

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

آموزش الکترومغناطیس ۱ (Electromagnetics)

درس یکم: مقدمات ریاضی لازم برای درک مطالب و حل مساله

نام مدرس:

متین هنردوست

دکترای فیزیک

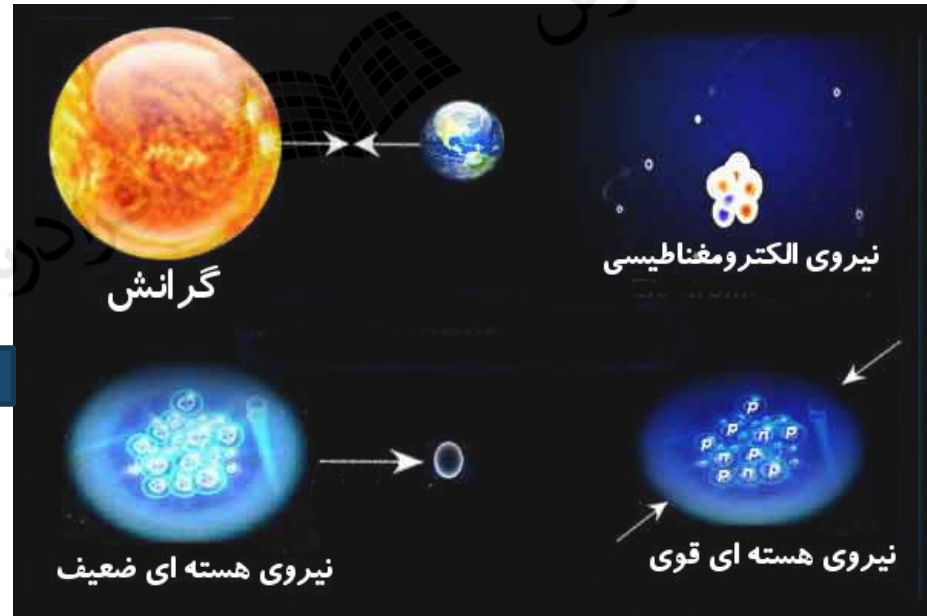
۱. مشاهدات

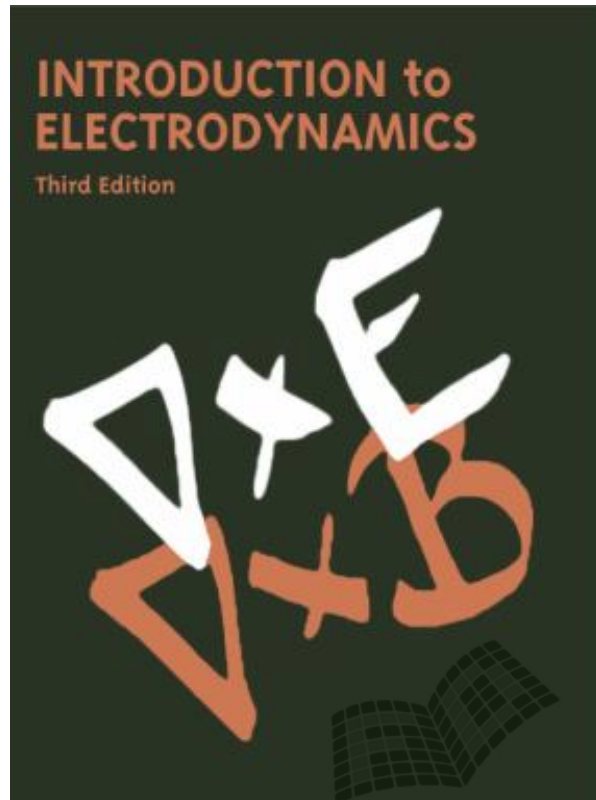
۲. ریاضیات

فیزیک ← علم شناخت طبیعت

پرجابردترین نیرو در زندگی
روزمره نیروی الکترومغناطیس

است.





این مبحث شامل مروری بر مطالب عنوان شده در کتاب «آشنایی با مبانی الکترومغناطیس» نوشته دیوید. گریفیتس است.

سرفصل‌هایی که به طور خلاصه مورد بحث قرار خواهند گرفت:

- آنالیز برداری
- الکترواستاتیک
- روش‌های خاص حل مسائل مهم الکترواستاتیک
- میدان‌های الکتریکی در ماده

حل تمرین‌های متعدد

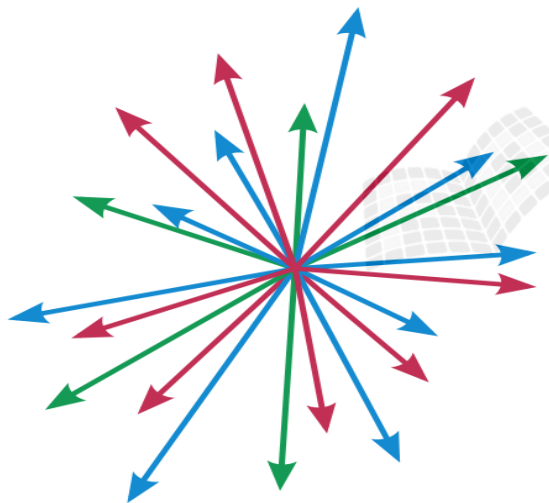
فصل یک : آنالیز برداری

ریاضی : n تایی مرتبی که مؤلفات آن تحت تبدیل مختصات به شیوه خاصی تغییر می کند.

تعریف بردار :

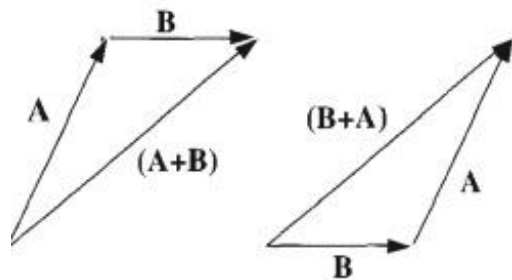
شهود هندسی در فضای تخت و در سه بعد : کمیتی دارای اندازه و جهت

جریان الکتریکی دارای اندازه و جهت است اما
کمیتی برداری نیست!

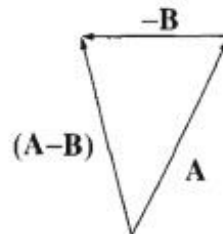


مجموعه بردارها فضای برداری را با خواص منحصر به
فرد خود به وجود می آورند

عمل های برداری :



$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A};$$



e 1.4

۱. جمع (تفریق) برداری

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}.$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

۲. ضرب نقطه ای

تعبیر شهودی: حاصلضرب تصویر بردار A روی
بردار B

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos \theta,$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2.$$

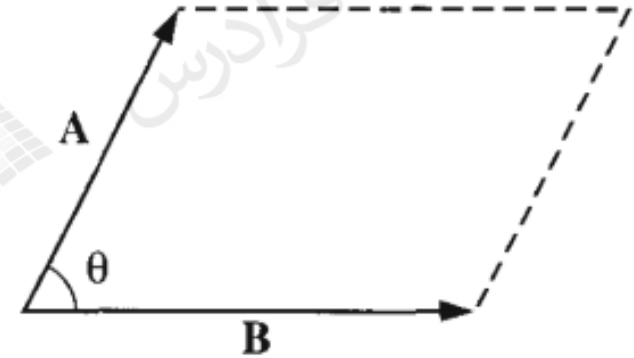
تعریف اندازه بردار:

