وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

# آموزشکده فنی و کشاورزی فسا

بسم الله الرحمن الرحيم

# فیزیک عمومی

مدرس : آرش دهیار

# فصل اول

## بردار

# جمع بردارها به روش تحلیلی(جبری)

قبل از اینکه به بررسی این جمع بپردازیم، لازم است با دستگاه مختصات آشنا شویم.

انواع دستگاه مختصات:

۱– دستگاه مختصات دکارتی

۲– دستگاه مختصات استوانه ای

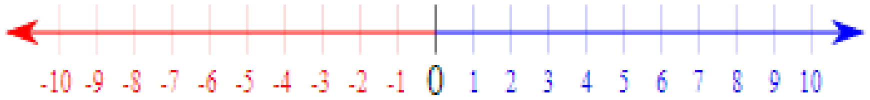
۳– دستگاه مختصات کروی

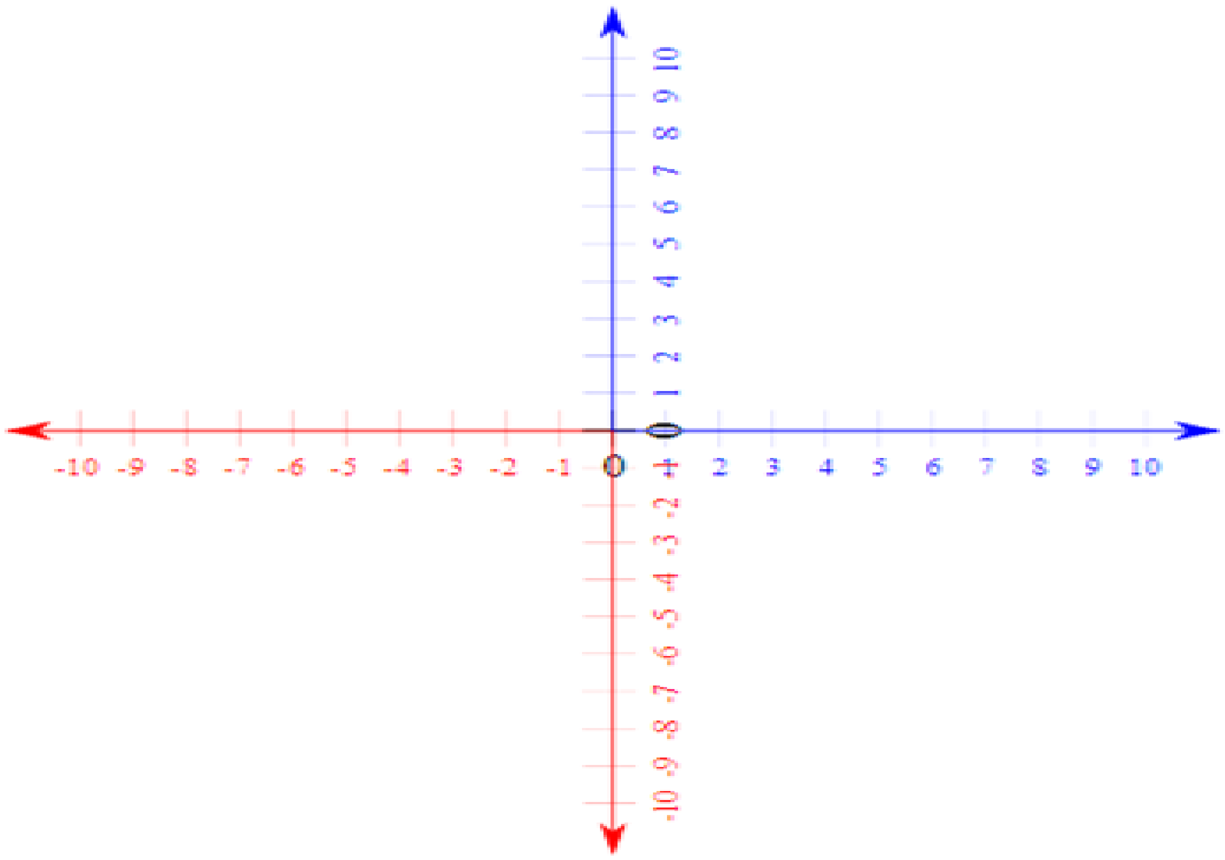
۴– دستگاه مختصات قطبی

در این درس فقط به دستگاه مختصات دکارتی می پردازیم.

دستگاه مختصات دکارتی در یک بعد دارای یک محور بوده و در دو بعد از دو محور عمود بر هم و در سه بعد از سه محور عمود بر هم تشکیل شده است.

دستگاه مختصات دکارتی از دو محور اعداد تشکیل شده است که این دو محور در نقطه های صفر خود، بر هم عمود هستند.




محور افقی را محور xها ( 

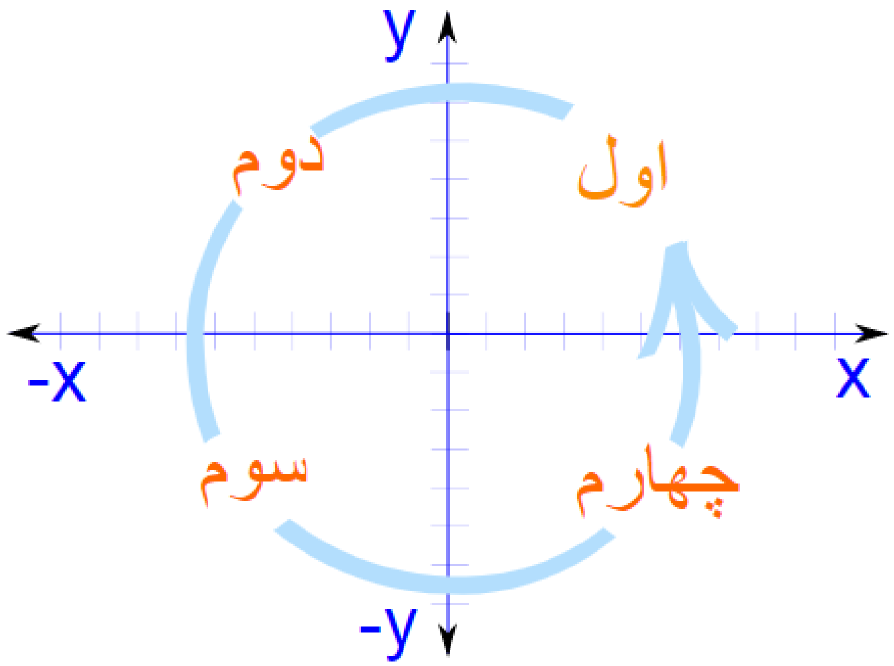
) و محور عمودی را محور yها ( 

)

**دستگاه مختصات دکارتی در یک بعد**

**دستگاه مختصات دکارتی دردو بعد**

به این ترتیب دستگاه مختصات دکارتی، چهار قسمت می‌شود که هر قسمت را یک ربع یا ناحیه می‌نامیم. محل برخورد دو محور را مبدأ مختصات نامیده می شود. از مبدأ به سمت راست، اعداد مثبت و به سمت چپ اعداد منفی قرار داده می‌شوند (درست مانند محور اعداد حقیقی). همچنین، از مبدأ به سمت بالا، اعداد مثبت و به سمت پایین اعداد منفی را قرار می‌دهیم. دقت داشته باشید واحدی که برای نشان دادن اعداد روی محور xها و yها انتخاب می‌شود باید با هم برابر باشد. شکل زیر را ببینید:




در ربع اول، هم xها و هم yها مثبت هستند. در ربع دوم، xها منفی و yها مثبتند، در ربع سوم هم xها و هم yها منفی هستند و در ربع چهارم xها مثبت و yها منفی هستند.

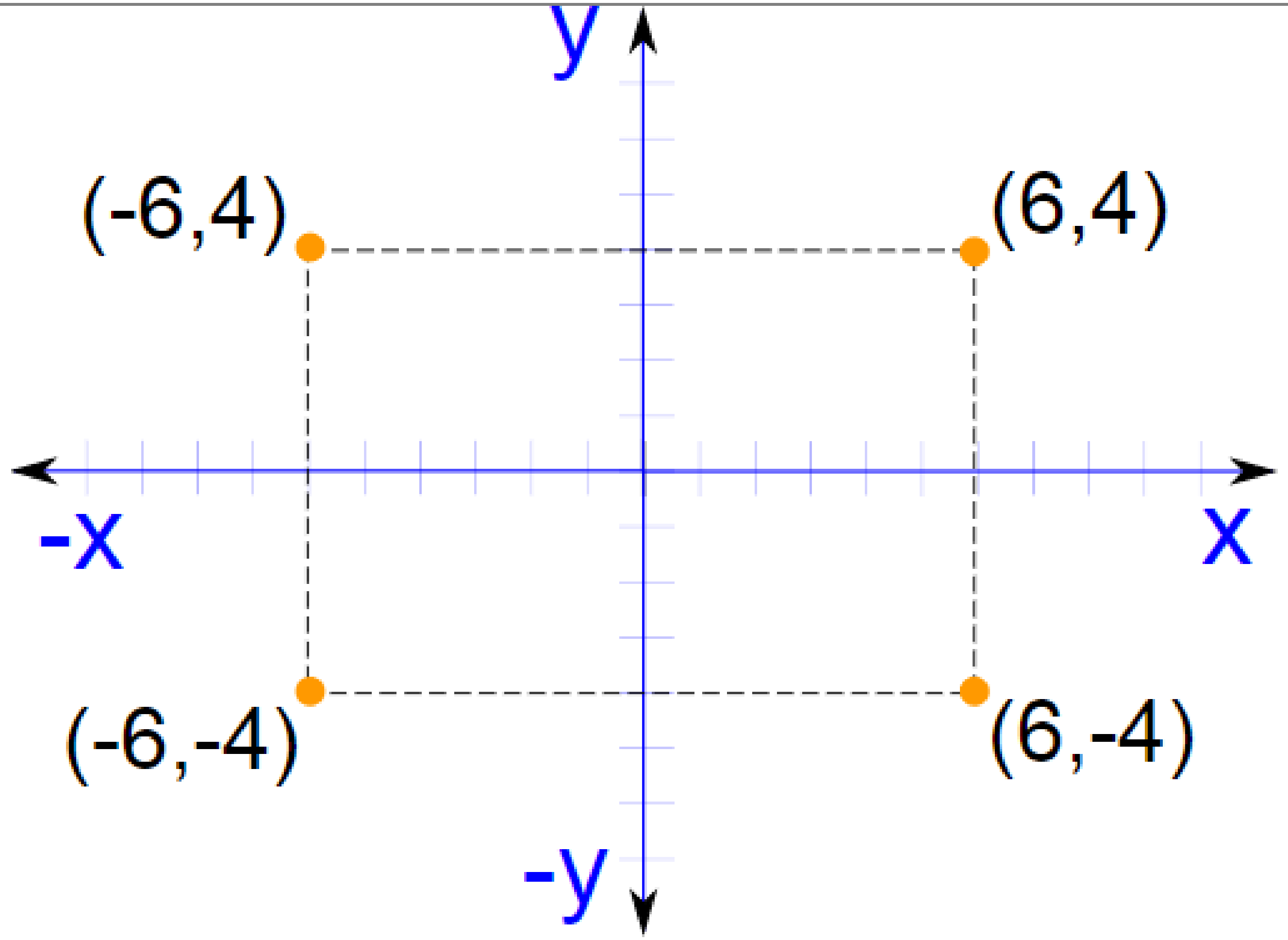
# نمایش اعداد در دستگاه مختصات دکارتی:

هر **زوج مرتب** را می توان به صورت یک **نقطه** در **صفحه مختصات دکارتی** نمایش داد. **مؤلفه‌ی اول** را از روی **محور $x$ها** و سپس **مؤلفه‌ی دوم** را از روی **محور $y$ها** انتخاب می‌کنیم (دقت کنید که **زوج مرتب** از سمت چپ خوانده می‌شود). مثلاً (۲,۴) به این معنی است که اگر از مبدأ مختصات، دو واحد در جهت مثبت محور $x$ها پیش رویم و سپس چهار واحد در جهت مثبت محور $y$ها (یعنی به سمت بالا) حرکت کنیم به نقطه‌ی (۲,۴) می‌رسیم.

(اگر علامت مؤلفه $x$مثبت باشد، در جهت راست حرکت می‌کنیم و اگر منفی باشد به سمت چپ)

(اگر علامت مؤلفه $y$مثبت باشد، به سمت بالا حرکت می‌کنیم و اگر منفی باشد به سمت پایین).

پس جدول زیر را خواهیم داشت:

<table>
<tr><th>ناحیه (ربع)</th><th>مولفه x</th><th>مولفه y</th><th>مثال</th><th>تصویر</th></tr>
<tr><td>اول</td><td>مثبت</td><td>مثبت</td><td>(۶,۴)</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>دوم</td><td>منفی</td><td>مثبت</td><td>(−۶,۴)</td></tr>
<tr><td>سوم</td><td>منفی</td><td>منفی</td><td>(−۶,−۴)</td></tr>
<tr><td>چهارم</td><td>مثبت</td><td>منفی</td><td>(۶,−۴)</td></tr>
</table>

## بردارهای یکه:

**بردارهایی که در راستای محورهای دستگاه مختصات بوده و مقدار (اندازه) آنها برابر واحد بوده و دو به دو بر هم عمود هستند .**

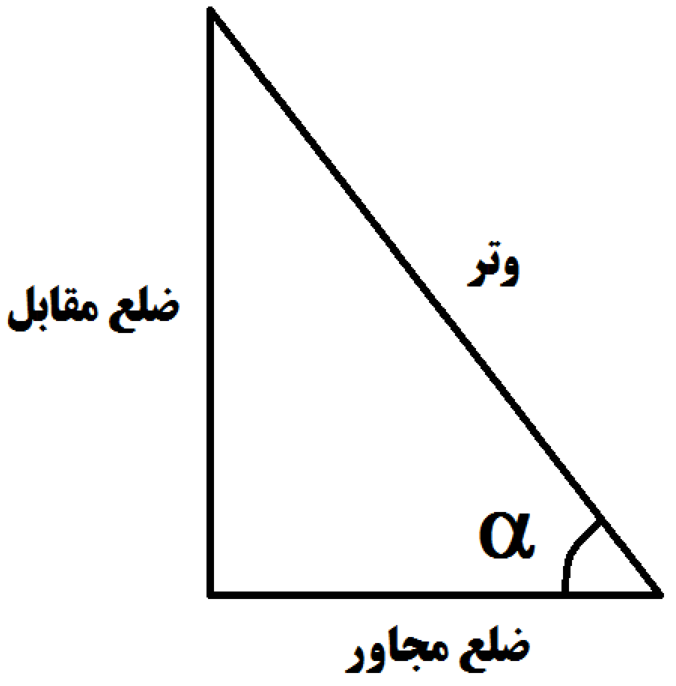
**در دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی بردارهای یکه را با $\hat{i}\ ,\ \hat{j}\ ,\ \hat{k}$ نشان می دهیم.**

# مروری بر روابط مثلثاتی

در ریاضیات روابط مثلثاتی از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. در یک مثلث قائم الزاویه روابط زیر برقرار است:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$



## تجزیه بردار:

**تجزیه ی بردار به معنی این است که بردار را به صورت برآیند دو یا چند بردار دیگر بنویسیم.**

## تجزیه بردار به مولفه های سازنده اش:

**یعنی بردار را به صورت برآیند دو بردار عمود برهم که موازی محورهای مختصات هستند ، بنویسیم.**

## توجه:

**هر برداری که در راستای محورهای مختصات باشد را میتوان به صورت حاصل یک عدد حقیقی در بردار یکه ی مربوط به محور مختصات موازی با آن بردار نوشت.**

بنابر این هر بردار را میتوان به صورت بر آیند دو بردار عمود برهم نوشت. که هر کدام از آنها ضریبی از بردارهای یکه ی $i$ و $j$ و $k$ هستند.

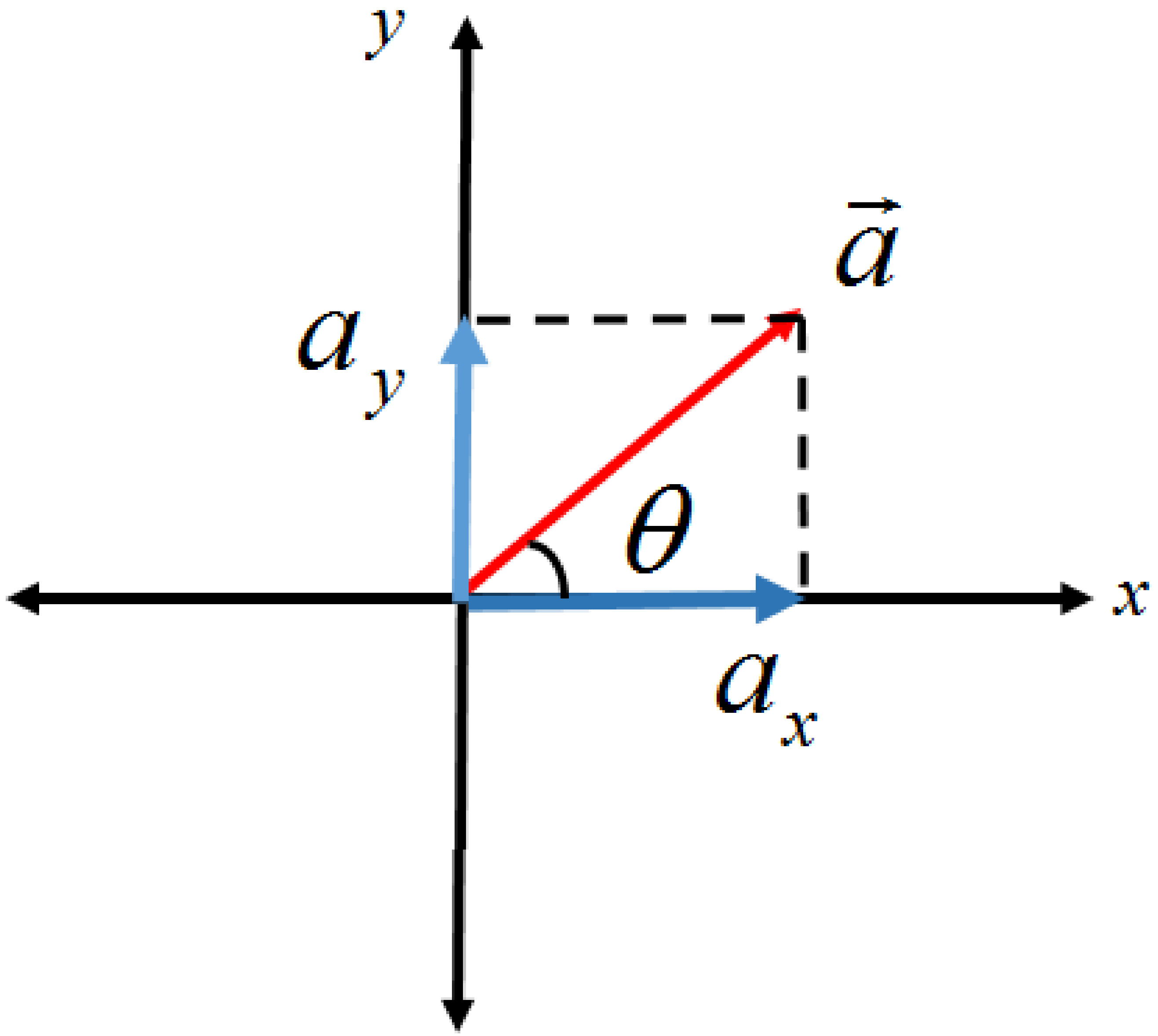
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_k\hat{k}$$

## نحوه ی به دست آوردن مولفه ها:

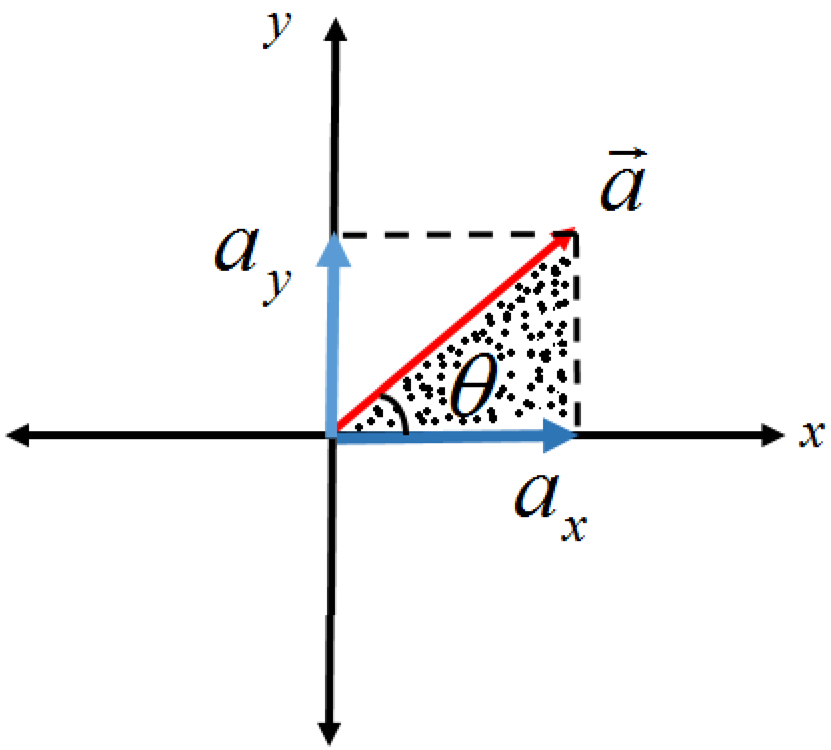
۱- بردار را به گونه ای روی صفحه انتقال میدهیم که ابتدای آن روی مبدا مختصات قرار بگیرد.

۲- از انتهای بردار دو خط، یکی به موازات محور $x$ و یکی به موازات محور $y$ رسم میکنیم که محورهای مختصات را در مجموع در دو نقطه قطع خواهند کرد.

۳- از مبدا مختصات به دو نقطه تقاطع دو بردار رسم میکنیم که ابتدای آنها مبدا مختصات و انتهای هر کدام، یکی از نقاط تقاطع باشد.




$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$




**برای محاسبه مقادیر $ax$ و $ay$ به طریق زیر عمل می نمائیم.**

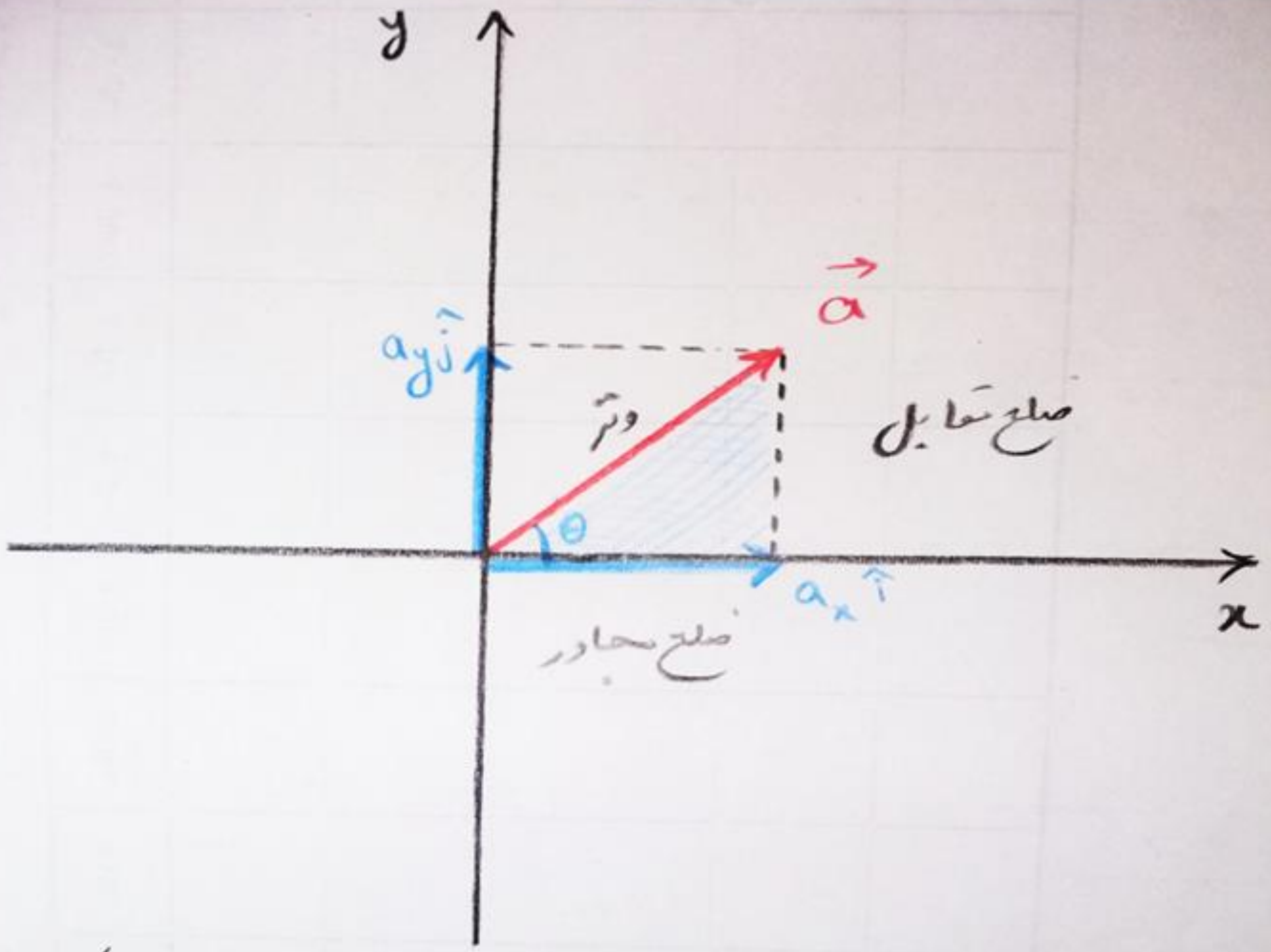
**به مثلث هاشورخورده توجه کنید. روابط مثلثاتی عنوان شده را برای این مثلث به کار می بریم:**

$$\sin(\theta) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a\cos(\theta)$$

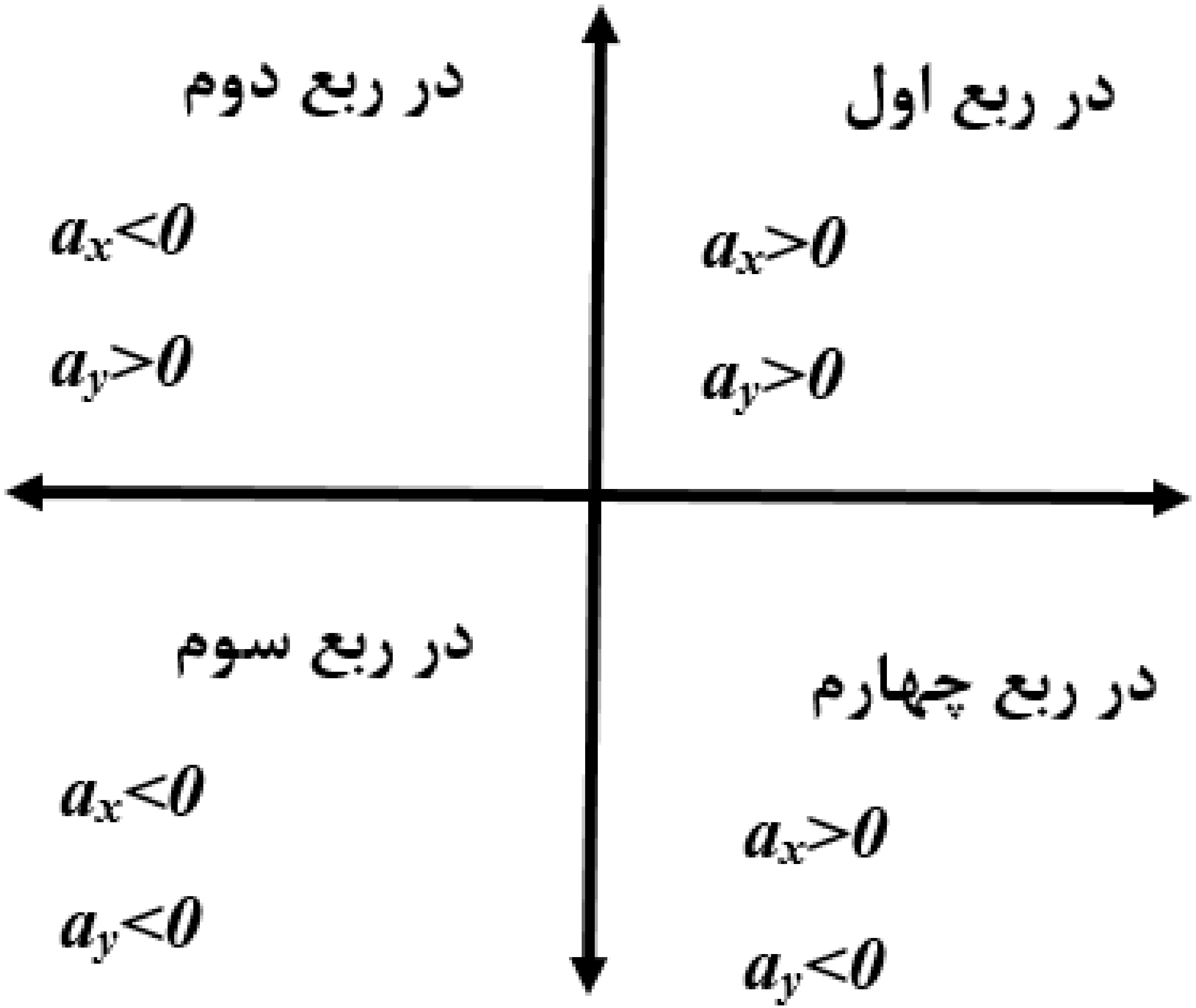



برای تعیین مؤلفه های یک بردار ( $\vec{a}$ )، از انتهای بردار به هر کدام از محورها خطی عمود می نمائیم و در مثلث قائم الزاویه ای که زاویه آن داده شده است ، روابط مثلثاتی گفته شده را به کار می بریم

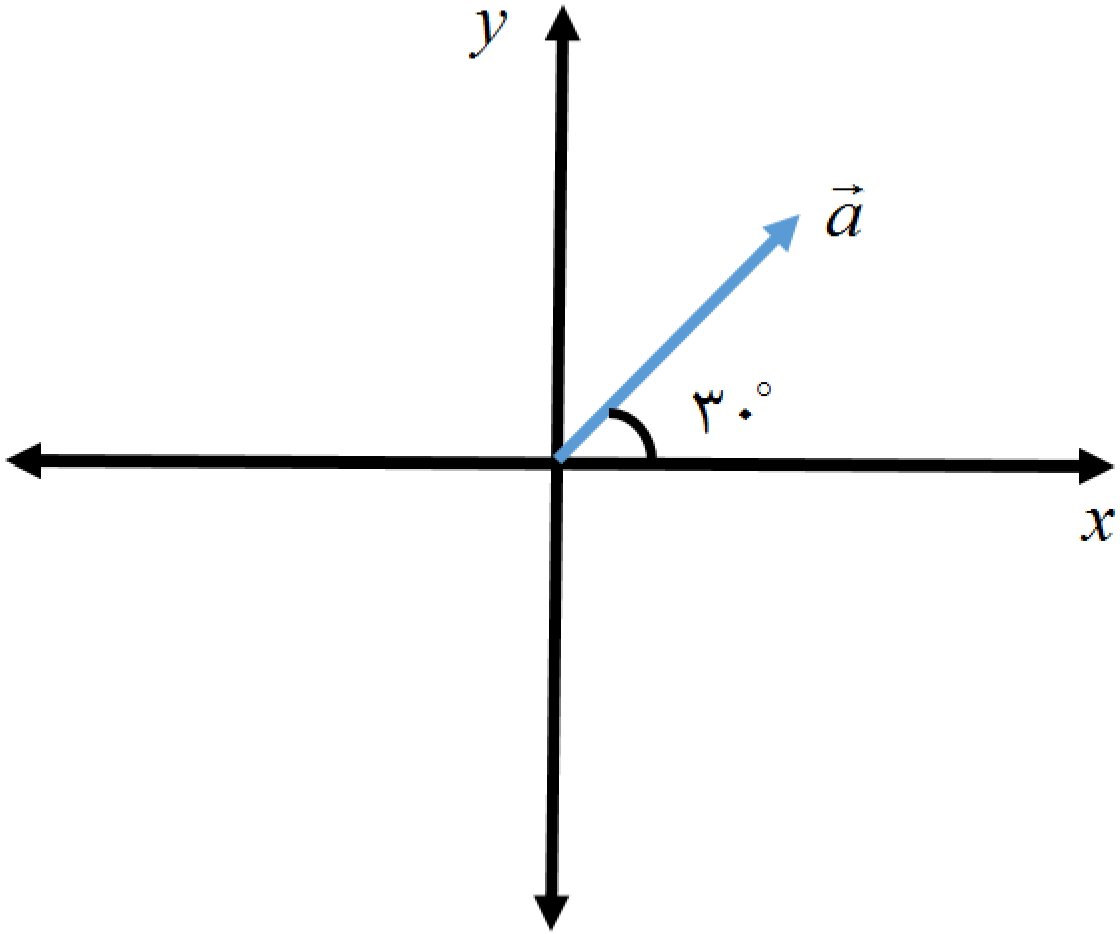
**این اسلاید هم برای توضیح بیشتر در خصوص تعیین مولفه های یک بردار**

**نکته مهم:**

**به علامت مولفه های یک بردار در هر ربع توجه شود.**



**در شکل زیر اندازه بردار $\vec{a}$ برابر با ۵ واحد است. بردار $\vec{a}$ را به مولفه هایش تجزیه و بر حسب بردارهای یکه بنویسید؟**



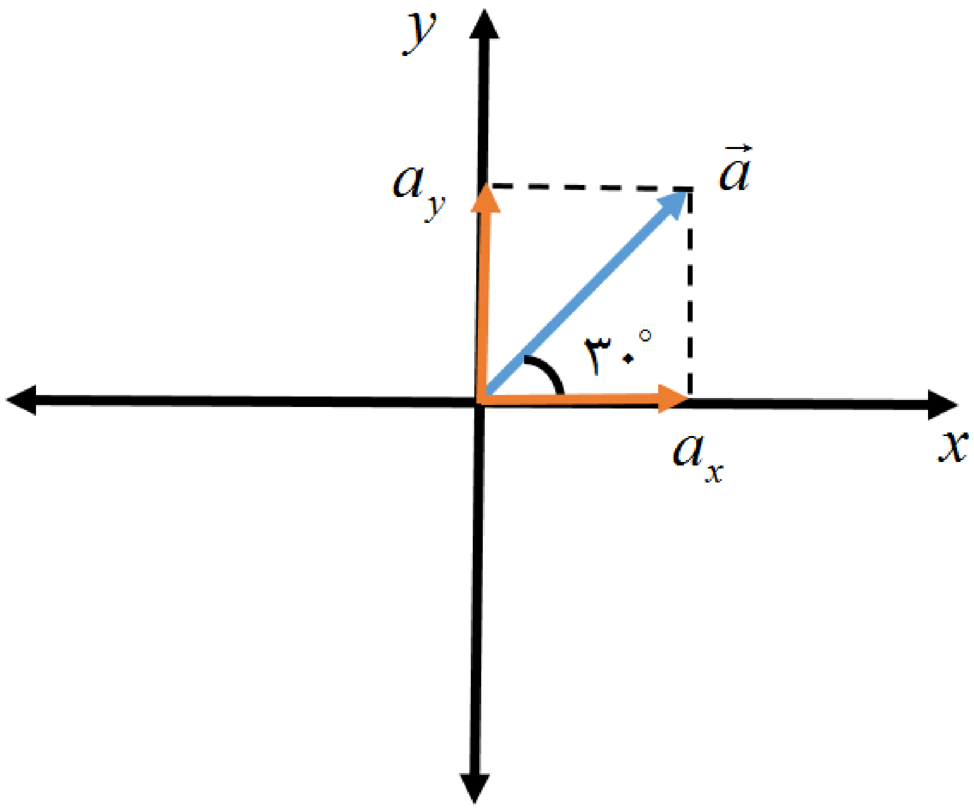
برای تجزیه بردار به مولفه هایش به طریق زیر عمل می نمائیم:

۱– از انتهای بردار خطی را بر هر کدام از محورها عمود می کنیم. مولفه بردار بر روی محور $x$ را $ax$ و مولفه بردار بر روی محور $y$ را $ay$ می نامیم.

۲– مثلث قائم الزاویه ای را که زاویه آن مشخص است را تعیین می کنیم.

۳– برای تعیین $ax$ و $ay$ یک بار رابطه $sin$ و یک بار رابطه $cos$ را با توجه به تعریفشان می نویسیم

۴– بسته به اینکه $ax$ و $ay$ در کدام ربع قرار دارند، علامت $ax$ و $ay$ را تعیین می نمائیم.




$$\sin(\theta) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a\cos(\theta)$$

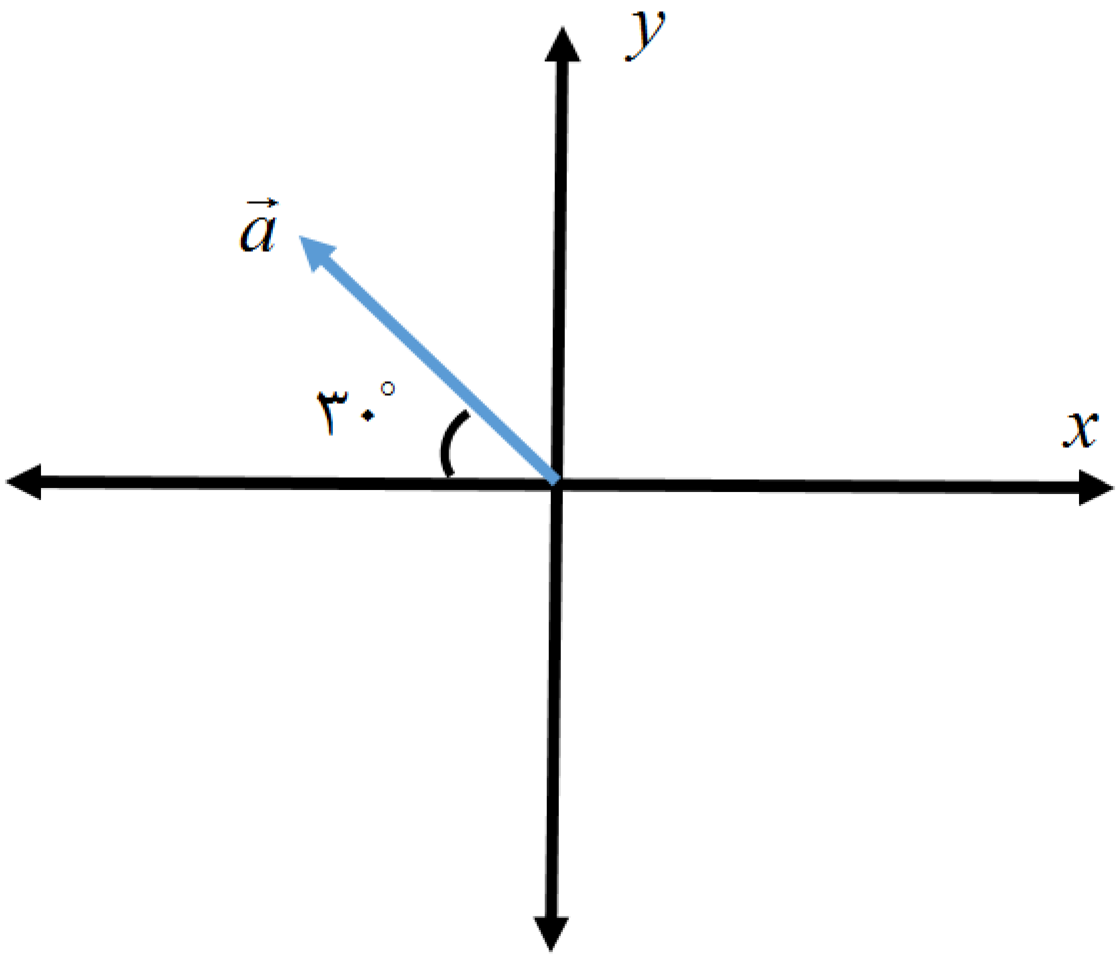
$$\sin(\theta)=\frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a\sin(\theta) \rightarrow a_y = ۵\sin(۳۰) \rightarrow a_y = ۵(۰/۵) \rightarrow a_y = ۲/۵$$

$$\cos(\theta)=\frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a\cos(\theta) \rightarrow a_x = ۵\cos(۳۰) \rightarrow a_x = ۵(۰/۸) \rightarrow a_x = ۴$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \rightarrow \vec{a} = ۴\hat{i} + ۲/۵\hat{j}$$

**از آنجائیکه $ax$ و $ay$ در ربع اول قرار دارند، علامت هر دو آنها مثبت است.**

در شکل زیر اندازه بردار $\vec{a}$ برابر با ۵ واحد است. بردار $\vec{a}$ را به مولفه هایش تجزیه و بر حسب بردارهای یکه بنویسید؟



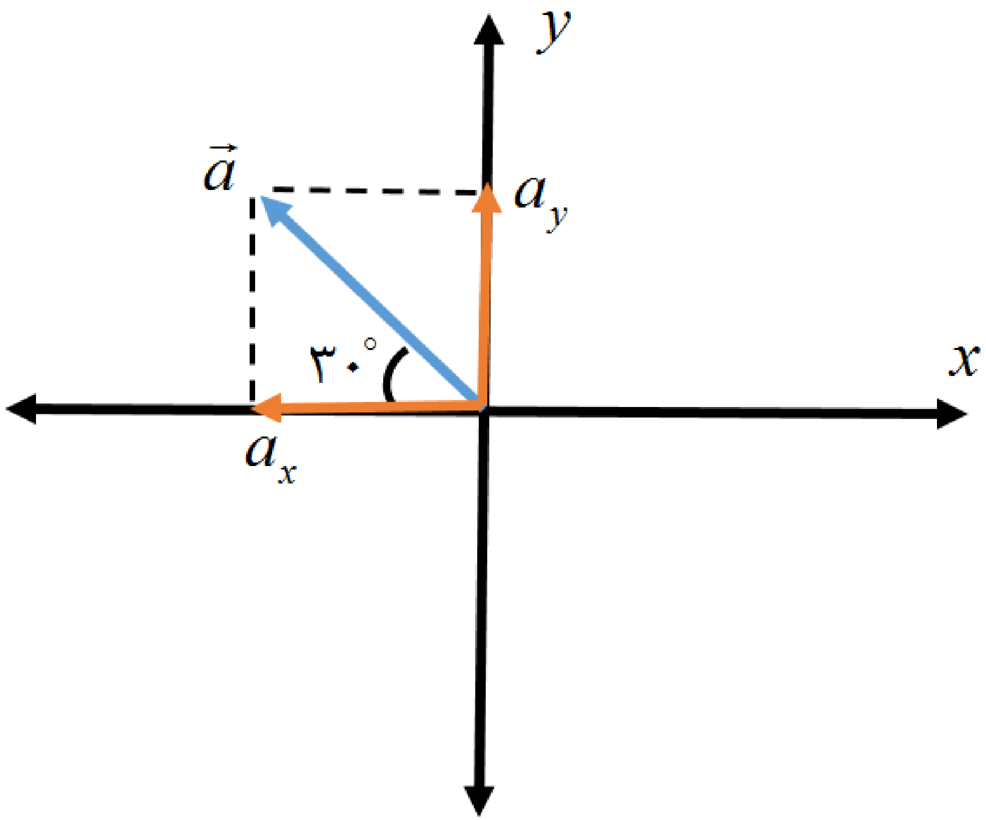
برای تجزیه بردار به مولفه هایش به طریق زیر عمل می نمائیم:

۱- از انتهای بردار خطی را بر هر کدام از محورها عمود می کنیم. مولفه بردار بر روی محور $x$ را $ax$ و مولفه بردار بر روی محور $y$ را $ay$ می نامیم.

۲- مثلث قائم الزاویه ای را که زاویه آن مشخص است را تعیین می کنیم.

۳- برای تعیین $ax$ و $ay$ یک بار رابطه $sin$ و یک بار رابطه $cos$ را با توجه به تعریفشان می نویسیم

۴- بسته به اینکه $ax$ و $ay$ در کدام ربع قرار دارند، علامت $ax$ و $ay$ را تعیین می نمائیم.




$$\sin(\theta) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta)=\frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a\sin(\theta) \rightarrow a_y = ۵\sin(۳۰) \rightarrow a_y = ۵(۰/۵) \rightarrow a_y = ۲/۵$$

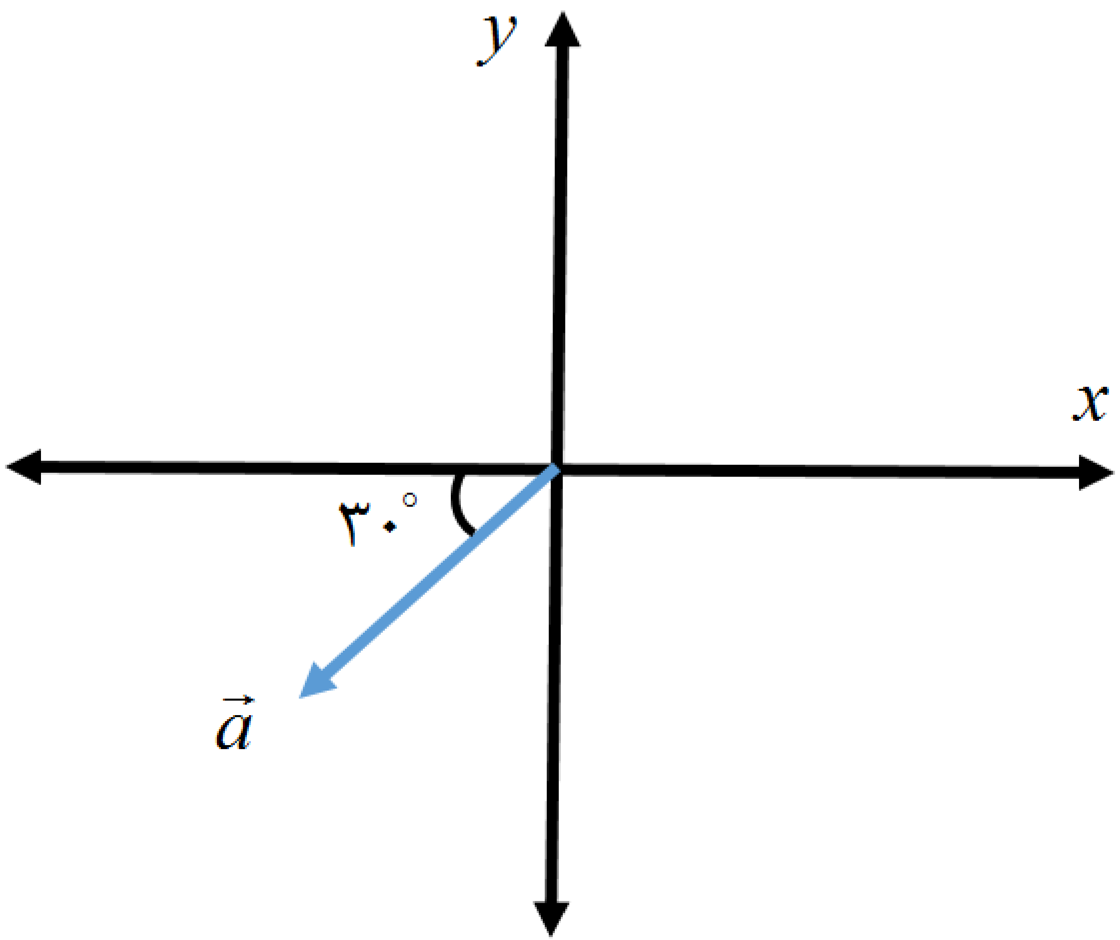
$$\cos(\theta)=\frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a\cos(\theta) \rightarrow a_x = ۵\cos(۳۰) \rightarrow a_x = ۵(۰/۸) \rightarrow a_x = ۴$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \rightarrow \vec{a} = -۴\hat{i} + ۲/۵\hat{j}$$

**از آنجائیکه $ax$ در ربع دوم قرار دارد، علامت آن منفی و علامت $ay$ مثبت است.**

**به مثبت و منفی بودن جهت محورهای مختصات توجه شود.**

در شکل زیر اندازه بردار $\vec{a}$ برابر با ۵ واحد است. بردار $\vec{a}$ را به مولفه هایش تجزیه و بر حسب بردارهای یکه بنویسید؟



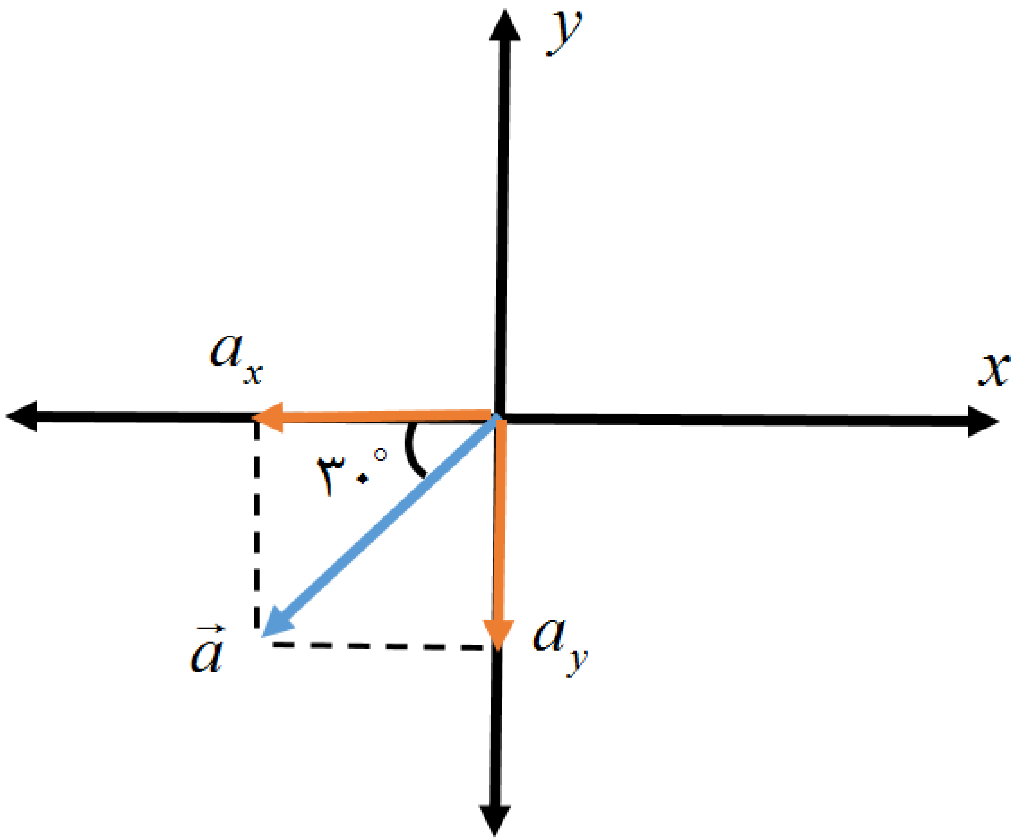
برای تجزیه بردار به مولفه هایش به طریق زیر عمل می نمائیم:

۱- از انتهای بردار خطی را بر هر کدام از محورها عمود می کنیم. مولفه بردار بر روی محور $x$ را $ax$ و مولفه بردار بر روی محور $y$ را $ay$ می نامیم.

۲- مثلث قائم الزاویه ای را که زاویه آن مشخص است را تعیین می کنیم.

۳- برای تعیین $ax$ و $ay$ یک بار رابطه $sin$ و یک بار رابطه $cos$ را با توجه به تعریفشان می نویسیم

۴- بسته به اینکه $ax$ و $ay$ در کدام ربع قرار دارند، علامت $ax$ و $ay$ را تعیین می نمائیم.




$$\sin(\theta) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a\cos(\theta)$$

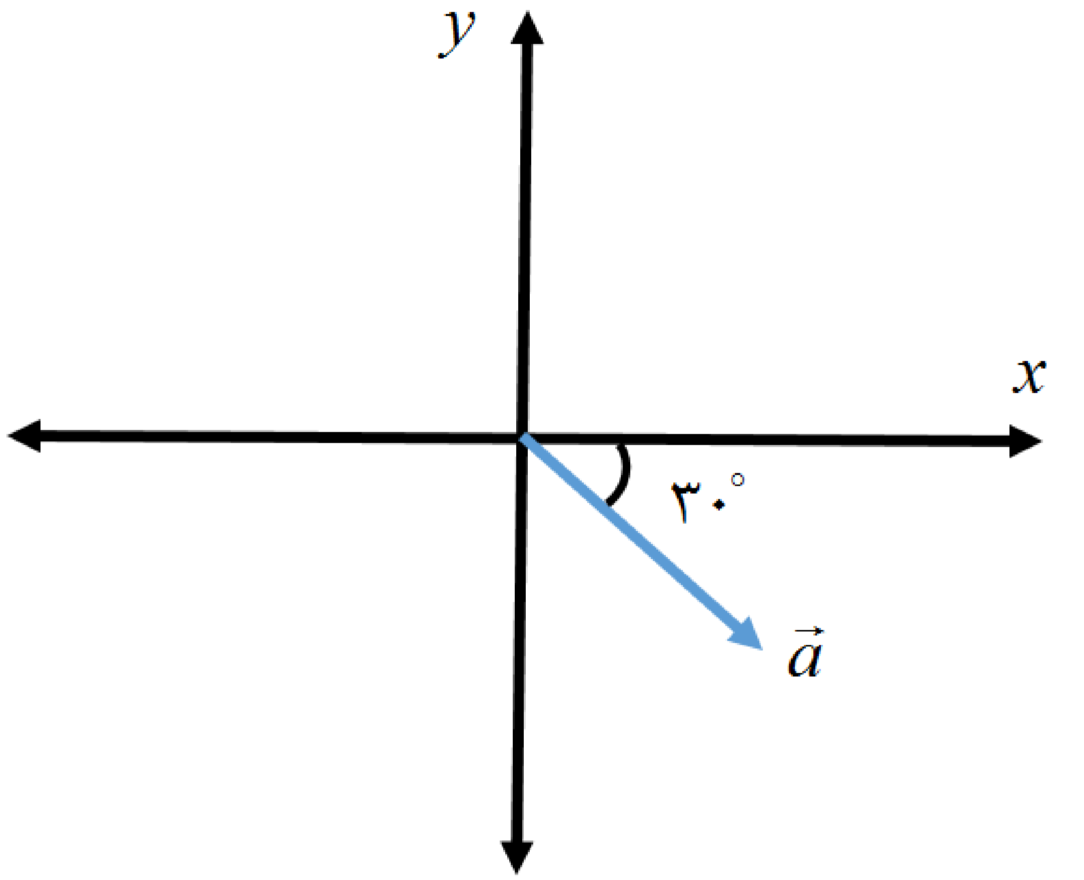
$$\sin(\theta)=\frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a\sin(\theta) \rightarrow a_y = ۵\sin(۳۰) \rightarrow a_y = ۵(۰/۵) \rightarrow a_y = ۲/۵$$

$$\cos(\theta)=\frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a\cos(\theta) \rightarrow a_x = ۵\cos(۳۰) \rightarrow a_x = ۵(۰/۸) \rightarrow a_x = ۴$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \rightarrow \vec{a} = -۴\hat{i} - ۲/۵\hat{j}$$

**از آنجائیکه $ax$ و $ay$ در ربع سوم قرار دارند، علامت هر دو آنها منفی است.**
**به مثبت و منفی بودن جهت محورهای مختصات توجه شود.**

**تمرین:**
**در شکل زیر اندازه بردار $\vec{a}$ برابر با ۱۰ واحد است. بردار $\vec{a}$ را به مولفه هایش تجزیه و بر حسب بردارهای یکه بنویسید؟**



# جمع و تفریق بردارها به روش تحلیلی:

اگر دو بردار به صورت زیر داشته باشیم:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_k\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_k\hat{k}$$

آنگاه برای جمع و تفریق ضرایب ***i*** رابا هم ، ضرایب ***j*** رابا هم و ضرایب ***k*** رابا هم جمع و تفریق می نمائیم:

$$\begin{cases} \vec{a}+\vec{b} = (a_x+b_x)\hat{i} + (a_y+b_y)\hat{j} + (a_k+b_k)\hat{k} \\ \vec{a}-\vec{b} = (a_x-b_x)\hat{i} + (a_y-b_y)\hat{j} + (a_k-b_k)\hat{k} \end{cases}$$

**مثال:**

**با توجه به بردارهای داده شده مقادیر مورد نظر را محاسبه نمائید؟**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = -۲\hat{i} + \hat{j} + ۳\hat{k} \\ \vec{b} = \hat{i} + ۳\hat{j} + -\hat{k}\end{array}\right\}$$

$$\begin{cases}\vec{a} + \vec{b} = ? \\ \vec{a} - \vec{b} = ?\end{cases}$$

حل:

برای جمع و تفریق ضرایب $i$ رابا هم ، ضرایب $j$ رابا هم و ضرایب $k$ رابا هم جمع و تفریق می نمائیم

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=-۲\hat{i}+\hat{j}+۳\hat{k}\\ \vec{b}=\hat{i}+۳\hat{j}+-\hat{k}\end{array}\right\}$$

$$\begin{cases}\vec{a}+\vec{b}=\left(\left(-۲\right)+۱\right)\hat{i}+\left(۱+۳\right)\hat{j}+\left(۳+\left(-۱\right)\right)\hat{k}\to\vec{a}+\vec{b}=-\hat{i}+۴\hat{j}+۲\hat{k}\\ \vec{a}-\vec{b}=\left(\left(-۲\right)-۱\right)\hat{i}+\left(۱-۳\right)\hat{j}+\left(۳-\left(-۱\right)\right)\hat{k}\to\vec{a}-\vec{b}=-۳\hat{i}+-۲\hat{j}+۴\hat{k}\end{cases}$$

تمرین:

**با توجه به بردارهای داده شده مقادیر مورد نظر را محاسبه نمائید؟**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = -۲\hat{i} + \hat{j} + ۳\hat{k} \\ \vec{b} = \hat{i} + ۳\hat{j} + -\hat{k}\end{array}\right\}$$

$$\begin{cases}\vec{a} + ۲\vec{b} = ? \\ ۲\vec{a} - \vec{b} = ?\end{cases}$$

# ضرب بردارها:

۱- ضرب یک مقدار ثابت (یک عدد) در یک بردار

۲- ضرب داخلی ( اسکالر) دو بردار :

۳- ضرب خارجی دو بردار :

## ضرب بردارها:

۱– ضرب یک مقدار ثابت (یک عدد) در یک بردار

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_k\hat{k} \xrightarrow{\times c} c\vec{a} = c \times a_x\hat{i} + c \times a_y\hat{j} + c \times a_k\hat{k}$$

۲– ضرب داخلی ( اسکالر) دو بردار :

ضرب داخلی دو بردار به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A| \times |B| \times \cos(\theta)$$

**اگر دو بردار بر حسب بردارهای یکه عنوان شده باشند، آنگاه ضرب داخلی آنها به صورت زیر است:**

$$\begin{cases}\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_k\hat{k}\\ \vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_k\hat{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=a_xb_x\left(\hat{i}.\hat{i}\right)+a_xb_y\left(\hat{i}.\hat{j}\right)+a_xb_k\left(\hat{i}.\hat{k}\right)+\\ a_yb_x\left(\hat{j}.\hat{i}\right)+a_yb_y\left(\hat{j}.\hat{j}\right)+a_yb_k\left(\hat{j}.\hat{k}\right)+\\ a_kb_x\left(\hat{k}.\hat{i}\right)+a_kb_y\left(\hat{k}.\hat{j}\right)+a_kb_k\left(\hat{k}.\hat{k}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=۱\times۱\times\cos\left(۰^\circ\right)=۱\\ \hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{i}=\hat{i}.\hat{k}=\ldots=۱\times۱\times\cos\left(۹۰^\circ\right)=۰\end{cases}$$

**زاویه بین بردارهای یکه یکسان صفر درجه و زاویه بین بردارهای غیریکسان ۹۰ درجه است.**

در نهایت حاصل ضرب داخلی دو بردار به صورت زیر است:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_k b_k$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد است.

**مثال:**

**با توجه به بردارهای داده شده مقادیر مورد نظر را محاسبه نمائید؟**

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= -۲\hat{i} + \hat{j} + ۳\hat{k}\\ \vec{b} &= \hat{i} + ۳\hat{j} + -\hat{k}\end{aligned}\right\}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = ?$$

**حل:**

**با توجه به رابطه داده شده برای ضرب داخلی دو بردار، خواهیم داشت:**

$$\vec{a}.\vec{b} = (-۲)(۱) + (۱)(۳) + (۳)(-۱)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = -۲ + ۳ - ۳$$

$$\vec{a}.\vec{b} = -۲$$

## ۳- ضرب خارجی دو بردار :

ضرب خارجی دو بردار به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |a| \times |b| \times \sin(\theta)$$

**حاصل ضرب خارجی دو بردار، یک بردار است.**

**تمرین:**

**با توجه به بردارهای داده شده مقادیر مورد نظر را محاسبه نمائید؟**

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= -\hat{i} + \hat{j} - ۲\hat{k} \\ \vec{b} &= \hat{i} - ۲\hat{j} - \hat{k}\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases}\vec{a}.(۲\vec{b}) = ? \\ (۲\vec{a}).\vec{b} = ?\end{cases}$$

# موفق و پیروز باشید