, P., and D. R. Corson, *Electromagnetic Fields and Waves*, San Francisco, W. H. Freeman and Company, 2nd ed., 1972.
- [6] Magid, L. M., *Electromagnetic Fields, Energy, and Waves*, New York, John Wiley & Sons, 1972.
- [7] Neff, H. P., *Basic Electromagnetic Fields*, New York, Harper & Row, 2nd ed., 1987.
- [8] Plonus, M. A., *Applied Electromagnetics*, New York, McGraw-Hill, 1978.
- [9] Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communications Electronics*, New York, John Wiley & Sons, 2nd ed., 1984.
- [10] Rao, N. N., *Elements of Engineering Electromagnetics*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 4th ed., 1994.
- [11] Rao, N. N., *Basic Electromagnetics with Applications*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1972.
- [12] Sadiku, M. N. O., *Elements of Electromagnetics*, New York, Saunders College Publishing, 1989.