۳. ضرب برداری

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv AB \sin \theta \hat{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C}),$$

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

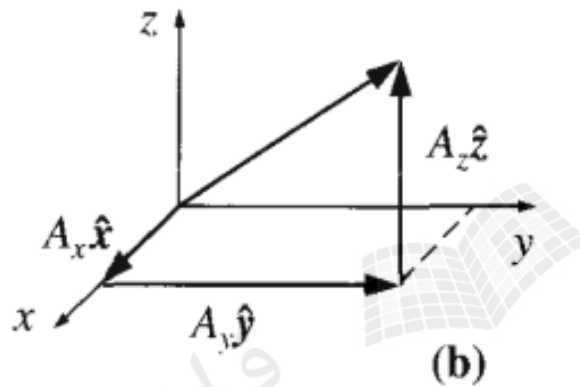
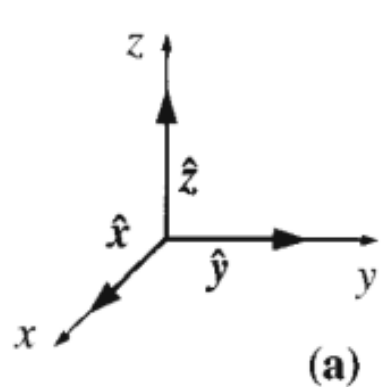


تعبیر شهودی: مساحت متوازی الاضلاع

ساخته شده از دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

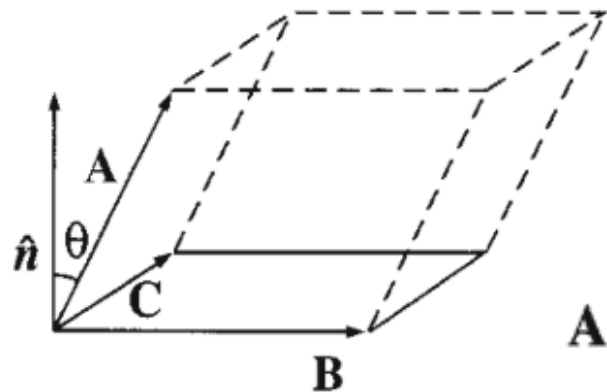
شکل مؤلفه ای بردار



دستگاه مختصات دکارتی
و بردارهای یکه

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}) + (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y) \hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z) \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

ضرب های سه تایی



$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

حجم متوازی
الاضلاع ساخته
شده از سه
برداری A و B
و C

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C});$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D}).$$

بردار مکان

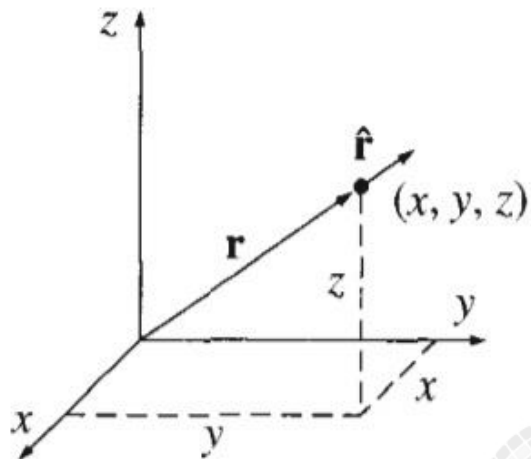


Figure 1.13

$$\mathbf{r} \equiv x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

بردار جابجایی بی نهایت کوچک

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}.$$

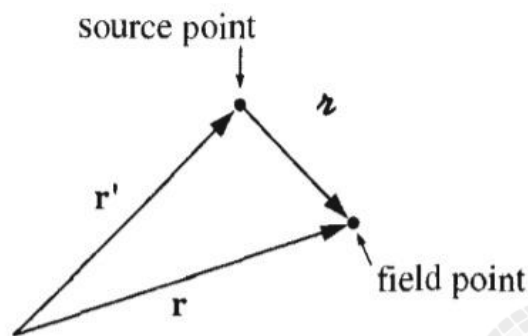


Figure 1.14

بردار تفاضل مکان چشمه و ناظر

$$\mathbf{r} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}},$$

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'.$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

$$r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,$$

تغییر مؤلفات بردار تحت تبدیل مختصات (مثال دوران)

قاعده تبدیل بردار در دو بعد تحت دوران با استفاده از مفهوم ماتریس دوران

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix}.$$

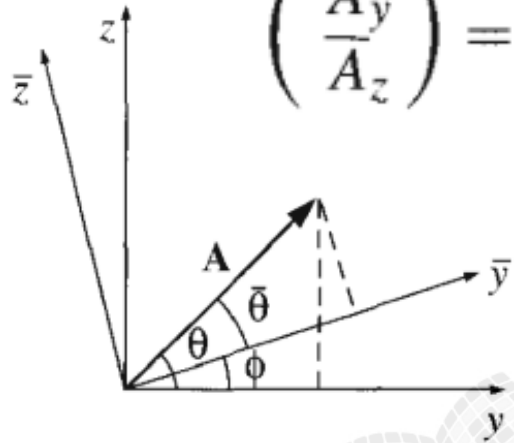


Figure 1.15

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_x \\ \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix},$$

قاعده تبدیل
بردار سه
بعدی با
استفاده از
ماتریس
تبدیل

$$\bar{A}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} A_j,$$

حساب دیفرانسیل

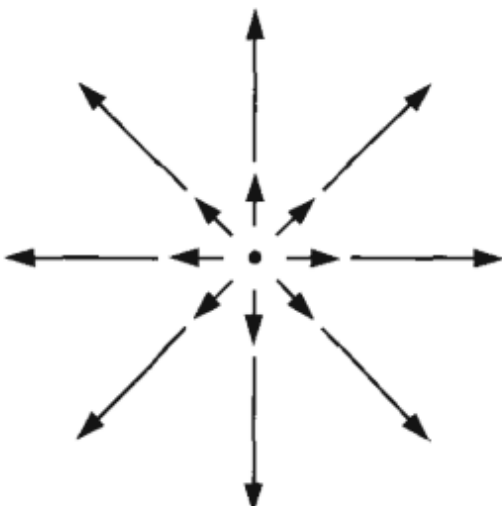
- مشتق معمولی
- عملگرهای دیفرانسیلی (گرادیان، دیورژانس، کرل)

$$\begin{aligned} dT &= \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \cdot (dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}) \\ &= (\nabla T) \cdot (d\mathbf{l}), \end{aligned}$$



$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

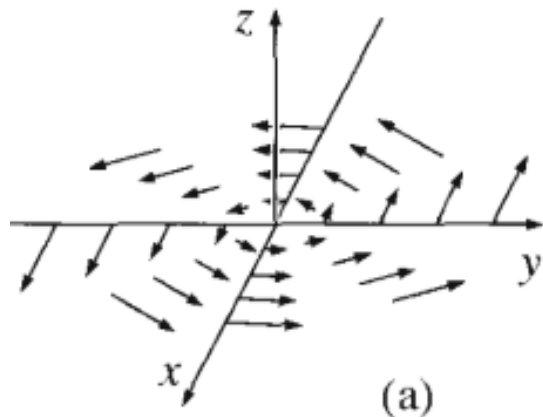
$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}.$$



دیورژانس (تعبير هندسی : پخش شدگی)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

کرل (تعبیر هندسی: چرخش)



قضیه هلمهلتز: هر گاه دیورژانس و کرل یک میدان برداری در همه نقاط فضا مشخص باشد میدان برداری بطور یکتا مشخص می شود (توجه به رفتار میدان در بینهایت مهم است)

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

روابط مهم و پرکاربرد عملگرهای دیفرانسیلی

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}),$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{B}),$$

$$\nabla(kf) = k\nabla f, \quad \nabla \cdot (k\mathbf{A}) = k(\nabla \cdot \mathbf{A}), \quad \nabla \times (k\mathbf{A}) = k(\nabla \times \mathbf{A}),$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f,$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A},$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f),$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}),$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f),$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2},$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{A}}{g} \right) = \frac{g(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla g)}{g^2},$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{A}}{g} \right) = \frac{g(\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla g)}{g^2}.$$

مشتق های مرتبه دوم

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla T) &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

لاپلاسی

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$

رابطه مهم

حساب انتگرال

۱. انتگرال خطی میدان برداری $\mathbf{V}$ روی مسیر دلخواه

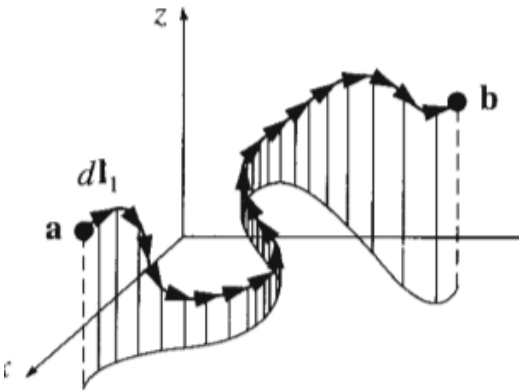


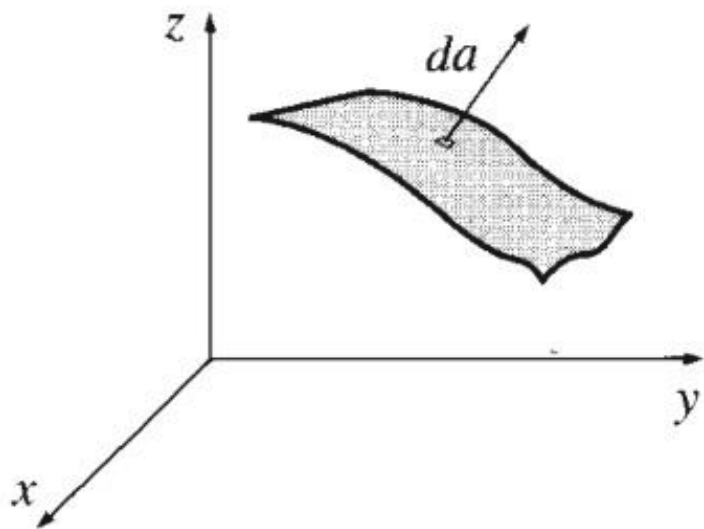
Figure 1.26

$$\int_{aP}^b \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l},$$

انتگرال خطی روی مسیر دلخواه P از
نقطه a تا نقطه b

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

انتگرال خطی روی مسیر بسته ($a=b$)



انتگرال سطحی

انتگرال حجمی

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a},$$

$$\int_V T d\tau,$$

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a},$$

$$d\tau = dx dy dz.$$

قضایای بنیادی حسابان

$$dT = (\nabla T) \cdot d\mathbf{l}_1$$

$$\int_a^b (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}).$$

1: $\int_a^b (\nabla T) \cdot d\mathbf{l}$ is independent of path taken from $\mathbf{a}$ to $\mathbf{b}$.

2: $\oint (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = 0$, since the beginning and end points are identical, and hence $T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}) = 0$.

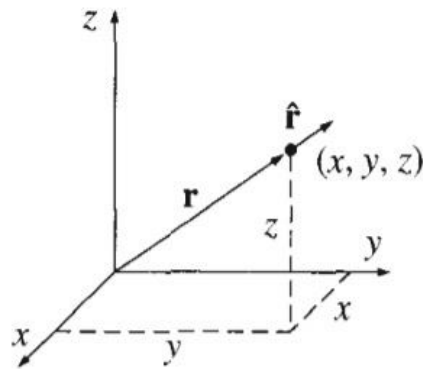
$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}.$$

1: $\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a}$ depends only on the boundary line, not on the particular surface used.

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

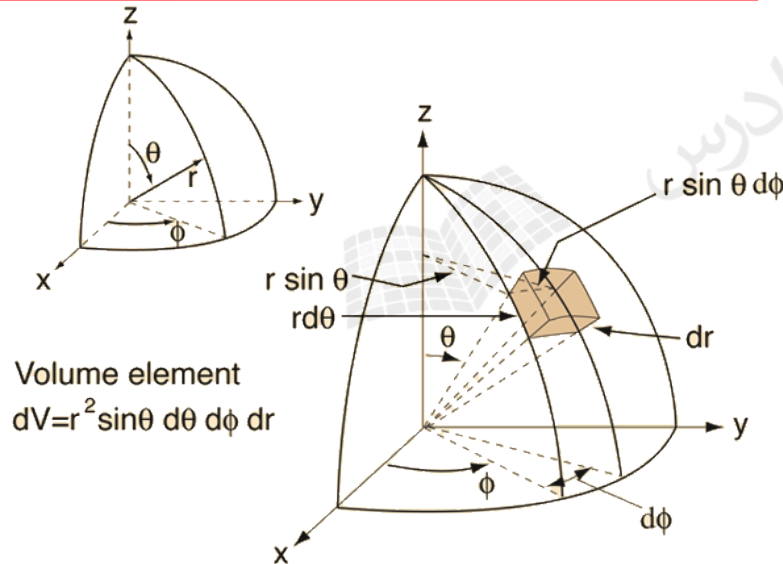
2: $\oint (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = 0$ for any closed surface, since the boundary line, like the mouth of a balloon, shrinks down to a point, and hence the right side of Eq. 1.57 vanishes.

من فکر میکنم پس
هستم



مختصات منحنی الخط (استوانه ای، قطبی کروی)

.13



$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$d\tau = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned} \right\}$$

Gradient:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

Curl:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned}$$

Laplacian:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}.$$

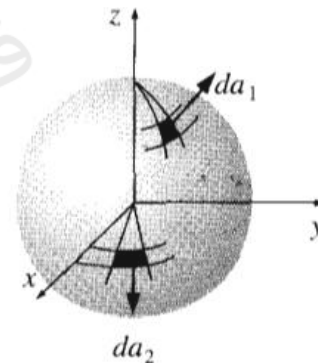
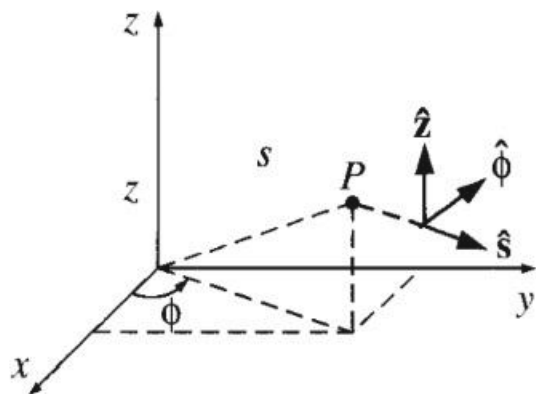


Figure 1.39

$$d\mathbf{a}_1 = dl_\theta dl_\phi \hat{\mathbf{r}} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}.$$

$$d\mathbf{a}_2 = dl_r dl_\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} = r dr d\phi \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

مختصات استوانه ای

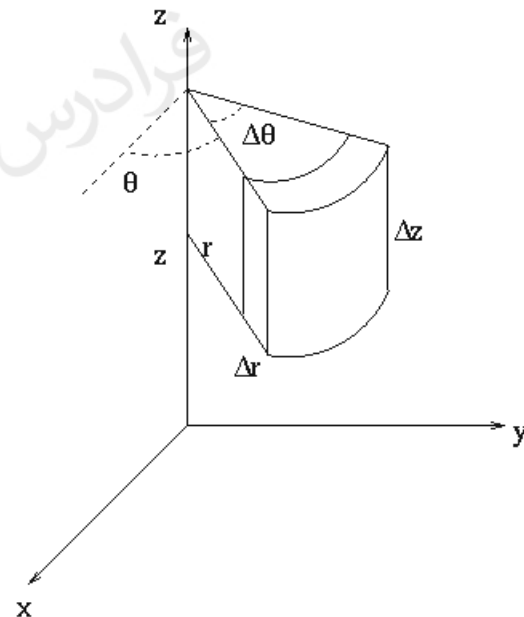


$$x = s \cos \phi, \quad y = s \sin \phi, \quad z = z.$$

$$d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}},$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}, \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}, \\ \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \right\}$$

$$d\tau = s ds d\phi dz.$$



$$dl_s = ds, \quad dl_\phi = s d\phi, \quad dl_z = dz,$$

Gradient:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}.$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

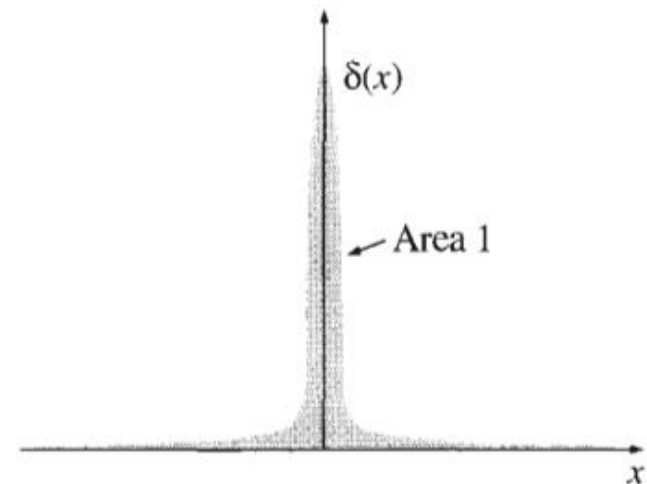
Curl:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}.$$

Laplacian:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

تابع دلتای دیراک در یک بعد



$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0 \\ \infty, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a),$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx) dx = \pm \int_{-\infty}^{\infty} f(y/k)\delta(y) \frac{dy}{k} = \pm \frac{1}{k} f(0) = \frac{1}{|k|} f(0).$$

تابع دلتای دیراک در سه بعد

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

$$\int_{\text{all space}} \delta^3(\mathbf{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1.$$

$$\int_{\text{all space}} f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\tau = f(\mathbf{a}).$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0.$$

با استفاده از قضیه دورژانس

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= \int \left(\frac{1}{R^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = 4\pi. \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{r}).$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{r}),$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\mathbf{r}).$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{F} = -\nabla V$$

قضیه اول

Curl-less (or “**irrotational**”) **fields**. The following conditions are equivalent (that is, $\mathbf{F}$ satisfies one if and only if it satisfies all the others):

- (a) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ everywhere.
- (b) $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ is independent of path, for any given end points.
- (c) $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ for any closed loop.
- (d) $\mathbf{F}$ is the gradient of some scalar, $\mathbf{F} = -\nabla V$.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Divergence-less (or “**solenoidal**”) **fields**. The following conditions are equivalent:

- (a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ everywhere.
- (b) $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$ is independent of surface, for any given boundary line.
- (c) $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = 0$ for any closed surface.
- (d) $\mathbf{F}$ is the curl of some vector, $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$.

تمرین

نشان دهید گرادیان تابع نرده ای در جهت تغییرات بیشینه است.

$$dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l}$$

رابطه دیفرانسیل کامل تابع نرده ای

$$\frac{dT}{|d\vec{l}|} = \vec{\nabla} T \cdot \underbrace{\frac{d\vec{l}}{|d\vec{l}|}}_{\hat{dl}}$$

با تقسیم رابطه بالا به اندازه بردار جابجایی بی نهایت کوچک خواهیم داشت:

$$\rightarrow \frac{dT}{|d\vec{l}|} = \vec{\nabla} T \cdot \hat{dl} \rightarrow \left. \frac{dT}{|d\vec{l}|} \right|_{max} = |\vec{\nabla} T| |\hat{dl}| \cos(0)$$

گرادیان با بردار جابجایی در جهت تغییرات بیشینه تابع موازی است.

تمرین

تمرین: نشان دهید گرادیان تابع نرده ای T عمود بر سطح $T=C$ است.

$$dT = \underbrace{\vec{\nabla} T} \cdot \underbrace{d\vec{l}}$$

(هر) بردار جابجایی
بی نهایت کوچک
گرادیان تابع نرده ای

برای حل این سوال کافی است رابطه دیفرانسیل کامل را داشته باشیم:

• تغییرات تابع نرده ای T روی سطح $T=C$ صفر

است $dT = 0$ ←

$$0 = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l}$$



$$\vec{\nabla} T \perp d\vec{l}$$

گرادیان عمود بر سطح $T=C$ است

تمرین

الف) دیورژانس تابع زیر را حساب کنید.

$$\mathbf{v} = (r \cos \theta) \hat{\mathbf{r}} + (r \sin \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (r \sin \theta \cos \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

حل:

طبیعتاً مختصات مناسب مختصات قطبی کروی است

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V_\phi$$

$$\begin{cases} V_r = r \cos \theta \\ V_\theta = r \sin \theta \\ V_\phi = r \sin \theta \cos \phi \end{cases}$$

با جایگذاری مؤلفات میدان برداری در رابطه دیورژانس می توان به راحتی دیورژانس را محاسبه کرد.

تمرین

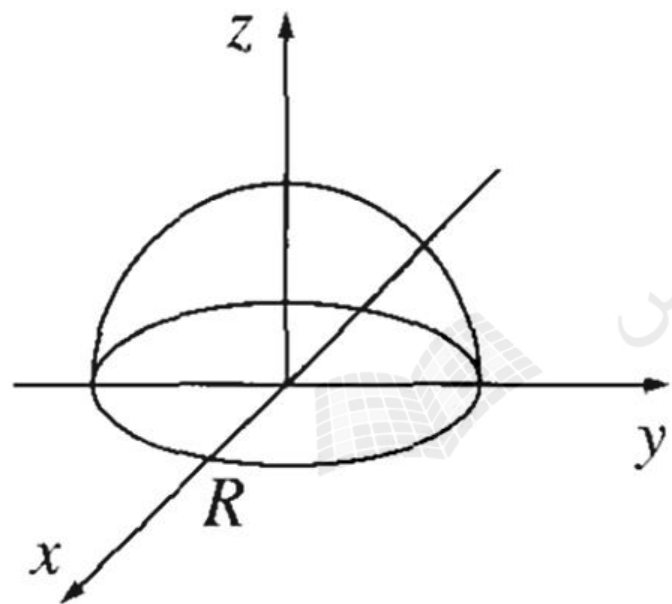
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \cos \theta)}_{3 \cos \theta} + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin^2 \theta)}_{2 \cos \theta} + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r \sin \theta \cos \phi)}_{-\sin \phi}$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 3 \cos \theta + 2 \cos \theta - \sin \phi$$

تمرین

ب) قضیه دیورژانس را برای حجم نیمکره شکل زیر، به شعاع R که قاعده آن در صفحه $x-y$ و مرکز آن در مبدا مختصات قرار دارد، تحقیق کنید



حل:

اولین قدم نوشتن صورت قضیه

دیورژانس است

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, dV = \oint_S \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

انتگرال روی

حجم نیمکره

انتگرال روی سطح بسته ای که

حجم نیمکره را در بر گرفته

محاسبه انتگرال سمت چپ قضیه

با استفاده از نتیجه قسمت الف و جایگذاری مقدار دیورژانس خواهیم داشت:

$$\int_v \vec{V} \cdot \vec{V} \, dv = \int_v (5 \cos \theta - \sin \phi) \, dv$$

با استفاده از المان حجم در مختصات قطبی کروی و جایگذاری $dv = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned} \int_v \vec{V} \cdot \vec{V} \, dv &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (5 \cos \theta - \sin \phi) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{R^3}{3} \left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 5 \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi}_{5 \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \times 2\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin \phi \, d\theta \, d\phi}_{\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \cos \phi \Big|_0^{2\pi}} \right] = \frac{5\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

محاسبه انتگرال سمت راست قضیه

توجه داریم که میدان برداری روی سطح دایره محاسبه می شود

$$\oint_S \vec{V} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_I \vec{V} \cdot d\vec{s}}_{\text{روی سطح قوسی}} + \underbrace{\int_{II} \vec{V} \cdot d\vec{s}}_{\text{روی سطح دایره واقع در صفحه x-y}}$$

شکل نیمکره

انتگرال روی سطح بسته سمت راست را به دو ناحیه

$$\left. \begin{array}{l} \text{تقسیم می کنیم} \\ \text{اندازه: } ds = r dr d\phi \\ \text{جهت: } -\hat{k} \text{ یا بردار یکه } \hat{\theta} \\ \text{(به ازای } \theta = \frac{\pi}{2} \text{)}$$

$$\vec{V}|_{\text{روی سطح}} = r\hat{\theta} + r \cos \phi \hat{\phi}$$

$$\longrightarrow \int_I (r\hat{\theta} + r \cos \phi \hat{\phi}) \cdot r dr d\phi \hat{\theta} = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 dr d\phi = 2\pi \frac{R^3}{3}$$

$$\int_{\text{II}} \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad \text{محاسبه بخش قوسی:}$$

$\vec{V}$ روی قوس نیم کره

اندازه: $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$

بردار عمود بر سطح

جهت: $\hat{r}$

$$= R \cos \theta \hat{r} + R \sin \theta \hat{\theta} + R \sin \theta \cos \phi \hat{\phi}$$

$$\rightarrow \int_{\text{II}} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int R \cos \theta \hat{r} \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} R^3 \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = R^3 \times 2\pi \times \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\pi/2} = \pi R^3$$

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_I \vec{V} \cdot d\vec{s} + \int_{II} \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3 + \pi R^3 = \frac{5\pi}{3} R^3$$

→

$$\underbrace{\int_v \vec{V} \cdot \vec{V} d}_{\frac{5\pi}{3} R^3} = \underbrace{\oint_s \vec{V} \cdot d\vec{s}}_{\frac{5\pi}{3} R^3}$$

با برابری طرفین تساوی
قضیه دیورژانس تحقیق شد

درس دوم: مروری بر مفاهیم پایه در الکترواستاتیک

الکترواستاتیک

(فرض بر این است که بیننده با مبانی الکترواستاتیک و مفاهیمی همچون بار الکتریکی و میدان و نیروی الکتریکی آشنا است.)

الکترو استاتیک

مشاهده پذیر فیزیکی

هدف اصلی در بحث الکترو استاتیک ← یافتن میدان الکتریکی توزیع بار استاتیک : (برخلاف ایده ماکسول) خاصیتی اطراف توزیع بار که به اجسام باردار دیگر نیرو وارد می کند.

شکل توزیع بار

اصل برهم نهی

منشا اصل برهم نهی به خطی بودن معادلات ماکسول نسبت به چشمه میدان الکتریکی بر می گردد.

• Q
• q_2
• q_1
• q_i
“Source” charges “Test charge”



قانون کولن : (فرض کردیم که بار چشمه در مبدا مختصات قرار دارد)



Coulomb (17Charles-
Augustin de 36-1806)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$

چشمه میدان

بار آزمون

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

گذردهی خلاء

میدان الکتریکی توزیع بار:

حالت اول: توزیع بار گسسته

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 + \dots \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 \hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} + \frac{q_2 \hat{\mathbf{r}}_2}{r_2^2} + \frac{q_3 \hat{\mathbf{r}}_3}{r_3^2} + \dots \right),\end{aligned}$$

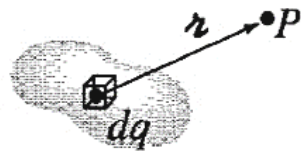
$$\boxed{\mathbf{F} = QE,}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i.$$

با توجه به قانون کولن که مربوط به نیروی بین دو بار نقطه‌ای است می‌توان میدان الکتریکی توزیع بار گسسته را به دست آورد:

حالت دوم: توزیع بار پیوسته (تعمیم جمع سیگما به انتگرال)

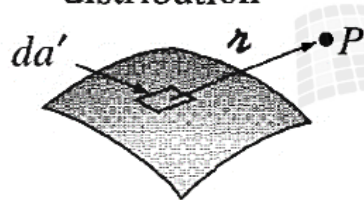
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dq.$$



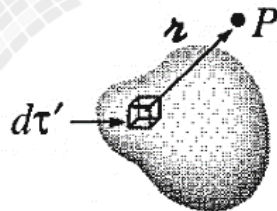
(a) Continuous distribution



(b) Line charge, λ



(c) Surface charge, σ



(d) Volume charge, ρ

توزیع بار
خطی

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dl';$$

توزیع بار
سطحی

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} da';$$

توزیع بار
حجمی

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau'.$$

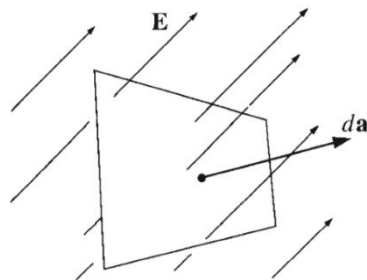
دیورژانس و کرل (تاو) میدان‌های الکترواستاتیک:

معمولا انتگرال‌های **برداری** که معرفی کردیم برای محاسبه سخت هستند بنابراین به دنبال تکنیک‌هایی هستیم تا بتوانیم میدان‌های الکتریکی را از روش سهل‌تری محاسبه نماییم:

استفاده از مفهوم کرل و دیورژانس تابع
برداری که در فصل یک دیدیم در این بخش
کاربرد دارد

با مفهوم خطوی میدان از قبل آشنا هستیم، با استفاده از
این مفهوم شار گذرنده از سطح S را معرفی می‌کنیم

دیورژانس و کرل (تاو) میدان‌های الکترواستاتیک:



$$\Phi_E \equiv \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a},$$

قانون گاوس تکنیکی مفید برای یافتن میدان الکتریکی است : ارتباط بین شار گذرنده از سطح بسته و بار الکتریکی داخل سطح بسته را بیان می کند

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

بیان دیفرانسیلی

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}},$$

بیان انتگرالی

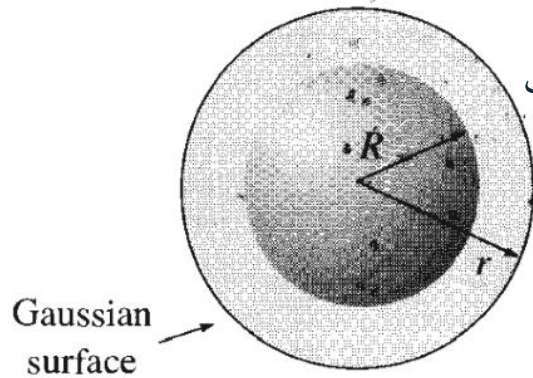
قانون گائوس

نکته: در چه مسائلی از قانون گائوس برای یافتن میدان الکتریکی استفاده می شود؟

هنگامی که اندازه میدان الکتریکی
روی سطح گائوسی ثابت بوده و بتواند
از انتگرال بیرون بیاید.

هنگامی که چشمه شما تقارن
هندسی مناسبی داشته باشد
(کروی ، استوانه ای و ..)

مثال: میدان الکتریکی واقع در بیرون یک کره توپر با بار الکتریکی q را بیابید.



میدان الکتریکی شعاعی است. همان سطح نیز شعاعی است و حاصلضرب نقطه‌ای آنها بدین صورت است

$$\int_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \int_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2.$$

طرف راست از

قضیه گائوس به

دست آمده است

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q,$$

سطح گائوسی را طبق تقارن شکل کره‌ای هم مرکز با توزیع بار کروی می‌گیریم. میدان الکتریکی نیز تقارن کروی دارد.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

استفاده از تاو میدان الکتریکی و کاربرد قضیه استوکس:

تعریف پتانسیل از این جهت مفید
است که انتگرال خطی آن طبق قضیه
فصل یک مستقل از مسیر است

$$V(\mathbf{r}) \equiv - \int_O^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

مبدأ پتانسیل

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

میدان الکتریکی یک
میدان مرکز گرا است

استفاده از تاو میدان الکتریکی و کاربرد قضیه استوکس:

از قضایای فصل اول به یاد داریم اگر میدانی برداری داری کرل صفر باشد می توان آن را به صورت گرادیان یک تابع نردهای که آن را **پتانسیل** می نامیم نوشت.

استفاده از مفهوم پتانسیل به ما کمک می کند تا به جای جستجوی کمیت برداری میدان به دنبال کمیت نردهای پتانسیل باشیم که قالب به لحاظ عملیاتی کار با کمیت های نردهای ساده تر است و در نهایت با استفاده از گرادیان پتانسیل میدان الکتریکی را که هدف اصلی است به دست بیاوریم.

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

نکات مربوط به پتانسیل الکتریکی:

- آزادی انتخاب در مبداء پتانسیل الکتریکی (ناشی از مجاز بودن در افزودن هر مقدار ثابتی به پتانسیل)
 - تفاوت بین مفهوم انرژی پتانسیل الکتریکی و خود پتانسیل الکتریکی (بهم ربط دارند ولی از هم متمایزند)
 - پتانسیل در سطح فیزیک کلاسیک کمیتی فیزیکی به معنای مشاهده پذیر نیست بلکه اختلاف پتانسیل مشاهده پذیر حقیقی است بنابراین یکتا نبودن آندر حد افزودن مقدار ثابت مشکلی ایجاد نمی کند.
 - پتانسیل همانند میدان الکتریکی از اصل بر هم نهی تبعیت می کند
 - یکای پتانسیل نیوتن در متر بر کولن است: $N.m/C$
- $$V = V_1 + V_2 + \dots$$

ممکن است به نظر برسد با توجه به تعریف ارائه شده، نیازمند میدان الکتریکی هستیم تا خود پتانسیل را حساب کنیم (و بنابراین از هدف الکترواستاتیک دوریم) بنابراین بهتر است به دنبال روابطی باشیم که رابطه بین توزیع بار و پتانسیل را مشخص کنند.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

• پتانسیل بار نقطه ای

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i},$$

• پتانسیل توزیع با گسسته

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} dq.$$

• پتانسیل توزیع باریک‌پوسته

روش های

محاسبه

پتانسیل

الکتریکی

معادله پواسون و لاپلاس در محاسبه پتانسیل الکتریکی:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

معادله پواسون

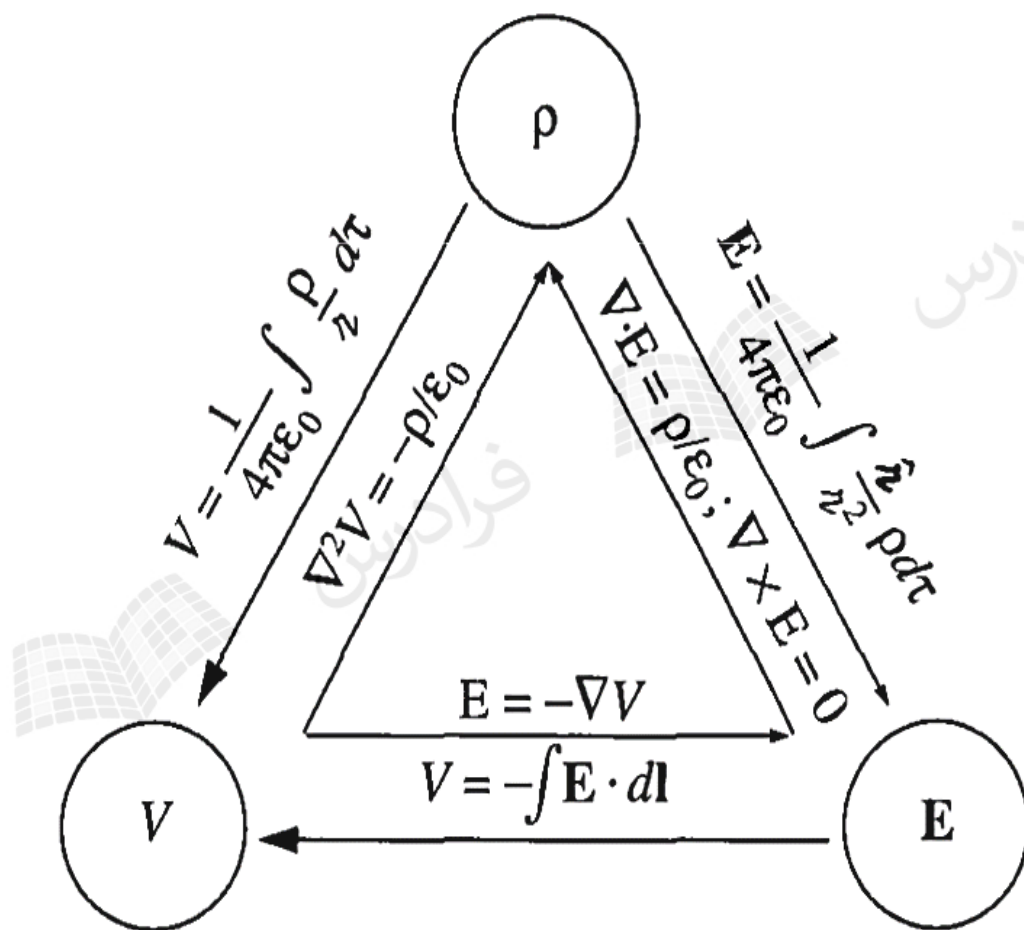
$$\nabla^2 V = 0.$$

معادله لاپلاس

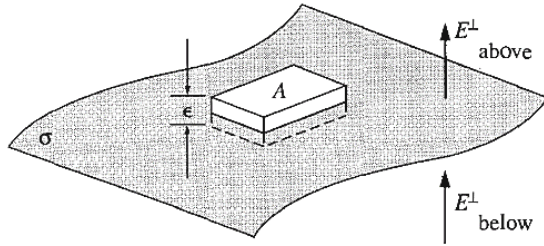
دو معادله کرل و دیورژانس میدان الکتریکی معادلات اساسی الکترواستاتیک هستند با استفاده از این دو معادله می توان رابطه پتانسیل الکتریکی و توزیع بار را به دست آورد.

نکات مربوط به استفاده از معادله لاپلاس و پواسون:

- گاهی اوقات توزیع بار برای انتگرال گیری و محاسبه پتانسیل تقارن مناسب ندارد یا محیطی که توزیع بار در آن قرار دارد همه جای فضا یکنواخت نیست در این سری مسأله های از معادله پواسون یا لاپلاس برای تعیین پتانسیل استفاده می کنیم.
- در سطح کارشناسی، عموماً مسأله هایی که با معادله پواسون حل می شوند تنوع چندانی ندارند زیرا حل دشوار تری نسبت به لاپلاس دارند.
- معادلات لاپلاس و پواسون معادلات دیفرانسیلی مرتبه دو هستند و برای حل احتیاج به دو شرط مرزی دارند.



شرایط مرزی در الکترواستاتیک



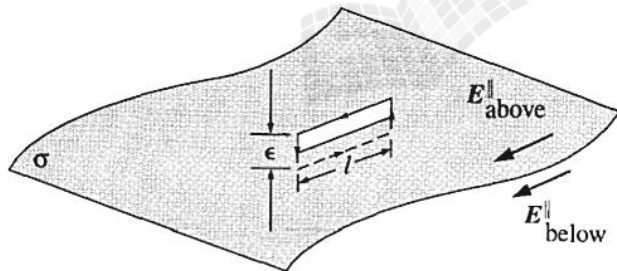
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A,$$

$$\mathbf{E}_{\text{above}} - \mathbf{E}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}},$$

$$E_{\text{above}}^{\perp} - E_{\text{below}}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma,$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

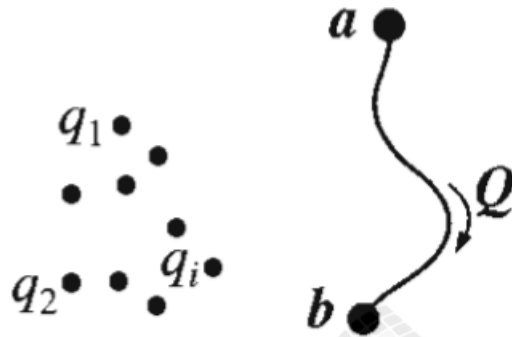
$$\mathbf{E}_{\text{above}}^{\parallel} = \mathbf{E}_{\text{below}}^{\parallel},$$



$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}}.$$

کار و انرژی در الکترواستاتیک

سوال: اگر یک چشمه بار استاتیک (مانا) از بار در ناحیه‌ای از فضا داشته باشیم و بخواهیم بار آزمون Q را از یک نقطه به نقطه دیگر ببریم چه مقدار کار باید انجام دهیم؟



کاری که باید انجام دهیم بر خلاف کاری است که میدان الکترواستاتیک روی بار آزمون انجام می‌دهد.
درست همانند اینکه برای بلند کردن یک جسم باید کاری بر خلاف کار نیروی وزن انجام دهیم.

کار و انرژی در الکترواستاتیک

علامت منفی چون کار ما بر خلاف کار میدان است

نکته : کار مستقل از مسیر

است : نیروی پایستار

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q[V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})].$$

تعریف اختلاف پتانسیل:

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \frac{W}{Q}.$$

مقدار کار به ازای واحد بار برای جا به جایی از نقطه a تا نقطه b

اگر نقطه مرجع

پتانسیل در

بی نهایت باشد

$$W = Q[V(\mathbf{r}) - V(\infty)],$$

$$W = QV(\mathbf{r}).$$

انرژی پتانسیل الکتریکی

انرژی یک توزیع بار گسسته (مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای)

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right)$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} q_j \right).$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\mathbf{r}_i).$$

انرژی الکترواستاتیکی توزیع بار پیوسته

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau.$$

تعمیم حالت قبل در حالتی که توزیع بار حجمی باشد

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \text{so} \quad W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V d\tau.$$

قانون گائوس

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) d\tau + \oint V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right]$$

و انتگرال گیری جزء به جزء

توجه داریم که محدوده انتگرال گیری روی حجم ناحیه ای است که توزیع با غیر صفر است

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) d\tau + \oint V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right].$$

می‌توان حجم ناحیه مربوط به انتگرال‌گیری را تا حجمی بزرگتر از ناحیه توزیع بار افزایش داد چرا که افزودن نواحی که توزیع بار در آن وجود ندارد معادل افزودن مقدار صفر به کل انتگرال است

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2 d\tau.$$

در این صورت با افزایش حجم ناحیه انتگرال‌گیری سهم جمله انتگرال سطحی بالا رفته رفته کم می‌شود به طوریکه اگر ناحیه انتگرال‌گیری کل فضا باشد سهم آن صفر می‌گردد.

نکاتی درباره انرژی الکترواستاتیک

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau.$$

- انرژی در کجا ذخیره می شود در میدان یا در توزیع بار؟

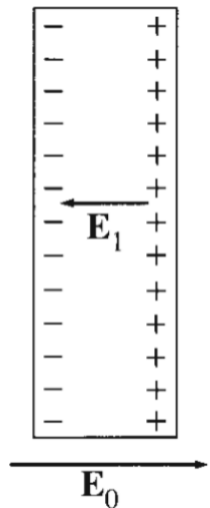
$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2 d\tau.$$

معمولا در حد الکترواستاتیک این تعبیر که انرژی در خود توزیع با ذخیره شده مفید تر است

- رابطه محاسبه انرژی الکترواستاتیک کمی از لحاظ مفهومی در مورد توزیع بار نقطه ای و توزیع بار پیوسته متفاوتند چرا که در مورد توزیع بار نقطه ای انرژی لازم برای ساختن بار نقطه ای در نظر گرفته نمی شود.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int \left(\frac{q^2}{r^4} \right) (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \infty.$$

رسانا: ماده ای که دارای الکترون آزاد است



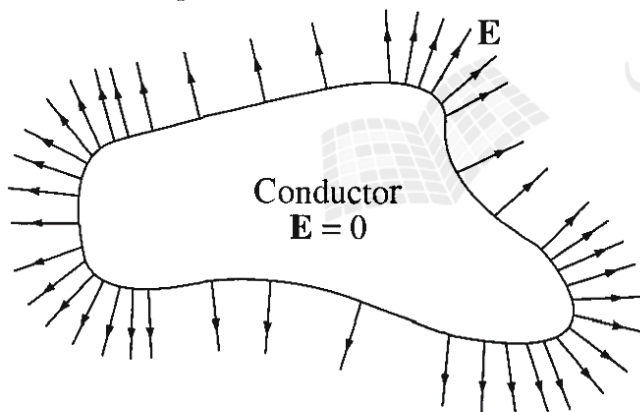
برای اثبات کافی است رسانا را در معرض
میدان خارجی قرار دهید و آنگاه منتظر
برقراری شرایط الکترواستاتیکی بمانید

- میدان الکتریکی درون رسانا صفر است

- در داخل رسانا چگالی بار
حجمی صفر است

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

اثبات با قانون گاوس

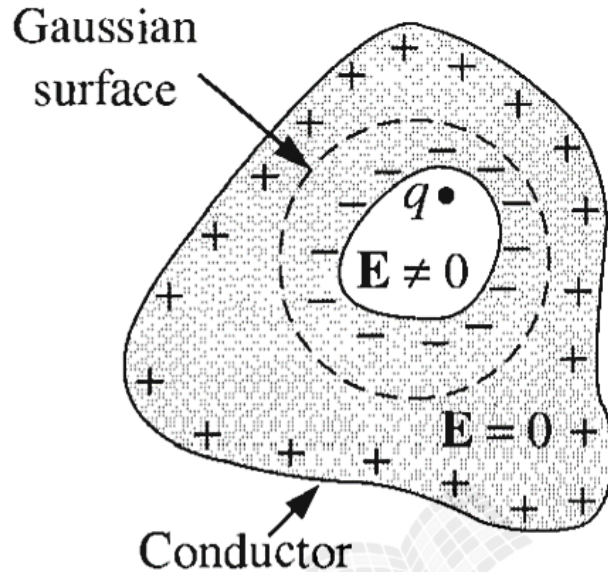


• درست خارج از رسانا
میدان فقط مؤلفه
عمودی دارد

- بارها در سطح رسانا توزیع می شوند

- رسانا سطح هم پتانسیل است

کاوک داخل رسانا : حفره داخل رسانا

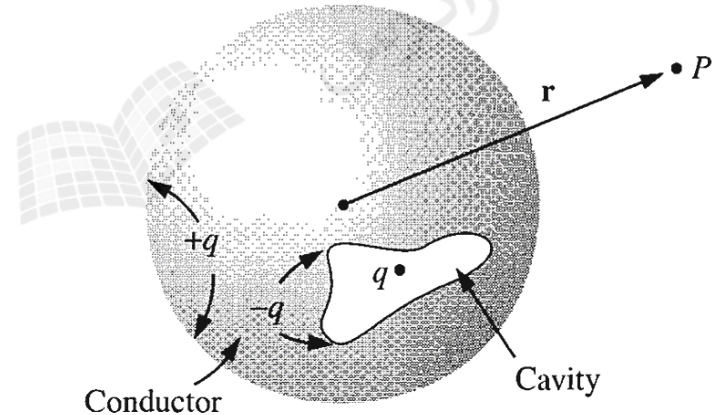


- اگر داخل کاوک بار باشد آن بار، دنیای الکترومغناطیس بیرون را حس نمی کند اما دنیای بیرون از وجود بار داخل کاوک باخبر است.

- میدان بار داخل کاوک از بیرون قابل اندازه گیری است و از شکل کاوک نیز مستقل است.

کاواک داخل رسانا : حفره داخل رسانا

- اگر داخل کاواک با نباشد میدان درون کاواک صفر است که بدین معناست هیچ باری روی دیواره کاواک القا نمی شود.



بار سطحی و نیروی وارد بر سطح یک رسانا

چون میدان درون رسانا صفر است شرایط مرزی ایجاب می کنند

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}},$$



که میدان خارج از سطح رسانا بر آن عمود باشد و مقدار رو به رو

را داشته باشد

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}.$$

اگر علاقه مند به یافتن نیروی وارد شده بر واحد سطح باشیم ، با توجه به

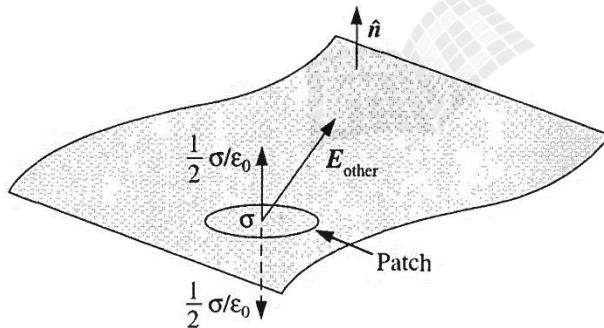
ناپویستگی میدان در سطح رسانا شاید واضح نباشد کدام میدان (درون یا برون

رسانا) را باید برای محاسبه لحاظ کنیم

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{average}} = \frac{1}{2} \sigma (\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}}).$$

برای محاسبه میدان میانگین در حالتی که چگالی سطحی بار داریم یک صفحه بار در نظر میگیریم و تکه‌ای آنقدر کوچک از صفحه را که می‌توان با تقریب خوبی چگالی روی آن را ثابت گرفت، در نظر می‌گیریم.

میدان در بیرون جمع میدان ناشی از تکه کوچک و سایر نواحی است.



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{patch}} + \mathbf{E}_{\text{Other}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{above}} = \mathbf{E}_{\text{other}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{E}_{\text{below}} = \mathbf{E}_{\text{other}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}},$$



$$\mathbf{f} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{\mathbf{n}}.$$

برای حالت خاص رسانا

فشار الکترواستاتیکی

$$\mathbf{E}_{\text{other}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}}) = \mathbf{E}_{\text{average}}.$$

که میدان درون صفر

وارد بر سطح رسانا

است

این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«آموزش الکترومغناطیس ۱ (Electromagnetics)»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvphy110