فرادرس
فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

آموزش الکترومغناطیس ۱
(Electromagnetics)

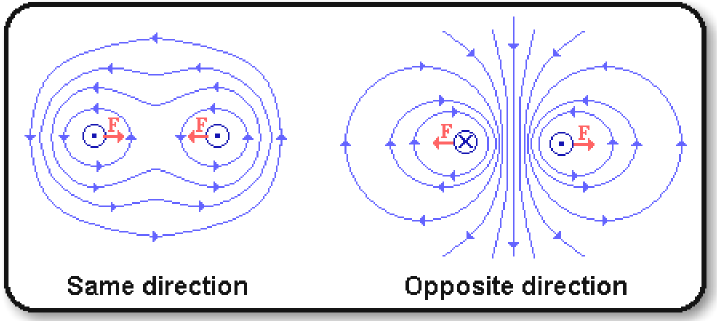
درس پنجم: مغناطواستاتیک

نام مدرس:

متین هنردوست

دکترای فیزیک

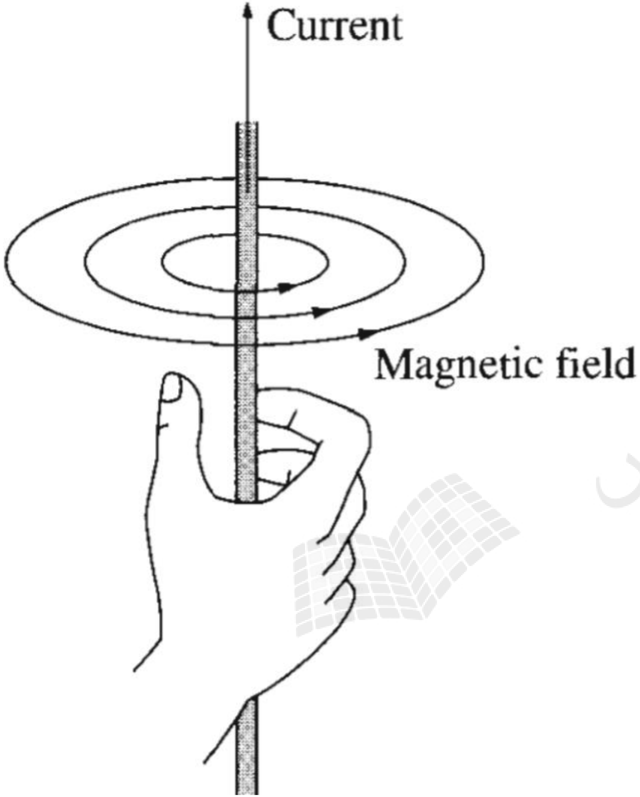
فصل پنجم: مغناطواستاتیک



❖ اطراف سیم حامل جریان خاصیت منحصر به فردی احساس می‌شود. این را نمی‌توان با تکیه بر مفاهیم الکترواستاتیک توضیح داد چرا که سیم حامل جریان به لحاظ الکتریکی خنثی است و فقط شامل بارهای منفی آزاد است یعنی بارهای منفی می‌توانند در سیم حرکت کنند و متعلق به اتم خاصی نیستند. همچنین طبق شکل بالا نتیجه مشاهده برای سیم‌های موازی با جریان‌های همسو کاملا متفاوت از جریان‌های ناهمسو می‌باشد.

نتایج مشاهدات نشان می‌دهند بنا به خاصیتی اطراف یک سیم حامل جریان به سیم دیگر نیرو وارد می شود. این خاصیت منحصر به فرد میدان مغناطیسی $\vec{B}$ نام دارد. بنابراین بار متحرک علاوه بر میدان الکتریکی، تولید کننده میدان مغناطیسی هم هست.

- از آنجا که در تعریف میدان مغناطیسی مفهوم حرکت وارد می‌شود علی الاصول میدان به چارچوبی که انتخاب می‌شود بستگی پیدا می‌کند.



- جهت میدان مغناطیس با قاعده دست راست مشخص می‌شود.
- به بار متحرک با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی مفروض نیروی لورنتس به صورت زیر وارد می‌شود:

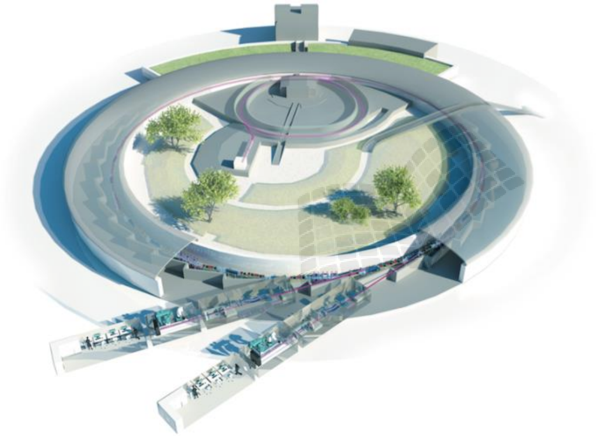
$$F_{mag} = Q(v \times B)$$

اگر در محیط علاوه بر میدان مغناطیسی میدان الکتریکی نیز وجود داشته باشد به ذره نیروی زیر وارد می‌شود:

$$F = Q[E + (v \times B)]$$

در مغناطواستاتیک مساله مهم و اصلی یافتن میدان مغناطیسی است. در این فصل به دنبال یافتن میدان‌های مغناطیسی هستیم که با زمان تغییر نمی‌کنند. این میدان‌ها از جریان‌های پایا حاصل می‌شوند.

از آنجایی که میدان مغناطیسی روی بار متحرک نیروی جدید لورنتس را اعمال می‌کند قبل از هر چیز به این پرسش پاسخ می‌دهیم که آیا این نیروی جدید منجر به مسیر خاصی برای ذره متحرک می‌شود؟



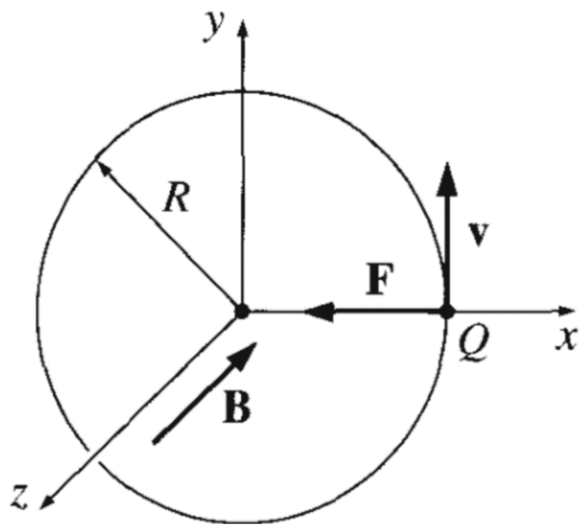
دو نوع حرکت ویژه

- حرکت سیکلوترونی
- منحنی چرخزاد

اولین مسیر ذره متحرک، دایره‌ای است که نیروی مرکزگرای آن توسط نیروی مغناطیسی تامین شود:

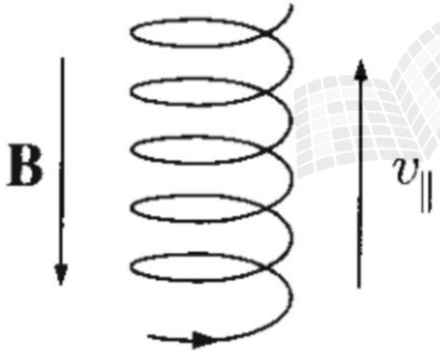
$$F_{mag} = Q(v \times B)$$

$$QvB = m\frac{v^2}{R} \quad or \quad \underbrace{p = QBR}_{\text{تکانه خطی}}$$



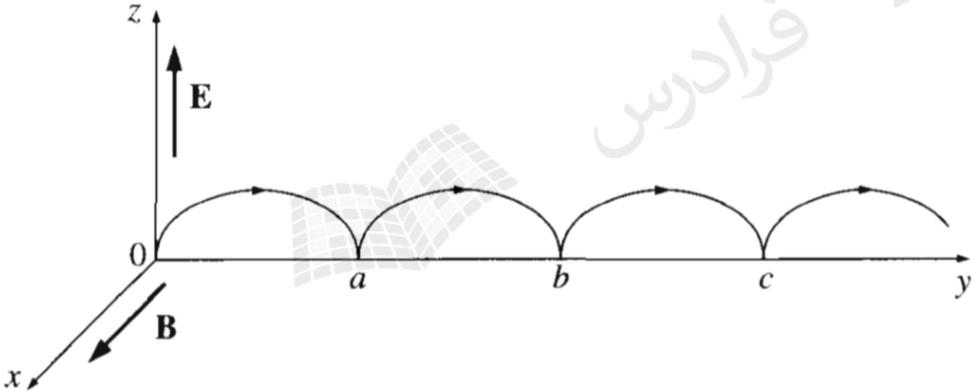
اگر ذره دارای سرعتی در جهت میدان مغناطیسی نیز باشد یعنی $\vec{v}_{\parallel} = v\hat{B}$ آنگاه طبق $\hat{v}_{\parallel} \times \vec{B} = \vec{0}$ نیرویی در جهت میدان به ذره وارد نمی‌شود و ذره سرعت یکنواخت خود را در راستای میدان مغناطیسی حفظ می‌کند.

در این صورت مسیر یک ذره مارپیچی در راستای میدان می‌شود:



حرکت چرخزاد

حرکت چرخزاد زمانی رخ می‌دهد که ذره باردار متحرک وارد محیطی گردد که در آن میدان الکتریکی عمود بر میدان مغناطیسی باشد:



$$\vec{B} = B\,\hat{x}$$

$$\vec{E} = E\,\hat{z}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{0}$$

تحلیل حرکت چرخزاد

$$v = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

سرعت ذره در هر لحظه

$$F = Q[E + (v \times B)]$$

نیروی وارد شده به ذره

$$v \times B = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

$$F = Q(E + v \times B) = Q(E\hat{z} + B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}) = ma = m(\ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z})$$

با تفکیک معادلات مربوط به دو جهت x و y داریم:

$$QB\dot{z} = m\ddot{y}, \qquad QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

با تعریف $\omega \equiv \frac{QB}{m}$ می‌توان معادلات را ساده و سپس حل نمود

$$\ddot{y} = \omega \dot{z}, \qquad \ddot{z} = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

که دارای جواب‌های زیر هستند:

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + (E/B)t + C_3$$

$$z(t) = C_2 \cos \omega t + C_1 \sin \omega t + C_4$$

ثوابت انتگرالی از شرایط اولیه به دست می‌آیند

اگر شرایط اولیه رها شدن از حالت سکون در مبداء مختصات باشد یعنی داشته باشیم:

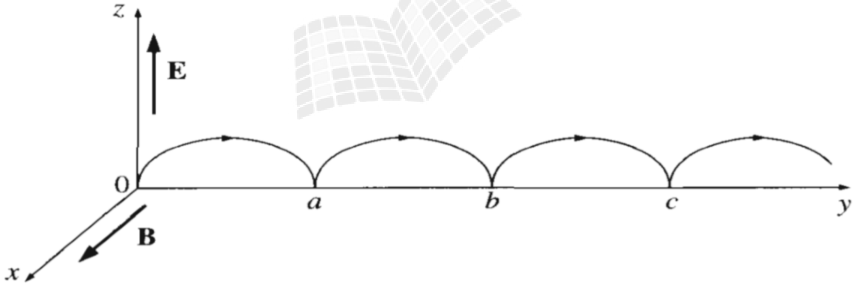
$$(\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0)$$

$$(y(0) = z(0) = 0)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t), \qquad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t)$$

دیده می‌شود که امتداد حرکت نه در راستای میدان الکتریکی است نه در راستای میدان مغناطیسی!



نتیجه مهم این دو بررسی:

نیروی مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد

$$dW_{mag} = F_{mag} \,.\, dl = Q(v \times B) \,.\, v\, dt = 0$$

به عبارت دیگر نیروی مغناطیسی می‌تواند جهت حرکت یک ذره را تغییر دهد اما اندازه آن را کم و زیاد نمی‌کند!

جریان

باری که در واحد زمان از هر نقطه می‌گذرد

واحد جریان الکتریکی آمپر نامیده می‌شود

$$1\,A = 1\,C/s$$

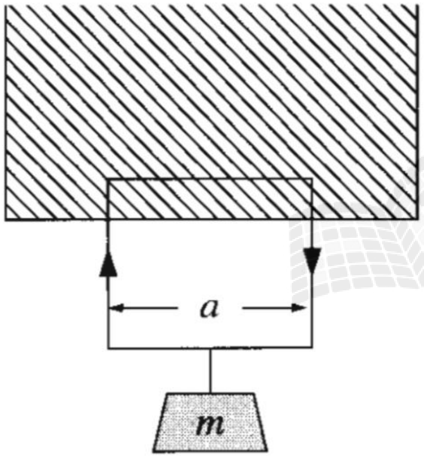
به این ترتیب جریان حاصل از بارخطی $I = \lambda v$ خواهد بود.

نیروی وارد بر سیم حامل جریان:

$$F_{mag} = \int (v \times B)dq = \int (v \times B)\lambda dl = \int (I \times B)dl$$

مثال مهم

به یک حلقه مستطیل شکل وزنه‌ای به جرم m متصل است. این حلقه از یک انتها آویخته شده و انتهای دیگر در یک میدان مغناطیسی B بطرف داخل صفحه و در ناحیه هاشور زده قرار دارد. به ازای چه جریانی در حلقه نیروی مغناطیسی حاصل به سمت بالا با نیروی وزن حلقه که به سمت پایین است برابر می‌شود؟



حل:

ابتدا جریان حلقه را با توجه به جهت نیروی وزن تعیین می‌کنیم به نحوی که نیروی مغناطیسی روی حلقه به سمت بالا باشد.

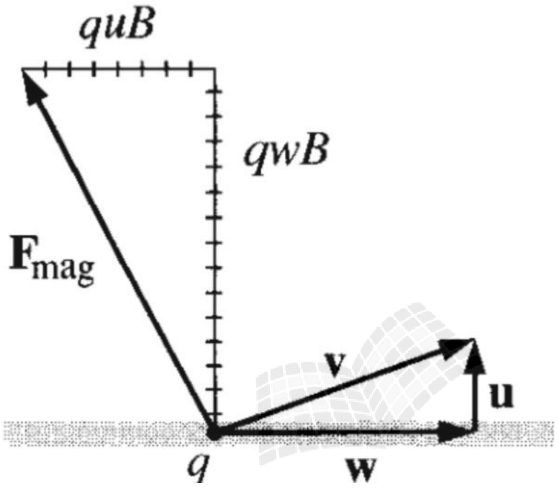
$$F_{mag} = I\int (dl \times B) \longrightarrow I = \frac{mg}{Ba}$$

ممکن است این سوال مطرح شود که اگر مقدار جریان از مقدار بالا بیشتر باشد و در نتیجه حلقه بالا کشیده شود آیا بدین معناست که نیروی مغناطیسی کار انجام داده است؟ به نظر می‌رسد در این حالت نیروی مغناطیسی کاری به اندازه مقدار زیر انجام می‌دهد:

$$F_{vert} = \lambda a\omega B = IBa$$

$$W_{mag} = F_{mag}h = IBah$$

برای پاسخ به این پرسش باید به جهت صحیح نیروی مغناطیسی وارد به بار متحرک در حرکت حلقه رو به بالا توجه کنیم

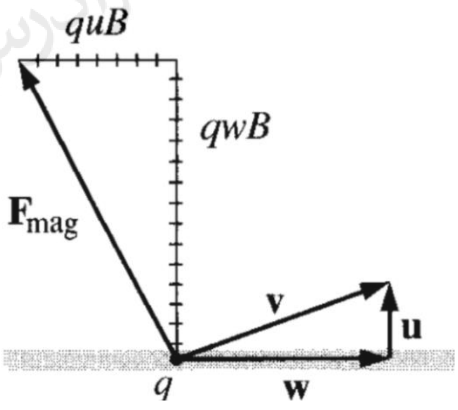


همانطور که مشاهده می‌شود در صورتی که حلقه به بالا کشیده شود ذره‌های باردار در سیم حامل جریان دارای مولفه سرعت عمودی (بخاطر حرکت رو بالای حلقه) و سرعت افقی (به دلیل شارش جریان در راستای سیم) خواهند بود.

نیروی مغناطیسی هنوز بر جهت حرکت (برآیند سرعت) عمود است بنابراین کاری انجام نمی‌دهد.

برای بررسی باید به مولفات نیروی مغناطیسی توجه کنیم

$$\begin{cases} F_{\perp}^{mg} = q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} & \text{مولفه عمودی (در راستای محور y)} \\ F_{\parallel}^{mg} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} & \text{مولفه افقی (در راستای محور x)} \end{cases}$$



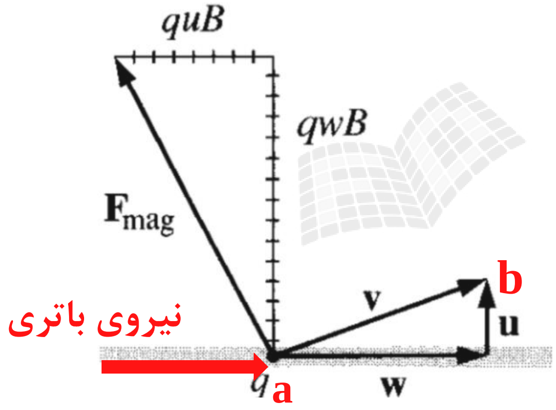
طبق شکل نیروی افقی به سمت چپ وارد می‌شود برای اینکه ذرات باردار به سمت راست حرکت کنند باید عاملی - که باتری است - نیرویی به سمت راست وارد کند.

بنابراین دو نیرو وارد می‌شود نیروی مغناطیسی لورنتسی که کار انجام نمی‌دهد و نیروی باتری که سبب می‌شود ذرات باردار حرکت افقی خود رو حفظ کنند.

کار نیروی باتری در جابجایی ذره باردار از نقطه a به نقطه b

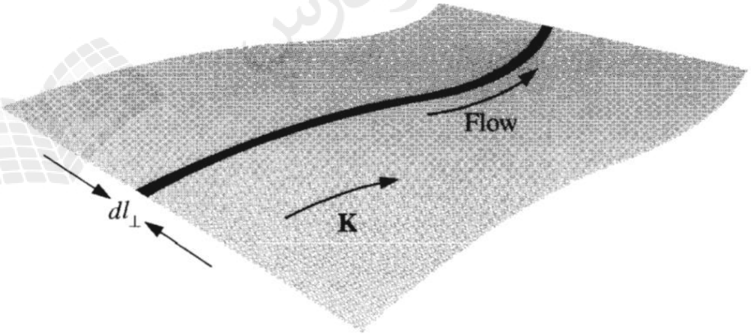
$$W_{battery} = \lambda a B \int u\omega \, dt = \underbrace{IBah}$$

کار محاسبه شده در ابتدای بحث که به اشتباه به نیروی مغناطیسی نسبت داده شده



چگالی جریان سطحی

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_\perp} \qquad \vec{K} = \sigma\vec{V}$$

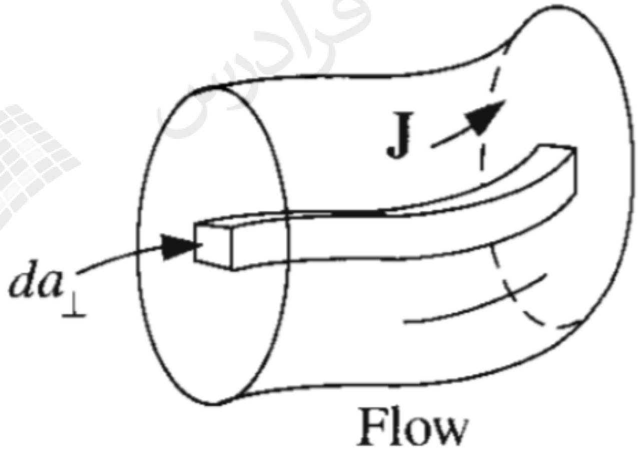


$$\vec{F}_{mag} = \int (\vec{v} \times \vec{B})\sigma da = \int (\vec{K} \times \vec{B})\, da$$

چگالی جریان حجمی

$$\vec{J} \equiv \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}}$$

$$\vec{J} = \rho\vec{V}$$



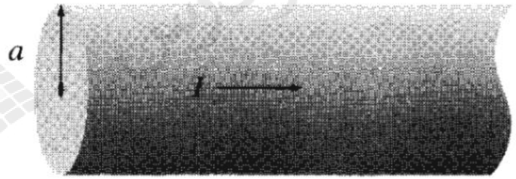
$$\vec{F}_{mag} = \int (\vec{v} \times \vec{B})\rho d\tau = \int (\vec{J} \times \vec{B})\, d\tau$$

رابطه مهم

$$\sum_{i=1}^{n} (\ )q_i v_i \ \sim \int_{line} (\ )\vec{I}\, dl \sim \int_{surface} (\ )\vec{K}\, da \sim \int_{volume} (\ )\vec{J}\, d\tau$$

معادله پیوستگی

$$\vec{J} = \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}}$$



$$I = \int_S J \; da_{\perp} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

با توجه به قضیه دیورژانس داریم:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau$$

$$\int_V (\vec{\nabla}.\vec{J})d\tau = -\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho\, d\tau\right) = -\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d\tau$$

علامت منفی متناسب با تغییرات بار داخل حجم V است

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

پایستگی بار موضعی

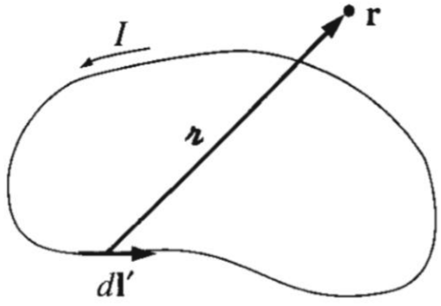
میدان مغناطیسی جریان یکنواخت: قانون بیوساوار

بارهای ساکن ⟵ میدان‌های الکتریکی ثابت: الکترواستاتیک

جریان‌های یکنواخت ⟵ میدان مغناطیسی ثابت: مغناطواستاتیک

جریان ثابت (زمانی که سرعت حرکت بارها کم و زیاد نشود):

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=0$$



جریان ثابت چه میدان مغناطیسی‌ای تولید می‌کند؟

یک جریان رشته‌ای به صورت شکل در نظر بگیرید:

میدان مغناطیسی مطابق قانون بیوساوار محاسبه می‌شود:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, d\acute{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\overrightarrow{d\acute{l}} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad {}^{N}/_{A^2}$$

تراوایی خلاء

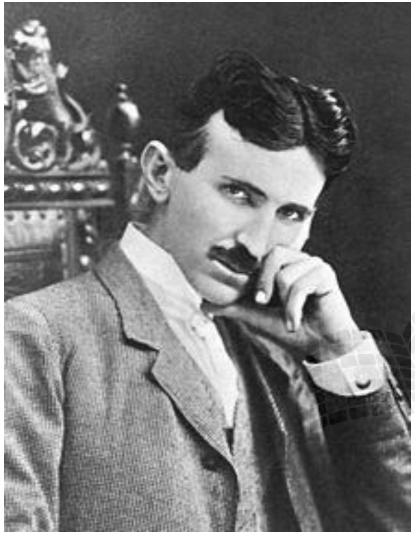
اگر توزیع جریان سطحی یا حجمی داشته باشیم:

$$\int_{\text{line}} (\quad)\mathbf{I}\, dl \sim \int_{\text{surface}} (\quad)\mathbf{K}\, da \sim \int_{\text{volume}} (\quad)\mathbf{J}\, d\tau$$

واحد میدان مغناطیسی تسلا است.

به یاد داشته باشید که یک تسلا میدان بزرگی است!

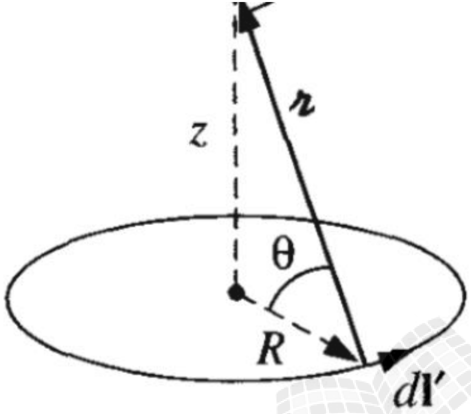
$$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N/(A \cdot m)}.$$



Nicola Tesla

مثال

میدان مغناطیسی در فاصله z از مرکز حلقه‌ای به شعاع R را که حامل جریانی به اندازه I است را حساب کنید:



$$\begin{cases} \overrightarrow{d\acute{l}} = Rd\phi\hat{\phi} \\ \vec{r} = z\,\hat{z} \\ \vec{\acute{r}} = R\,\hat{s} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(R\,d\phi)\hat{\phi}\ \times (z\,\hat{z} - \ R\,\hat{s})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

کرل و دیورژانس میدان مغناطیسی

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\, d\tau'.$$

$\mathbf{B}$ is a function of (x, y, z),

$\mathbf{J}$ is a function of (x', y', z'),

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\,\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\,\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\,\hat{\mathbf{z}},$$

$$d\tau' = dx'\,dy'\,dz'.$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}.\left(\vec{J}\times\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)d\acute{\tau}$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{J}\times\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{J})}_{\text{صفر است}} - \vec{J}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)}_{\text{صفر است}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{B} = 0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \right) d\tau'$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \right) = \vec{J} \left(\vec{\nabla} . \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \right) - (\vec{J} . \vec{\nabla}) \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

جملات شامل مشتق J نسبت به مختصه بدون پریم را به دلیل صفر بودن ننوشتیم!

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \overbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\Big[\int J(\acute{\vec{r}})4\pi\delta^3(\vec{r}-\acute{\vec{r}})\,d\acute{\tau}}^{\mu_0 J(\vec{r})} - \underbrace{\int \underbrace{(\vec{J}.\,\vec{\nabla})}_{\acute{\vec{\nabla}} = -\vec{\nabla}}\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\,d\acute{\tau}\Big]}_{(\vec{J}.\acute{\vec{\nabla}})\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}}$$

مولفه x انتگرال دوم را محاسبه می‌کنیم نتیجه برای سایر مولفات عینا تکرار می‌شود.

محاسبه انتگرال دوم

$$\left(\vec{J}.\vec{\acute{\nabla}}\right)\left(\frac{x-\acute{x}}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^{3}}\right)=\vec{\acute{\nabla}}.\left[\frac{x-\acute{x}}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^{3}}\vec{J}\right]-\underbrace{\cancel{\left(\frac{x-\acute{x}}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^{3}}\right)\left(\vec{\acute{\nabla}}.\vec{J}\right)}}_{\text{صفر است}}$$

$$\vec{\acute{\nabla}}=-\vec{\nabla}$$

$$\left[-\left(\vec{J}.\vec{\nabla}\right)\frac{\hat{r}}{r^{2}}\right]_{x}=\vec{\acute{\nabla}}.\left[\frac{x-\acute{x}}{\left|\vec{r}-\vec{\acute{r}}\right|^{3}}\vec{J}\right]$$

$$\left[-(\mathbf{J}\cdot\nabla)\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right]_x = \nabla'\cdot\left[\frac{(x-x')}{\mathscr{r}^3}\mathbf{J}\right]$$

با استفاده از قانون دیورژانس داریم:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \nabla'\cdot\left[\frac{(x-x')}{\mathscr{r}^3}\mathbf{J}\right] d\tau'}_{\text{مولفه x انتگرال دوم که می‌خواستیم محاسبه کنیم}} = \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \frac{(x-x')}{\mathscr{r}^3}\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}'}_{\text{مجازیم که حجم انتگرال‌گیری را به تمام فضا گسترش دهیم در این صورت انتگرال سطحی صفر می‌شود}}.$$

مولفه x انتگرال دوم که می‌خواستیم محاسبه کنیم

مجازیم که حجم انتگرال‌گیری را به تمام فضا گسترش دهیم در این صورت انتگرال سطحی صفر می‌شود

نتیجه مهم کرل میدان مغناطیسی جریان پایا

قانون آمپر:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{B}).d\vec{a} = = \oint_S \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 \int \vec{J}.\overrightarrow{da} = \mu_0 \underbrace{I_{enc}}_{\text{جریان محصور در حلقه}}$$

نکات مهم در خصوص قانون آمپر

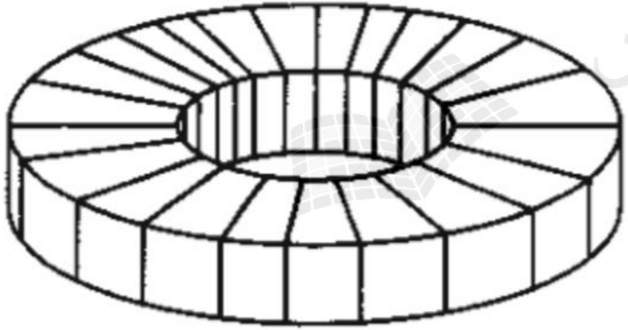
- جهت چرخش روی مسیر بسته به نحوی است که اگر انگشتان را در راستای مسیر انتگرال‌گیری حلقه کنیم شصت در جهت جریان باشد (قاعده دست راست).

- همانند قانون گائوس در الکترواستاتیک زمانی که توزیع هندسی جریان تقارن مناسبی داشته باشد استفاده از قانون آمپر برای محاسبه میدان مغناطیسی انتخاب مناسبی است. این موارد عمدتاً مربوط به مسائل خطوط جریان نامتناهی مستقیم، صفحات نامتناهی، سیملوله و چنبره می‌شود.

مثال

یک پیچه چنبره‌ای از حلقه‌ای دایره‌ای (دونات) شکل تشکیل شده که سیم جریان دور آن پیچیده شده است. سیم پیچ‌ها یکنواخت و بسیار نزدیک بهم هستند به گونه‌ای که هر دور از آنها را می‌توان حلقه بسته در نظر گرفت. شکل مقطع مهم نیست اما برای سادگی مستطیل شکل فرض شده است. میدان مغناطیسی را بیابید.

حل:



حلقه آمپری دایره ای به شعاع s داخل و خارج پیچه در نظر می گیریم. از طرفی با قاعده دست راست تشخیص می‌دهیم که میدان مغناطیسی در راستای $\hat{\phi}$ است.

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

برای حلقه آمپری بین دو
شعاع داخلی و خارجی پیچه

$$\int (B\hat{\phi}).(sd\phi\,\hat{\phi}) = \mu_0 NI \longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi s}\hat{\phi}$$

برای حلقه آمپری با شعاع بزرگتر
از R مقدار I محصور صفر است

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \vec{0}$$

پتانسیل برداری مغناطیسی

از آنجایی که دیورژانس میدان مغناطیسی جریان‌های پایا صفر است می‌توان میدان مغناطیسی را کرل یک میدان برداری دیگر که پتانسیل برداری می‌نامیم قلمداد کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.}$$

در این صورت کرل میدان مغناطیسی مطابق زیر خواهد بود:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

تعریف میدان مغناطیسی بر مبنای پتانسیل برداری به ما یک آزادی عمل در انتخاب پتانسیل برداری می‌دهد چرا که می‌توان به میدان برداری گرادیان هر تابع نرده‌ای دلخواه اضافه کرد بدون آنکه میدان مغناطیسی عوض شود (کرل گرادیان صفر است):

$$(\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\lambda)$$

هر دو پتانسیل برداری $\vec{A}$ و $\overrightarrow{A_0}$ یک میدان مغناطیسی را توصیف می‌کنند:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \overrightarrow{A_0}$$

بنابراین از این آزادی انتخاب استفاده کرده و پتانسیل برداری را انتخاب می‌کنیم که دیورژانس صفر داشته باشد

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

در این صورت پتانسیل برداری در معادله پواسون برداری صدق می‌کند:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla\underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{\text{صفر است}} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.}$$

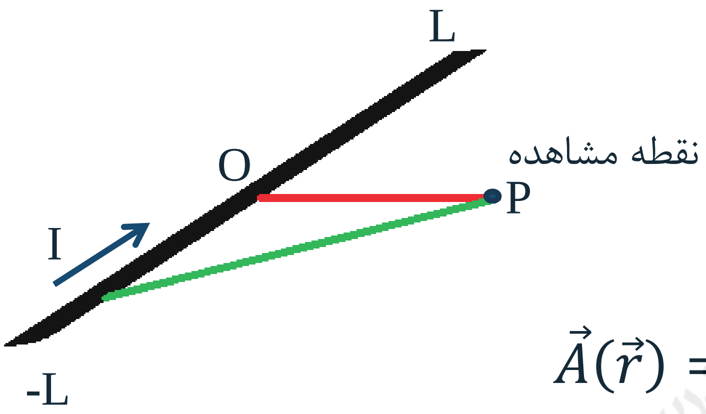
معادله پواسون گون قبل اگر توزیع جریان در بینهایت به سمت صفر میل کند دارای جواب زیر است:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\, d\tau'.}$$

برای توزیع جریان سطحی یا رشته‌ای رابطه زیر را داریم:

$$\int_{\text{line}} (\quad)\mathbf{I}\, dl \sim \int_{\text{surface}} (\quad)\mathbf{K}\, da \sim \int_{\text{volume}} (\quad)\mathbf{J}\, d\tau$$

مثال



پتانسیل برداری درست بالاتر از مرکز یک سیم بلند رشته‌ای مستقیم به طول 2 L را بدست آورید.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \overrightarrow{dl'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \qquad \vec{r} = s\,\hat{s} \;, \qquad \vec{r'} = z\,\hat{z}$$

با توجه به جهت میدان مغناطیسی می‌فهمیم که پتانسیل برداری فقط مولفه z (در راستای جریان) دارد

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{I\,dz}{\sqrt{z^2 + s^2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{0}^{L} \frac{I\,dz}{\sqrt{z^2 + s^2}}$$

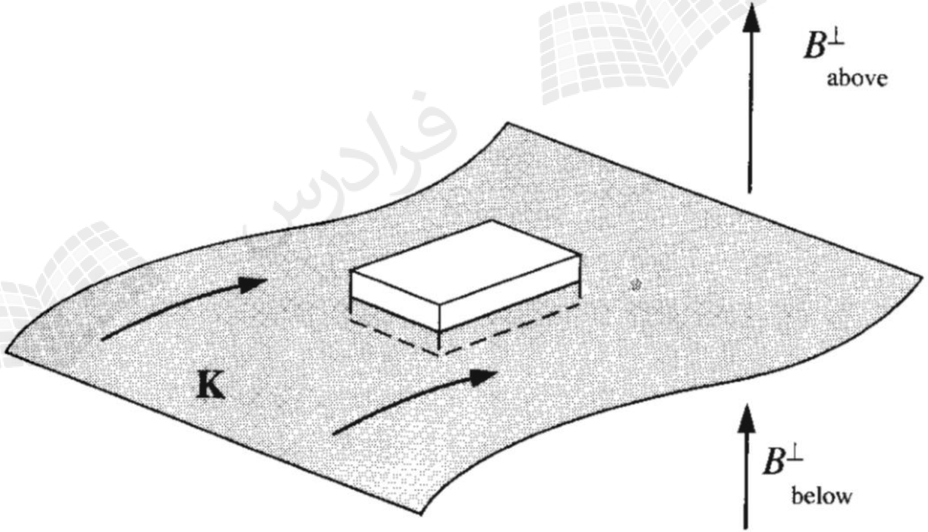
$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\left(z + \sqrt{z^2 + s^2}\right)\right]_0^L = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left[\frac{L}{s}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{s^2}{L^2}}\right)\right]$$

در حالت حدی $L \ll s$ عبارت بالا معادل پتانسیل برداری سیم رشته‌ای بی نهایت بلند و به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{2L}{S}}$$

شرایط مرزی در مغناطواستاتیک

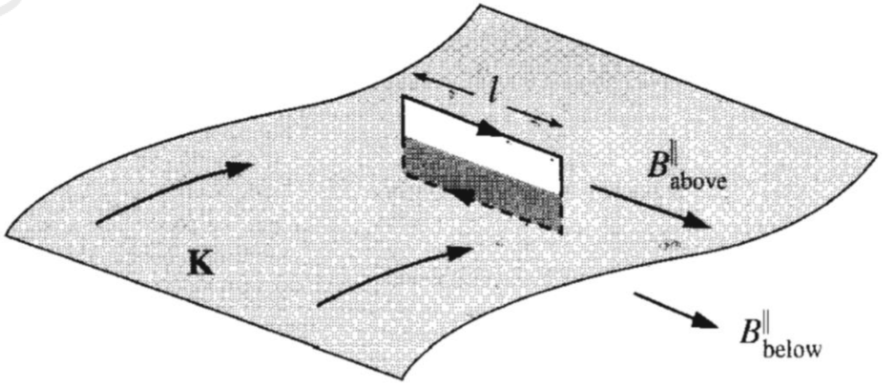
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad \longrightarrow \quad \boxed{B_{\text{above}}^{\perp} = B_{\text{below}}^{\perp}.}$$



$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J},}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(B^{\parallel}_{\text{above}} - B^{\parallel}_{\text{below}}\right) l = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 K l,$$

$$\boxed{B^{\parallel}_{\text{above}} - B^{\parallel}_{\text{below}} = \mu_0 K.}$$



شرایط مرزی بر حسب پتانسیل برداری

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A}^{\perp}_{above} = \vec{A}^{\perp}_{below}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \longrightarrow \quad \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi, \quad \longrightarrow$$

شارگذرنده از حلقه آمپری با ارتفاع نزدیک به صفر تقریبا صفر است

$$\vec{A}^{\parallel}_{above} = \vec{A}^{\parallel}_{below}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{A}_{above} = \mathbf{A}_{below},}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}}, \\[2em] \dfrac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \dfrac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}. \end{cases}$$

مثال

یک رسانای بی نهایت بلند به شعاع S_0 حامل جریان ثابت I در نظر بگیرید که راستای محورش در راستای محور z باشد. پتانسیل برداری مغناطیسی را همه جای فضا بدست بیاورید.

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

از انجا که جریان فقط در راستای z است بیرون و درون استوانه داریم:

$$\nabla^2 A_x = \nabla^2 A_y = 0$$

در حالیکه معادله برای مولفه z تبدیل به پواسون درون استوانه و لاپلاس بیرون استوانه خواهد بود:

$$J = \frac{I}{a_{\perp}} = \frac{I}{\pi S_0^2}$$

$$\nabla^2 A_z = 0 \qquad s > S_0$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J \qquad s < S_0$$

به دلیل تقارن انتظار داریم پتانسیل برداری فقط تابعیت s داشته باشد.

$$\nabla^2 A_x = \nabla^2 A_y = 0$$

یک جواب این معادله صفر است. جواب‌های غیر صفر با حل معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به دست می آید که منجر به تابع لگاریتمی می‌شود. از آنجایی که پتانسیل برداری لگاریتمی مربوط به جریان رشته‌ای است و در راستای x و y هیچ توزیع جریانی وجود ندارد پس جواب صفر را قبول می‌کنیم:

$$A_x = A_y = 0$$

جواب صفر برای مولفه x و y چه درون و چه بیرون استوانه اعتبار دارد.

جواب مولفه z درون و بیرون استوانه:

$$\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dA_z(s)}{ds}\right) = -\mu_0 J$$

$$A_z = -\frac{1}{4\pi}\mu_0 I\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 + C_1 \ln s + C \qquad s < s_0$$

$$A_z = D_1 \ln s + D \qquad s > s_0$$

شرایط مرزی

- پتانسیل داخل استوانه باید محدود باشد چون جریان رشته‌ای وجود ندارد بنابراین جمله لگاریتمی نباید داشته باشیم

$$C_1 = 0$$

- مولفه مماسی پتانسیل در مرز پیوسته است:

$$A_{t1} = A_{t2} \qquad s = s_0$$

$$\boxed{\frac{-\mu_0 I}{4\pi} + C = D_1 \ln s_0 + D}$$

- محاسبه میدان بیرون استوانه:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \qquad \frac{dA_z}{ds} = -\frac{D_1}{s}\hat{\phi}$$

- بکارگیری قانون آمپر برای حلقه آمپری بیرون استوانه:

$$\oint \vec{B}\,.\,\vec{dl} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad -\int \frac{D_1}{s}\hat{\phi}.\,sd\phi\hat{\phi} = \mu_0 I \quad \Rightarrow D_1 = \frac{-\mu_0 I}{2\pi}$$

$$D = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln s_0 + C$$

$$A_z = -\frac{1}{4\pi}\mu_0 I \left(\frac{s}{s_0}\right)^2 + C \qquad s < s_0$$

ثابت c قابل صرف نظر است زیرا در

محاسبه میدان مغناطیسی اثری ندارد

$$A_z = \frac{-\mu_0 I}{4\pi}\left(1 + 2\ln\frac{s}{s_0}\right) + C \qquad s > s_0$$

پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی

کرل میدان مغناطیسی جریان‌های پایا در حالت کلی غیر صفر است اما اگر در ناحیه‌ای از فضا توزیع جریان صفر باشد آنگاه کرل میدان مربوط به آن ناحیه صفر بوده و بنابراین برای آن ناحیه می‌توان پتانسیل نرده ای مغناطیسی تعریف کرد

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0} \longrightarrow \vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \Phi_m$$

از آنجا که $\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$ می‌توان گفت:

$$\nabla^2 \Phi_m = 0$$

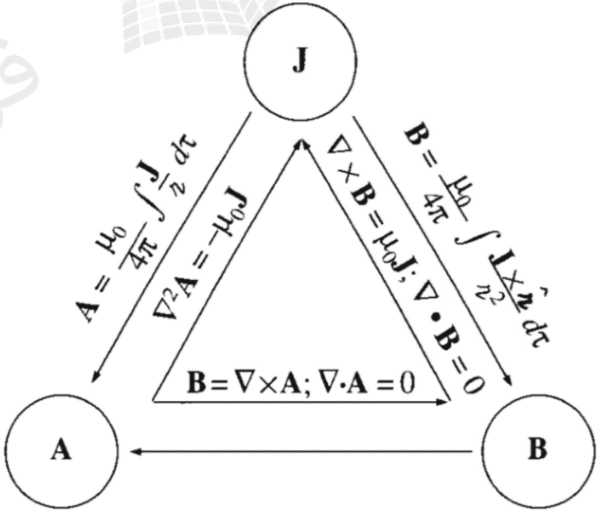
- پتانسیل نرده‌ای در معادله لاپلاس صدق می‌کند و شرایط مرزی که برای حل مورد استفاده قرار خواهند گرفت همان شرایط روی مولفات عمودی و مماسی میدان مغناطیسی هستند

- از پتانسیل نرده‌ای فقط در نواحی که توزیع جریان نداریم مجاز به استفاده هستیم تا میدان مغناطیسی را بیابیم

روش‌های یافتن میدان مغناطیسی

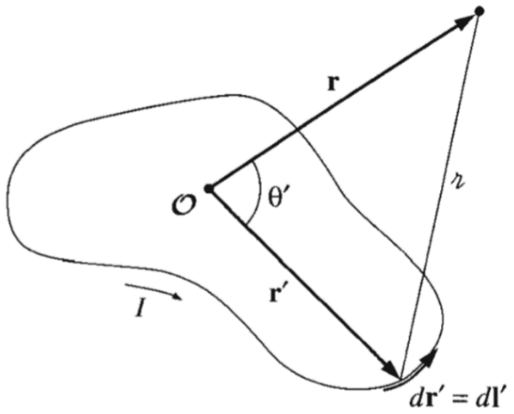
1. قانون بیوساوار
2. قانون آمپر (هنگامی که توزیع جریان تقارن هندسی مناسب دارد.)
3. استفاده از پتانسیل برداری:
   I. هنگامی که توزیع بار در بی نهایت صفر شود (انتگرال)
   II. هنگامی که توزیع بار تا بی نهایت گسترده باشد (شرایط مرزی .... معادله پواسون گون برداری)

4. پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی (در نواحی بدون توزیع جریان)
5. بسط چند قطبی پتانسیل (مناسب برای یافتن میدان در نقاط دور از توزیع جریان دلخواه جایگزیده)



بسط چند قطبی پتانسیل برداری

- **حلقه جریان**



حلقه جریانی با شکل دلخواه در نظر بگیرید؛ پتانسیل برداری حلقه در نقاط دور را می‌توان با بسط مخرج به صورت سری توانی از $\frac{1}{r}$ نوشت:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{\mathscr{r}} d\mathbf{l}'$$

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\theta'}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta').$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{\mathscr{r}}\, d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos\theta')\, d\mathbf{l}',$$

با باز کردن چند جمله‌ای‌های لژاندر در عبارت بالا می‌توان رابطه را از نو بر حسب کسینوس مرتب کرد

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\overbrace{\frac{1}{r}\oint d\mathbf{l}'}^{\text{تک قطبی}} + \overbrace{\frac{1}{r^2}\oint r'\cos\theta'\, d\mathbf{l}'}^{\text{دوقطبی}}\right.$$
$$\left. + \underbrace{\frac{1}{r^3}\oint (r')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) d\mathbf{l}'}_{\text{چهارقطبی}} + \cdots\right].$$

بررسی جمله تک قطبی مغناطیسی

قبلا دیدیم که به دلیل صفر بودن دیورژانس میدان مغناطیسی در فیزیک کلاسیک بار مغناطیسی نداریم و به عبارت دیگر تک قطبی مغناطیسی نخواهیم داشت. با نگاه به جمله تک قطبی مشخص است که انتگرال برداری روی مسیر بسته صفر می‌شود که نشان دهنده صفر بودن جمله تک قطبی مغناطیسی است.

$$\oint d\mathbf{l}' = 0.$$

«بنابراین همواره جمله تک قطبی مغناطیسی صفر است.»

دو قطبی مغناطیسی

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos\theta' \, d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \, d\mathbf{l}'.$$

$$\oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \, d\mathbf{l}' = -\hat{\mathbf{r}} \times \int d\mathbf{a}'.$$

(تمرین ۶۱ فصل اول)

$$\boxed{\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},}$$

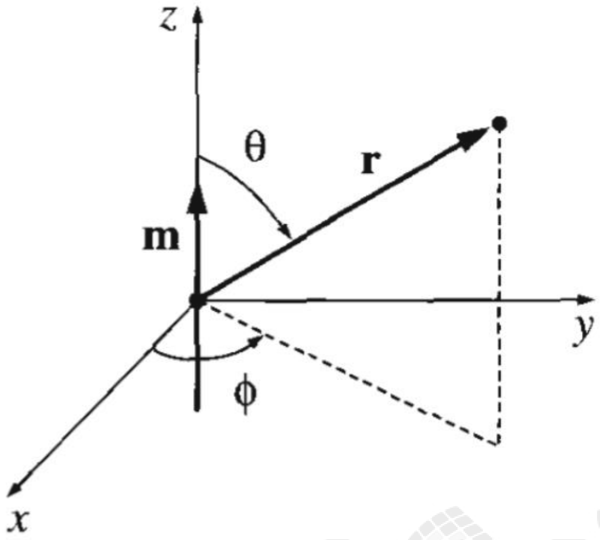
$$\left(\mathbf{m} \equiv I \int d\mathbf{a}\right)$$

گشتاور مغناطیسی حلقه جریان

$$\boxed{\mathbf{m} \equiv I \int d\mathbf{a} = I\mathbf{a}.}$$

- از آنجایی که بار کل مغناطیسی صفر است یعنی تک قطبی مغناطیسی نداریم، گشتاور دوقطبی مغناطیسی مستقل از مبدا مختصات خواهد بود.
- دوقطبی مغناطیسی فیزیکی حلقه جریان بسیار کوچک تعریف می‌شود در حالیکه دوقطبی خالص حلقه با شعاع تقریبا صفر و جریان تقریبا بی‌نهایت است و همانند دوقطبی خالص الکتریکی تعریف واضح و بدون اشکالی ندارد!

دو قطبی خالص

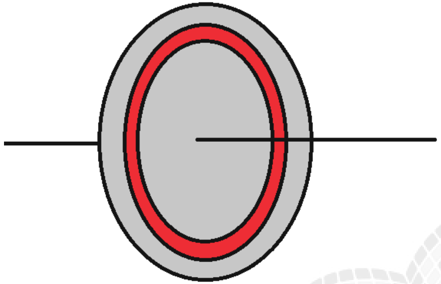


$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

$$\boxed{\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}[3(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}].}$$

مثال: گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک قرص باردار چرخان را محاسبه کنید که دارای چگالی بار سطحی ثابت σ بوده و نسبت به محورش با بسامد زاویه‌ای ω می‌چرخد.



$$\vec{m} = I \int \overrightarrow{da}$$

$$dI = \lambda v = \frac{\sigma\, 2\pi s\, ds}{2\pi s} v = \sigma v\, ds = \sigma s \omega\, ds$$

$$\overrightarrow{dm} = \vec{a} dI = \pi s^2 .\ \sigma s \omega\, ds\, \hat{z} \longrightarrow \boxed{\vec{m} = \omega \pi \sigma\, \hat{z} \int_0^R s^3 ds = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4}\, \hat{z}}$$

بسط چند قطبی پتانسیل برداری

- توزیع جریان حجمی

(تمرین ۶۱ فصل اول)

$$\vec{m} = I\int \overrightarrow{da} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times I\overrightarrow{dl'} \longleftarrow \overrightarrow{da} = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \overrightarrow{dl'}\right)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{J}\, d\tau' \longleftarrow \int I\overrightarrow{dl'} \sim \int \vec{J}\, d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\cancel{\frac{1}{r}\int \vec{J}\, d\tau'}\right.$$

تک قطبی = صفر

دو قطبی

چهار قطبی

این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس «آموزش الکترومغناطیس ۱ (Electromagnetics)» تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvphy110